

공학석사 학위논문

선형 시불변 불확실성 시스템을 위한 퍼지 추정기법이 결합된 상태추정 알고리즘

State Estimation Algorithm with Fuzzy Estimation Technique for
Linear Time Invariant Uncertain Systems



지도교수 김 종 화

2013년 2월

한국해양대학교 대학원
제 어 계 측 공 학 과
서 수 경

본 논문을 서수경의 공학석사 학위논문으로 인준함

위원장 공학박사 조 석 제 (인)

위 원 공학박사 하 윤 수 (인)

위 원 공학박사 김 종 화 (인)

2012년 12월 24일

한국해양대학교 대 학 원

목 차

Abstract

제 1 장 서 론	1
1.1 연구 배경과 연구방법	1
1.2 논문의 구성	2
제 2 장 이산시간 Kalman 필터와 상태 추정 성능	3
2.1 이산시간 Kalman 필터	3
2.2 선형 시불변 이산시간 시스템에 대한 Kalman 필터 알고리즘의 상태 추정성능 검증	9
제 3 장 불확실성 파라미터를 가진 이산시간 시스템	13
3.1 불확실성 파라미터를 포함한 선형 시불변 이산시간 시스템과 Kalman 필터의 구성	13
3.2 불확실성 파라미터를 포함한 선형 시불변 이산시간 시스템에 대한 Kalman 필터 알고리즘의 상대추정 성능 검증	16
제 4 장 불확실성 입력을 가진 이산시간 시스템	21
4.1 불확실성 입력이 인가되는 선형 시불변 이산시간 시스템과 Kalman 필터의 구성	21
4.2 불확실성 입력이 인가되는 선형 시불변 이산시간 시스템에 대한 Kalman 필터 알고리즘의 상태 추정성능 검증	24
제 5 장 퍼지 불확실성 추정기법이 결합된 Kalman 필터 기반의 상태 추정 알고리즘	30

5.1 불확실성 존재 및 발생여부의 판단방법	30
5.2 불확실성 추정을 위한 퍼지 불확실성 추정 알고리즘	32
5.2.1 퍼지화 알고리즘	33
5.2.2 불확실성 추정을 위한 퍼지규칙	35
5.2.3 비퍼지화 알고리즘	37
5.3 Kalman 필터 기반의 새로운 추정 알고리즘	39
제 6 장 퍼지 불확실성 추정 알고리즘이 결합된 Kalman 필터	
기반의 상태 추정 알고리즘 성능 검증	42
6.1 파라미터 불확실성을 가진 선형 시불변 이산시간 시스템의 상태 추정·	42
6.2 불확실성 입력이 인가되는 선형 시불변 이산시간 시스템의 상태 추정·	46
제 7 장 결 론	50
참고문헌	



State Estimation Algorithm with Fuzzy Estimation Technique for Linear Time Invariant Uncertain Systems

Soo Kyung Seo

*Department of Control and Instrumentation Engineering,
Graduate School, Korea Maritime University*

Abstract

In order to control a linear time-invariant stochastic system subjected to system noise and measurement noise, first of all, it is necessary to estimate the state of system with reliability. Kalman filtering technique has been widely used to estimate the state of the linear time-invariant stochastic system with stationary noise characteristics. Since Kalman gain matrix and filter error covariance matrix are computed in off-line from initial conditions and they are converged to small constant values in steady state, the computation time is not only relatively short so that a digital implementation can be possible, but also the estimation performance is very good under statistically stationary noise characteristics.

By the way, Kalman filter often fails to estimate the state of the linear time-invariant system whose parameters are partly unknown, because Kalman filter is the model-based estimation theory and thus it can not completely compensate the variation of innovation process

caused by the parameter errors. Then, the control system using the wrong estimated state by separation principle, can not naturally present a good control performance. Kalman filter also fails to estimate the state when unknown inputs are occurred. The reason is that Kalman filter with small Kalman gain in steady state can not sufficiently compensate the influence of unknown input although the innovation process has a large value.

In this paper, a new state estimation algorithm is suggested, which can estimate the state of the system with reliability regardless of the influence of uncertainties such as system parameter uncertainty and/or input uncertainty. The process for compensating the influence of uncertainties for filtered estimate by Kalman filter is composed of three steps. At first, the occurrence of uncertainties is detected by hypothesis test method with finite window length using the sum of the square values of innovation process compared to the constant threshold value. At second, as soon as uncertainties are occurred, they must be estimated as a total value in order to compensate the filtered estimate for correct state estimation with reliability. A fuzzy uncertainty estimation technique as a method is suggested in order to estimate the uncertainties. At last, the total value corresponding to the estimated uncertainty is fed back as an additional input type in Kalman filter algorithm in order to compensate the influence of uncertainties.

Several simulations are accomplished to explain all developing procedures and to verify the effectiveness of the suggested state estimation algorithm.

제 1 장 서 론

1.1 연구 배경과 연구방법

시스템 잡음과 측정 잡음이 포함되어 있는 선형 시불변 시스템(LTI System)의 제어를 위해서는 신뢰할 수 있는 추정오차 범위 내에서 시스템의 상태를 추정하여야 한다. 이런 시스템의 추정에 Kalman 필터가 널리 이용된다[1~4].

만약 시스템의 수학적 모델을 정확히 알고 있고, 시스템 잡음과 측정 잡음의 통계적 특성이 평균이 0인 백색 가우시안 잡음(White Gaussian noise)이라면, Kalman 필터의 상태 추정 능력은 상당히 훌륭하다.

하지만, 선형 시불변 시스템의 파라미터에 모델링되지 않은 불확실성이 존재한다면, Kalman 필터는 상태 추정에 실패할 것이다. Kalman 필터는 시스템 모델을 기반으로 하는 상태 추정 이론으로 시스템이 선형 시불변 특성을 가지면서 시스템 잡음과 측정 잡음의 통계적 특성이 시간에 따라 변하지 않을 경우의 상태추정에 유효한 이론이기 때문이다. 그러므로 파라미터 불확실성으로 인한 필터의 이노베이션 프로세스(Innovation process)의 값이 증가하더라도 필터 공분산의 초기값으로부터 오프라인에 의해서만 계산되는 Kalman 이득이 정상상태에서는 작은 값으로 수렴됨으로써 필터를 보상해 주는 보상량이 매우 작아 실제 시스템 상태와의 오차를 실시간으로 보상해 줄 수 없기 때문이다 [1~4, 5]. 한편, 시스템에 알려져 있지 않은 불확실성 입력이 인가된 경우에도 Kalman 필터는 상태 추정에 실패하게 된다. Kalman 필터 알고리즘에는 알려진 입력만 인가되고 모르는 입력은 인가되지 않음으로써, 이로 인하여 시스템의 실제 상태와 필터 추정치 사이의 추정오차는 커지게 된다. 이 경우에 있어서도 비록 이노베이션 프로세스의 값은 커지지만 작은 값의 Kalman 이득 때문에 필터 보상량이 매우 작아 정상상태에서 추정오차를 0으로 수렴시킬 방법이 없기 때문이다[1~4, 5].

이와 같이 선형 시불변 시스템에 파라미터 불확실성이 내포되거나 불확실성 입력이 인가됨으로 인해 정상상태에서 필터가 발산하는 문제점을 보완하기 위하여 본 논문에서는 불확실성을 추정하기 위한 연구방법으로 퍼지 추정기법

[6~15]을 제안하며, 추정된 불확실성 값이 다음 샘플링 시간에서의 입력으로 인가되어 필터 추정치를 보상해 주는 방법을 도입함으로써 시스템의 실제 상태를 실시간으로 추정할 수 있는 Kalman 필터 기반의 상태추정 알고리즘을 제안한다.

제안하는 퍼지 불확실성 추정기법이 결합된 Kalman 필터 기반의 상태 추정 알고리즘의 성능을 확인하기 위한 방법으로는 선형 시불변 이산 시스템 예제를 활용하여 다양한 시뮬레이션을 수행하고자 한다.

1.2 논문의 구성

본 논문의 제2장에서는 선형 시불변 확률 시스템의 상태 추정에 적합한 Kalman 필터 알고리즘을 전개하고 선형 시불변 이산시간 확률시스템의 예제를 대상으로 시뮬레이션을 수행함으로써 Kalman 필터의 상태 추정 성능에 대하여 고찰한다.

제3장에서는 알려져 있지 않은 파라미터 불확실성을 가진 선형 시불변 이산 확률 시스템의 상태 추정을 위하여 구성되는 Kalman 필터 알고리즘을 구성하고, 예제 시스템을 대상으로 상태 추정에 대한 시뮬레이션을 수행한 다음 그 결과를 바탕으로 Kalman 필터가 상태 추정에 실패하는 원인을 분석한다.

제4장에서는 알려져 있지 않은 입력이 인가될 경우 즉 입력의 불확실성이 존재하는 선형 시불변 이산시간 확률시스템을 대상으로 상태 추정을 위하여 Kalman 필터 알고리즘을 구성하고, 예제 시스템에 대한 시뮬레이션을 수행한 다음 그 결과를 고찰함으로써 상태 추정 실패의 원인을 분석한다.

제5장에서는 3장과 4장에서 논하는 바와 같이 시스템에 파라미터 불확실성과 입력의 불확실성이 존재할 경우, Kalman 필터의 이노베이션 프로세스를 활용하여 이들을 추정하는 퍼지 불확실성 추정 알고리즘을 제안하고, 이를 기존의 Kalman 필터 알고리즘과 결합시킨 상태 추정 알고리즘 제안한다. 제안한 알고리즘의 필터 추정 성능을 확인하기 위하여 3장과 4장에서 사용된 예제 시스템을 대상으로 다양한 시뮬레이션을 수행하며 그 결과를 고찰한다.

마지막으로 제6장에서는 본 논문을 전체적으로 평가하고 결론을 맺는다.

제 2 장 이산시간 Kalman 필터와 상태 추정 성능

본 장에서는 선형 시불변 시스템의 상태 추정에 널리 사용되는 이산시간 Kalman 필터 알고리즘의 기본구조와 특성을 알아보고, 선형 시불변 이산시간 확률 시스템 예제를 대상으로 시뮬레이션을 수행함으로써 상태 추정 성능의 타당성과 알고리즘 구성의 적합성을 검증하고자 한다.

2.1 이산시간 Kalman 필터

시스템 잡음과 측정 잡음이 포함된 시스템을 제어하기 위한 방법으로는, 먼저 신뢰성 있게 시스템의 상태를 추정한 다음 이 추정치를 선택된 제어기에서 사용하는 분리 원리(Separation principle)가 보편적으로 사용된다[3~6].

선형 시불변 시스템의 수학적 모델을 정확히 알고 있고, 인가되는 시스템 잡음과 측정 잡음의 통계적 특성이 백색 가우시안 특성을 가질 경우, Kalman 필터는 정상상태에서 시스템의 상태를 훌륭하게 추정할 수 있다.

Kalman 필터는 직전 샘플링 시간에서의 상태 추정치와 수학적 모델을 이용하여 현재 시간에서의 예측 추정치(Predicted estimate)를 계산하고, 현재 시간에서의 시스템 잡음과 측정 잡음을 포함한 실제 시스템의 측정치와 예측 측정치(Predicted measurement)와의 차이에 적절한 가중행렬(Weighting matrix)을 곱하여 계산한 보상치(Compensated estimate)를 더함으로써, 현재 시간에서의 필터 추정치(Filtered estimate)를 계산하는 알고리즘으로, 현재 로켓이나 위성, 미사일 등과 같은 제어분야에 많이 사용되고 있다[1~4].

Kalman 필터 알고리즘과 상태 추정 성능을 알아보기 위하여 다음과 같은 선형 시불변 이산시간 시스템을 고려한다.

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + Dw_{k-1} \quad (2.1)$$

$$z_k = Cx_k + v_k \quad (2.2)$$

식 (2.1)은 이산시간 상태 방정식이고, 식 (2.2)는 시스템의 이산시간 측정 방

정식이다. 식 (2.1)의 A 는 시스템행렬, B 는 입력행렬, D 는 잡음 입력행렬로서 모두 상수행렬이고, x_k 는 샘플링 시간 k 에서의 시스템 상태, u_{k-1} 은 샘플링 시간 $k-1$ 와 시간 k 사이에서는 일정하다고 가정되는 인가입력이며, 마지막으로 w_{k-1} 는 샘플링 시간 $k-1$ 와 시간 k 사이에 인가되는 시스템 잡음이다. 식 (2.2)의 C 는 측정행렬로서 상수이고, z_k 는 샘플링 시간 k 에서의 측정치, 마지막으로 v_k 는 샘플링 시간 k 에서 출력 측정 시에 포함되는 측정 잡음이다.

시스템 잡음과 측정 잡음은 식 (2.3)과 식 (2.4)와 같이 평균이 0인 백색 가우시안 분포를 가진다고 가정한다. Q, R 은 이들에 대한 자기 공분산 행렬이고 이 때 $\delta(k-j)$ 는 크로넬커 델타(Kronecker delta)이다.

$$E[w_k] = 0, \quad E[w_k w_j^T] = Q\delta(k-j) \quad (2.3)$$

$$E[v_k] = 0, \quad E[v_k v_j^T] = R\delta(k-j) \quad (2.4)$$

그림 2.1은 선형 시불변 이산시간 확률 시스템과 이의 상태를 추정하기 위한 이산시간 Kalman 필터를 나타낸 블록 다이어그램이다. 그림 2.1에서 시간 k 에서의 이산 시스템 상태 x_k 는 이전 시간 $k-1$ 에서의 이산 시스템의 상태 x_{k-1} 과 시간 $k-1$ 과 k 사이 동안 들어오는 입력 u_{k-1} , 시간 $k-1$ 과 k 사이 동안 들어오는 시스템 잡음 w_{k-1} 의 향으로 구할 수 있다.

k 시간에서의 이산 시스템의 상태 x_k 는 측정행렬 C 에 의해서 측정되고, 측정 노이즈인 v_k 가 더해져 k 시간에서의 측정치인 z_k 가 구해진다.

이때 Kalman 필터 알고리즘은 측정치 z_k 를 기반으로 k 시간에서의 이산시간 시스템의 상태를 신뢰성 있도록 추정하게 되는데 이것이 필터 추정치 \hat{x}_k 이다. 이 필터 추정치 \hat{x}_k 는 예측 추정치 $\hat{x}_k(-)$ 와 보상치 $\Delta\hat{x}_k$ 의 합으로 구해진다. Kalman 필터 알고리즘에서 예측 추정치 $\hat{x}_k(-)$ 는 이전 샘플링 시간에서 계산된 필터 추정치 \hat{x}_{k-1} 와 시간 $k-1$ 과 k 사이 동안 들어오는 입력 u_{k-1} 의

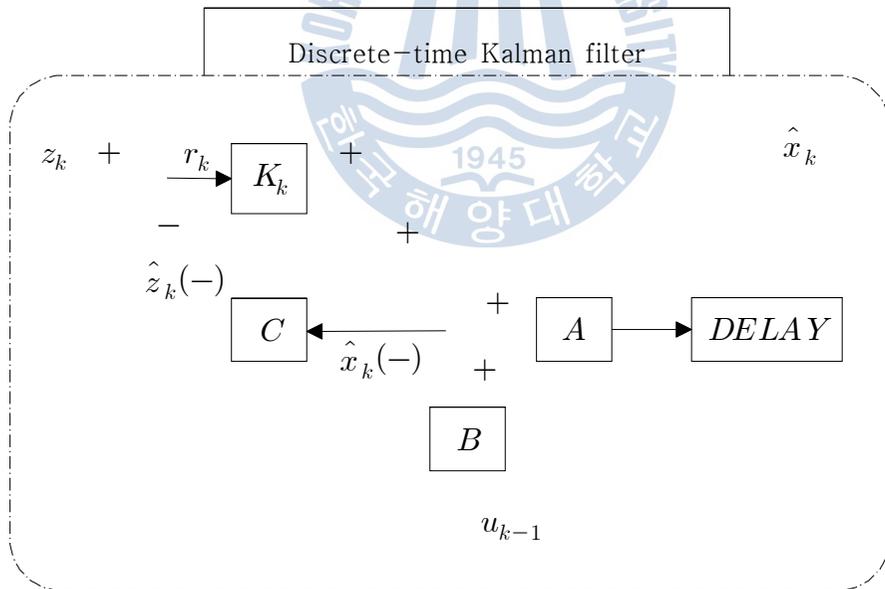
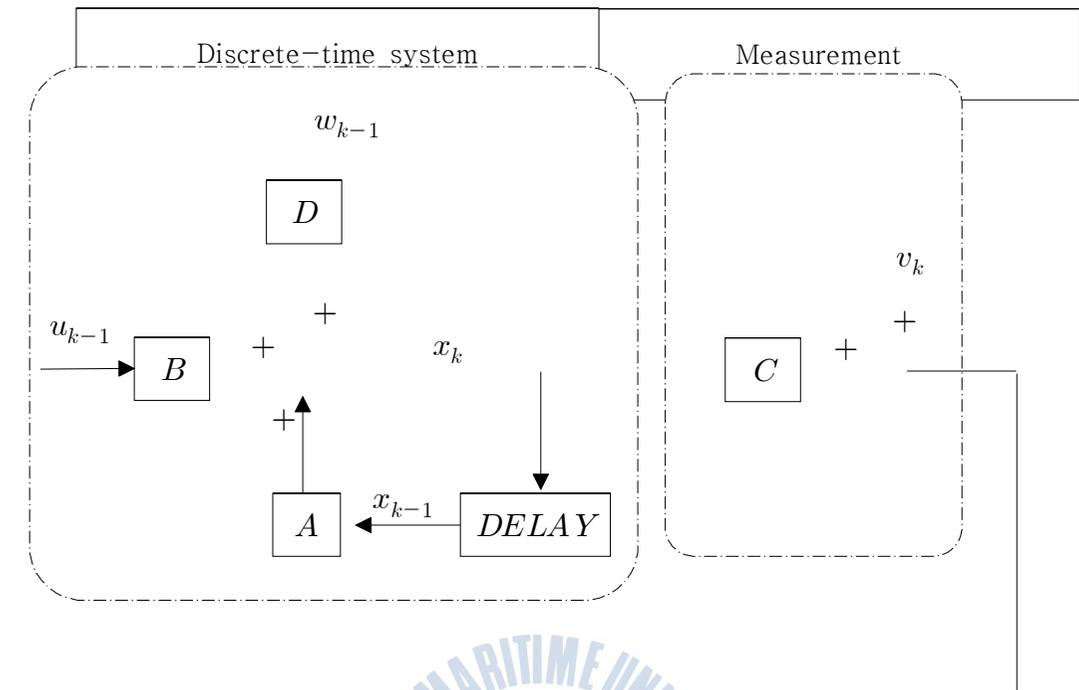


그림 2.1 이산시간 시스템과 Kalman 필터 블록 다이어그램
 Fig. 2.1 Discrete-time system and Kalman filter block diagram

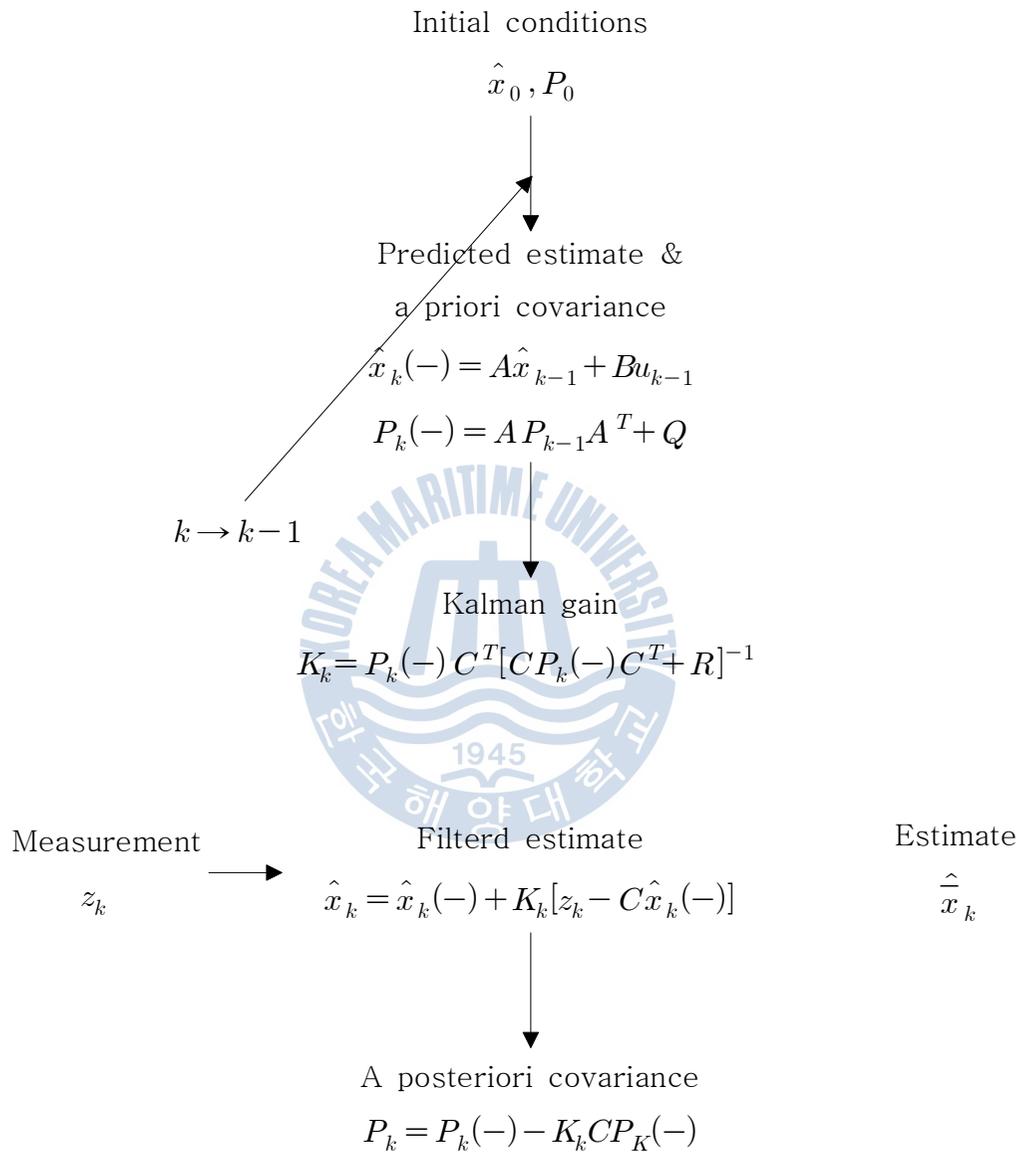


그림 2.2 Kalman 필터 알고리즘 계산 흐름선도

Fig. 2.2 Computation flowchart of Kalman filter algorithm

항으로 계산된다. 보상치 $\Delta \hat{x}_k$ 는 k 시간에 측정된 측정치 z_k 와 예측 측정치인 $\hat{z}_k(-)$ 의 차에 가중 행렬 K_k 를 곱함으로써 계산된다. 측정치 z_k 와 예측 측정치 $\hat{z}_k(-)$ 의 차를 이노베이션 프로세스(Innovation process) r_k 라 부른다.

k 시간에서의 필터 추정치 \hat{x}_k 를 구하는 Kalman 필터 알고리즘의 계산 흐름선도(Flowchart)를 나타내면 그림 2.2와 같다.

초기시간에서 주어지는 필터 공분산과 필터 추정치의 초기값을 P_0, \hat{x}_0 로 정의하면 순환 알고리즘(Recursive algorithm)에 따라 현재의 샘플링 시간 k 에서의 예측추정치 $\hat{x}_k(-)$ 와 예측 공분산 $P_k(-)$ 는 식 (2.5)에 의해서 계산된다.

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(-) &= A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \\ P_k(-) &= AP_{k-1}A^T + Q\end{aligned}\quad (2.5)$$

다음 단계에서는 식 (2.6)에 의해서 현재시간 k 에서의 가중 행렬인 Kalman 이득 K_k 를 계산한다.

$$K_k = P_k(-)C^T[CP_k(-)C^T + R]^{-1}\quad (2.6)$$

필터 추정치 \hat{x}_k 는 예측추정치 $\hat{x}_k(-)$ 에 필터 보상치 $\Delta \hat{x}_k$ 를 더함으로써 식 (2.7)과 같이 계산된다.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k(-) + \Delta \hat{x}_k\quad (2.7)$$

여기서 식 (2.7)의 필터 보상치 $\Delta \hat{x}_k$ 는 가중행렬인 Kalman 이득 K_k 에 이노베이션 프로세스 r_k 를 곱함으로써 식 (2.8)과 같이 계산된다. 즉,

$$\Delta \hat{x}_k = K_k r_k = K_k [z_k - \hat{z}_k(-)] = K_k [z_k - C \hat{x}_k(-)] \quad (2.8)$$

마지막으로 다음 샘플링 시간에서의 예측 공분산 $P_{k+1}(-)$ 를 구하기 위하여 식 (2.9)와 같이 필터 공분산 P_k 를 계산한다.

$$P_k = P_k(-) - K_k C P_k(-) \quad (2.9)$$

이제까지 전개한 Kalman 필터의 알고리즘 중에서 필터 보상치를 계산할 때 이노베이션 프로세스 r_k 를 가중시켜 주는 행렬인 Kalman 이득 K_k 를 계산하는 과정을 주의 깊게 살펴 볼 필요가 있다. K_k 를 계산하기 위하여 예측공분산 $P_k(-)$ 와 필터공분산 P_k 를 반복적으로 계산함을 알 수 있는데, 이들은 초기시간에서 정의된 필터공분산 P_0 로부터 오프라인으로 계산됨을 알 수 있다. 따라서 공분산 행렬들과 Kalman 이득은 정상상태에서 0에 가까운 아주 작은 일정한 값으로 수렴되는 특징을 가지고 있다. 이러한 특징은 Kalman 필터 알고리즘 자체가 발산하지 않고 안정된 수렴 특성을 갖도록 하는 장점을 가지고 있는 반면, 현재시간 k 에서 시스템 내외부의 변화요인으로 인해 이노베이션 프로세스 r_k 에 큰 변화가 발생할 경우에는 가중행렬 Kalman 이득이 곱해져 보상되는 필터 보상치 $\Delta \hat{x}_k = K_k r_k$ 를 실시간으로 키워 주는 데는 한계를 가짐으로써 상태 추정에 실패하는 단점을 지니고 있다.

결론적으로 Kalman 필터는 시스템의 특성이 선형 시불변이고 시스템 잡음과 센서잡음의 통계적 특성도 시불변일 때, 잡음들로 인해 현재시간 k 에서 발생한 이노베이션 프로세스 r_k 의 기대치도 0이 되어 실시간 보상이 가능한 경우에 한정되어 실제의 상태를 추정하는데 널리 사용되고 있다.

2.2 선형 시불변 이산시간 시스템에 대한 Kalman 필터 알고리즘의 상태 추정성능 검증

2.1절에서 전개한 Kalman 필터 알고리즘의 성능을 알아보기 위하여 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \\ w_{k-1} &\sim N(0, 0.05^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

식 (2.10)으로 주어지는 시스템은 선형 시불변 이산시간 시스템의 상태방정식이다. 시스템 잡음인 w_{k-1} 은 분산이 0.05^2 인 백색 가우시안 잡음이다.

$$\begin{aligned} z_k &= [1 \quad 0] x_k + v_k \\ v_k &\sim N(0, 0.05^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

식 (2.11)은 이산시간 시스템의 출력 방정식이다. 측정 잡음인 v_k 는 평균이 0이고 분산이 0.05^2 인 백색 가우시안 잡음이라 가정한다.

그림 2.3은 식 (2.10)과 식 (2.11)로 모델링된 선형 시불변 이산시간 시스템에 입력 u_{k-1} 로 단위 스텝을 인가하였을 경우의 측정치와 필터 추정치에 대한 시뮬레이션 결과이다. 그림 2.3의 첫 번째 그림에서 붉은색 선은 시스템 잡음을 포함하고 있는 시스템의 상태, 즉 실제 시스템의 상태 x_k 이다. 그리고 노란색 선은 시스템의 실제 상태 x_k 를 측정방정식에 의해 측정한 z_k 이다. 측정잡음 v_k 가 추가되어 측정된 것을 볼 수 있다. 그림 2.3의 두 번째 그림의 붉은색 선은 실제 시스템의 상태 x_k 이고 검정색 선은 Kalman 필터에 의해 실제의 상태를 추정한 필터 추정치를 나타낸 것이다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 주어진 시스템이 선형 시불변이고 잡음들의 통계적 특성이 시불변인 경우이므로

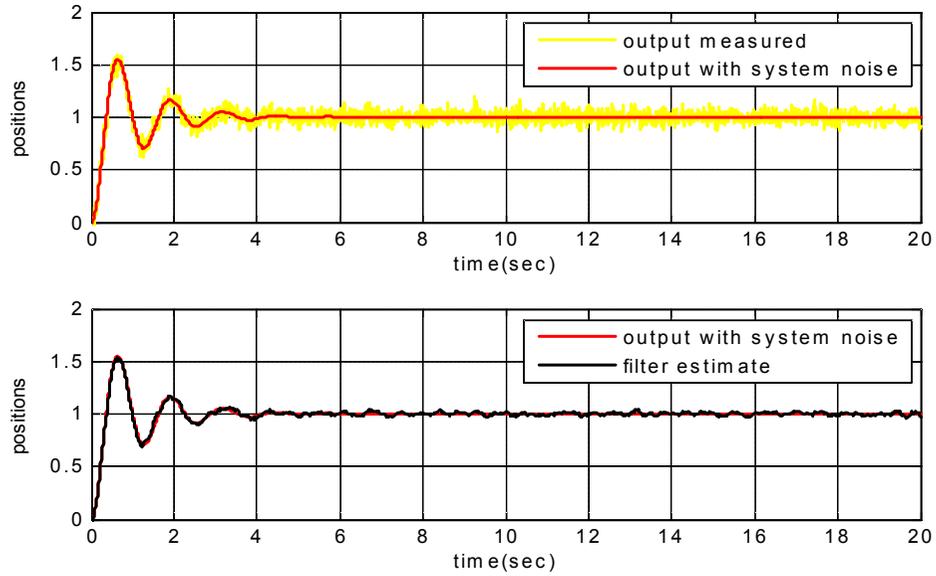


그림 2.3 시스템의 실제 출력과 Kalman 필터에 의한 출력 추정치
 Fig. 2.3 System real output and output estimate by Kalman filter

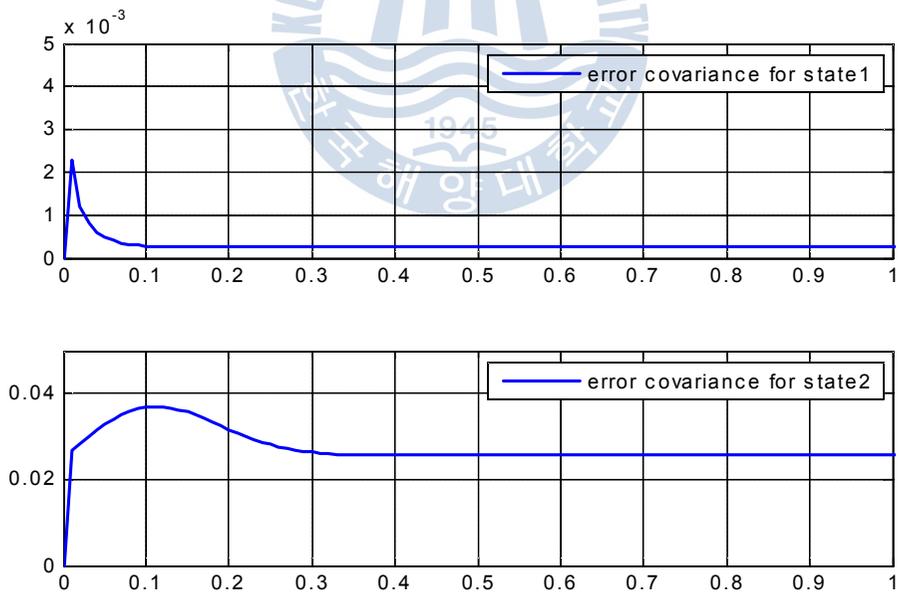


그림 2.4 Kalman 필터 오차 공분산의 시뮬레이션 결과
 Fig. 2.4 Simulation result of Kalman filter error covariance

Kalman 필터의 필터 추정치는 정상상태에서 실제의 상태를 잘 추정하고 있음을 볼 수 있다.

그림 2.4는 필터의 오차 공분산 P_k 에 대한 시뮬레이션 결과를 나타낸 것인데, 변화과정을 상세히 보기 위하여 시간축을 1초까지만 표시한 것이다. 필터 오차 공분산의 수학적 정의는 식 (2.12)와 같이 실제 상태와 필터 추정치 사이의 오차에 대한 공분산을 나타내지만, Kalman 필터 알고리즘 상에서는 실제 상태와 필터 추정치 사이의 오차에 상관없이 초기시간에 정의된 초기치 P_0 로부터 오프라인으로 계산됨으로써 정상상태에서는 매우 작은 값에 수렴함을 볼 수 있다.

$$P_k = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \quad (2.12)$$

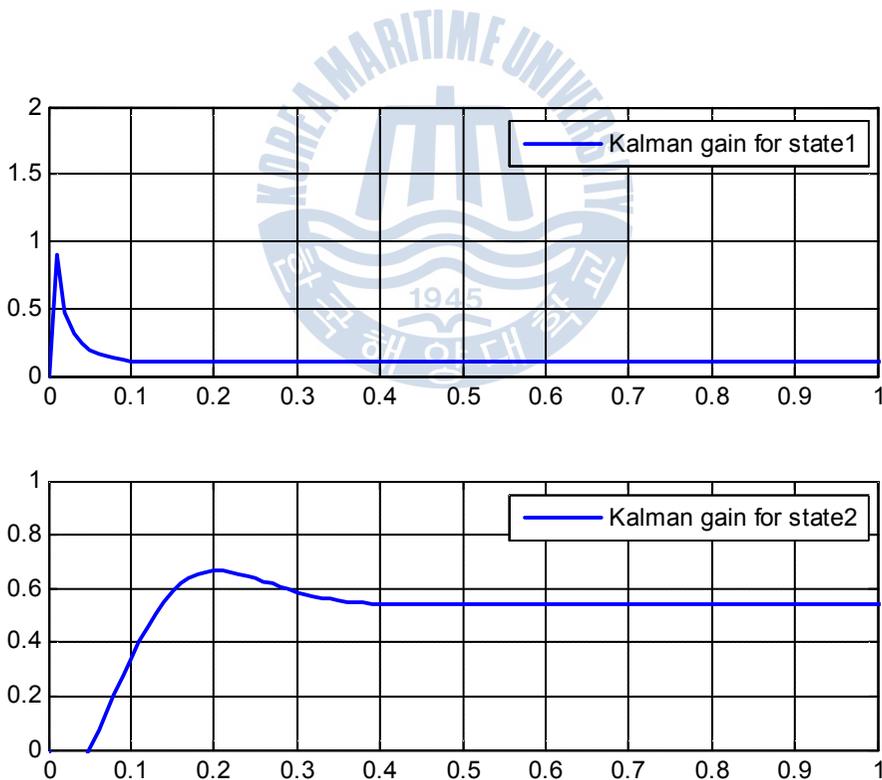


그림 2.5 Kalman 이득에 대한 시뮬레이션 결과
Fig. 2.5 Simulation result for Kalman Gain

그림 2.5는 필터의 오차 공분산을 토대로 필터 보상치를 계산하는데 사용되는 가중행렬인 Kalman 이득의 시뮬레이션 결과를 나타낸 것이다. 오차 공분산이 정상상태에서 일정한 값으로 수렴함에 따라 오차 공분산을 기초로 계산되는 Kalman 이득도 정상상태에서 작은 값을 가진 이득으로 수렴함을 볼 수 있다.

그림 2.6은 정상상태에 있어서 필터 보상치를 구하는데 사용되는 이노베이션 프로세스를 나타낸 시뮬레이션 결과이다. 0을 중심으로 분포되어 있는 것을 볼 때 확률적 기대치가 거의 0이 됨을 확인할 수 있다.

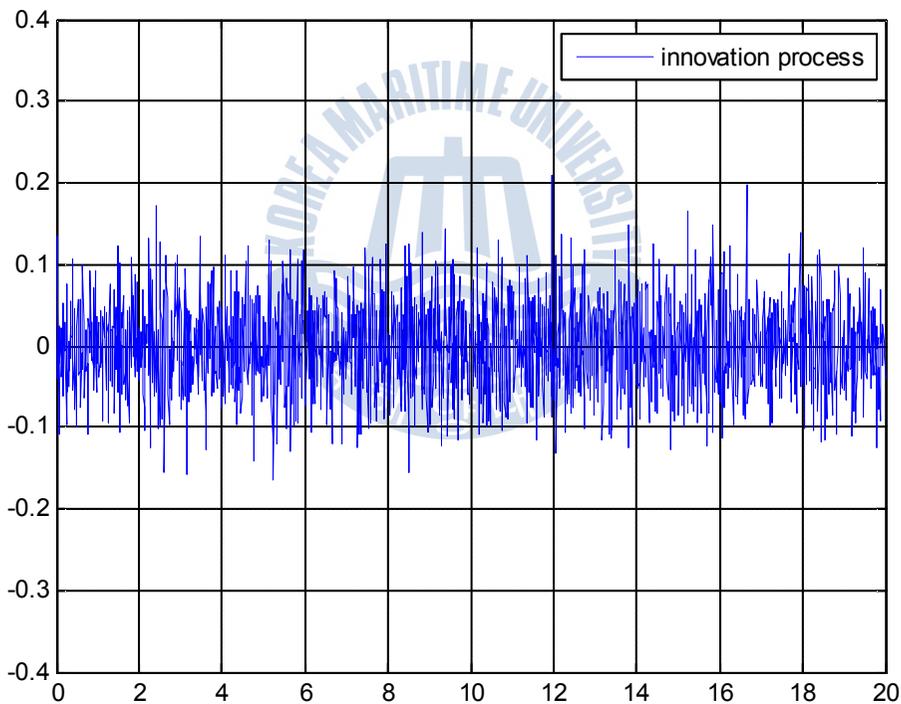


그림 2.6 이노베이션 프로세스에 대한 시뮬레이션 결과
 Fig. 2.6 Simulation result for innovation process

제 3 장 불확실성 파라미터를 가진 이산시간 시스템

이 장에서는 선형 시불변 이산시간 시스템의 파라미터에 불확실성이 존재할 경우에 시스템과 Kalman 필터 알고리즘의 구성에 대하여 논하고, 예제 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행하고 그 결과를 고찰함으로써 Kalman 필터 알고리즘이 실제 상태를 제대로 추정하는지 여부에 대하여 평가하고자 한다.

3.1 불확실성 파라미터를 포함한 선형 시불변 이산시간 시스템과 Kalman 필터의 구성

시스템 행렬에 알 수 없는 파라미터 불확실성 Δ 를 포함한 실제의 선형 시불변 이산시간 확률 시스템의 상태공간 방정식은 식 (3.1)과 같다.

$$\begin{aligned}x_k &= (A + \Delta)x_{k-1} + Bu_{k-1} + Dw_{k-1} \\z_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\quad (3.1)$$

한편, 파라미터 불확실성은 알지 못하는 것이고 수학적으로 모델링될 수 없으므로 알 수 있는 정보만을 가지고 모델링된 공칭 이산시간 시스템의 상태공간 방정식은 식 (3.2)와 같다.

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= A\bar{x}_{k-1} + Bu_{k-1} + Dw_{k-1} \\z_k &= C\bar{x}_k + v_k\end{aligned}\quad (3.2)$$

여기서 \bar{x}_k 는 불확실성을 포함하지 않은 공칭 시스템의 상태변수이고 z_k 는 공칭 출력을 나타낸 것이다. 식 (3.1)과 식 (3.2)를 비교해 보면, 모델링 가능한 이산시간 시스템의 시스템 행렬은 A 이지만 실제 이산시간 시스템의 시스템 행렬은 불확실성 파라미터 행렬 Δ 를 포함한 $A + \Delta$ 로 묘사되었음을 확인할

수 있다.

한편, 공칭시스템의 상태와 파라미터 불확실성을 포함하는 실제 시스템 상태와의 관계를 확인하기 위하여 식 (3.1)로 주어진 실제의 상태공간 방정식을 다시 표현하면 식 (3.3)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_k &= A(\bar{x}_{k-1} + \tilde{x}_{k-1}) + Bu_k + Dw_{k-1} \\
 \tilde{x}_k &= \Delta(\bar{x}_{k-1} + \tilde{x}_{k-1}) \\
 x_k &= \bar{x}_k + \tilde{x}_k \\
 z_k &= Cx_k + v_k
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

여기서 \tilde{x}_k 는 파라미터 불확실성으로 인해 발생하는 실제 시스템의 상태와 공칭시스템 상태와의 오차를 나타낸 것이다. 또한 실제시스템의 출력과 공칭 시스템의 출력 사이의 관계는 식 (3.4)로 묘사된다.

$$\begin{aligned}
 z_k &= C(A + \Delta)(\bar{x}_{k-1} + \tilde{x}_{k-1}) + CBu_{k-1} \\
 &\quad + CDw_{k-1} + v_k \\
 &= CA\bar{x}_{k-1} + CBu_{k-1} + CDw_{k-1} \\
 &\quad + C\Delta\bar{x}_{k-1} + C(A + \Delta)\tilde{x}_{k-1} \\
 &= \bar{z}_k + \tilde{z}_k
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

여기서 \tilde{z}_k 는 실제 시스템의 출력 z_k 와 공칭시스템의 출력 \bar{z}_k 사이의 출력오차이다. 결과적으로 실제 시스템의 출력에는 공칭시스템의 출력에 파라미터 불확실성으로 인한 출력 부분이 더해져서 나타나게 된다.

그림 3.1은 이산시간 시스템의 시스템 행렬에 알 수 없는 파라미터 불확실성 Δ 가 존재한다고 가정할 경우의 이산시간 시스템과 Kalman 필터 알고리즘의 구성을 나타낸 블록선도이다. 이 때 Kalman 필터 알고리즘은 수학적으로 모델링된 공칭 시스템만을 기반으로 하여 구성되며 결과적으로는 식 (3.5)와 같다. Kalman 필터는 공칭모델에 대해서 예측 추정치와 필터 추정치를 추정하는 반면 측정치는 실제의 출력 z_k 가 사용된다.

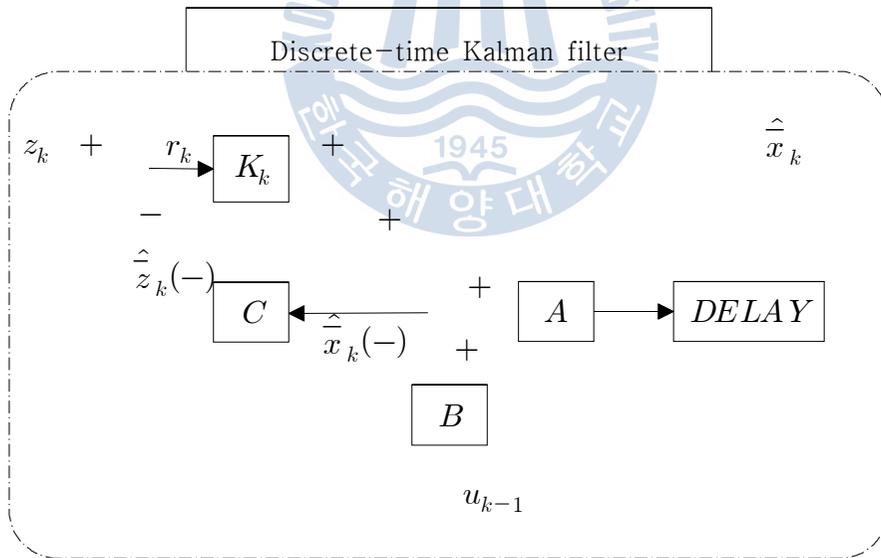
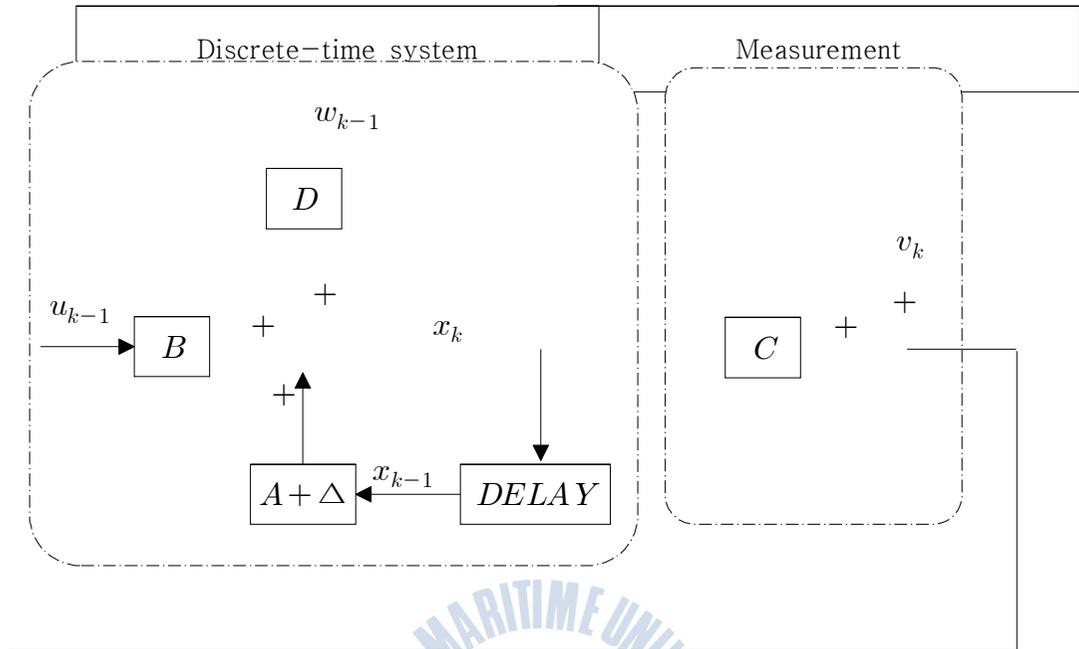


그림 3.1 파라미터 불확실성 이산시간 시스템과 Kalman 필터
 Fig. 3.1 Parameter uncertain discrete-time system and Kalman filter

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k(-) &= A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \\
P_k(-) &= AP_{k-1}A^T + DQ_{k-1}D^T \\
K_k &= P_k(-)C^T[CP_k(-)C^T + R_k]^{-1} \\
\hat{x}_k &= \hat{x}_k(-) + K_k[z_k - C\hat{x}_k(-)] \\
P_k &= [I - K_kC]P_k(-)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2 불확실성 파라미터를 포함한 선형 시불변 이산시간 시스템에 대한 Kalman 필터 알고리즘의 상태 추정성능 검증

불확실성 파라미터를 가진 이산시간 시스템에 대한 Kalman 필터의 상태 추정 성능을 평가하기 위하여 다음과 같은 이산시간 시스템을 고려한다.

수학적으로 모델링된 이산시간 시스템의 상태방정식과 시스템 잡음의 특성은 식 (3.6)과 같다고 가정한다.

$$\begin{aligned}
\bar{x}_k &= \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix} \bar{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \\
w_{k-1} &\sim N(0, 0.05^2)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

이산시간 시스템의 출력방정식과 측정잡음의 특성은 식 (3.7)과 같다.

$$\begin{aligned}
\bar{z}_k &= [1 \quad 0] \bar{x}_k + v_k \\
v_k &\sim N(0, 0.05^2)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

한편, 파라미터 불확실성을 포함한 실제 이산시간 시스템은 식 (3.8)과 같다고 가정한다.

$$\begin{aligned}
x_k &= (A + \Delta)x_{k-1} + Bu_{k-1} + Dw_{k-1} \\
z_k &= [1 \ 0]x_k + v_k \\
w_{k-1} &\sim N(0, 0.05^2), \quad v_k \sim N(0, 0.05^2)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

이때 모델링된 공칭 이산시간 시스템의 시스템 행렬 A 는 $\begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix}$

이고 포함된 파라미터 불확실성 행렬 Δ 는 $\begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}$ 이라 가정한다. 따라서 실제 시스템의 수학 모델은 식 (3.9)와 같다.

$$\begin{aligned}
x_k &= \begin{bmatrix} 0.8992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 1.0096 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \\
A + \Delta &= \begin{bmatrix} 0.8992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 1.0096 \end{bmatrix}, \\
A &= \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} -0.1000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0300 \end{bmatrix} \\
w_{k-1} &\sim N(0, 0.05^2), \quad v_k \sim N(0, 0.05^2)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

그림 3.2는 모델링된 공칭 시스템의 응답과 시스템에 파라미터 불확실성이 존재할 경우 단위 스텝 입력에 대한 실제 시스템의 응답이다. 첫 번째 그림에서 파란색 선은 공칭 시스템의 출력을 나타내고 빨간색 선은 실제 시스템의 상태를 나타낸다. 노란색 선은 실제 시스템의 상태에 측정 잡음이 더해져 측정된 실제 시스템의 출력이다. 공칭시스템의 출력과 실제 시스템의 출력을 비교해 보면, 시스템 파라미터의 작은 불확실성으로 인해 그림에서 보는 바와 같이 과도응답의 형태와 정상상태 수렴 값이 완전히 달라짐을 알 수 있다. 그 이유는 파라미터 불확실성으로 인한 식 (3.4)의 출력오차 \tilde{z}_k 의 영향 때문이다. 그림 3.2의 두 번째 그림은 불확실성 파라미터가 존재하는 시스템의 실제 상태와 Kalman 필터에 의해 추정된 필터 추정치를 비교한 그림이다. 실제의 출력 z_k 를 사용함으로써 실제출력 z_k 와 예측 출력 $\hat{z}_k(-)$ 의 차이인 이노베이션 프로세스는

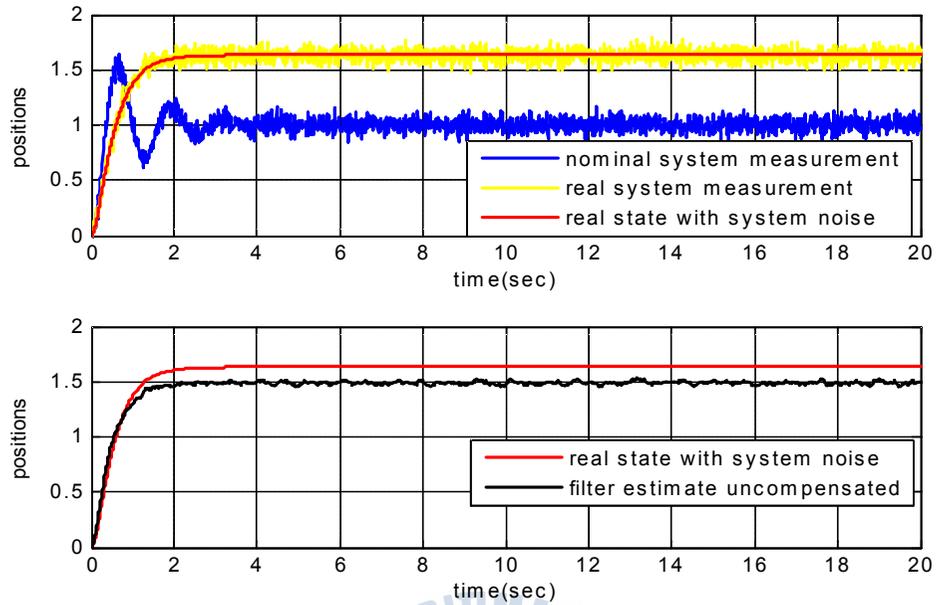


그림 3.2 파라미터 불확실성 시스템의 응답과 Kalman 필터의 상태 추정 결과
 Fig. 3.2 Response of parameter uncertain system and state estimation result of Kalman Filter

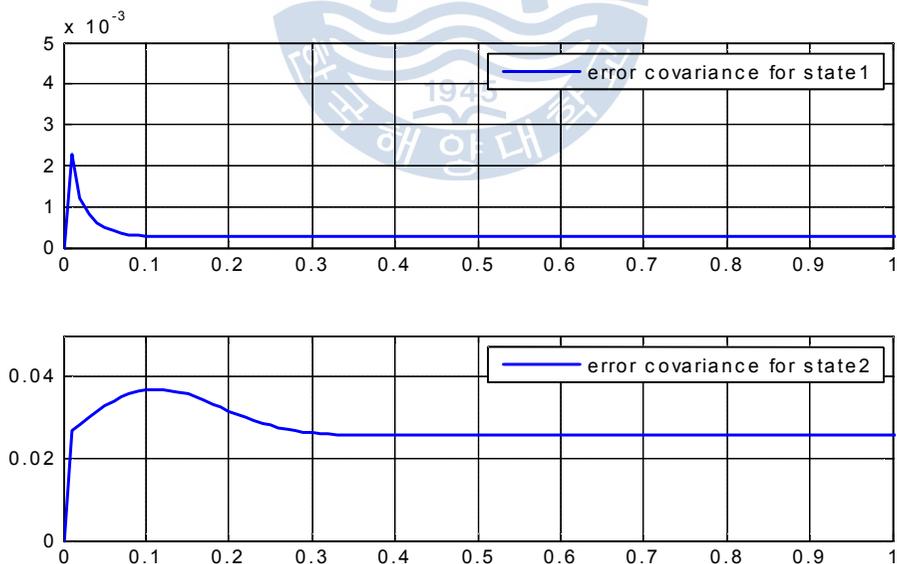


그림 3.3 파라미터 불확실성 시스템에 대한 오차 공분산의 시뮬레이션 결과
 Fig. 3.3 Simulation result of error covariance for parameter uncertain system

커짐에도 불구하고, 보상치가 실시간으로 제 때 계산되지 못한 결과 큰 정상 상태 추정오차를 표출함을 볼 수 있다. 그 이유는 그림 3.3에 나타난 필터 오차 공분산의 시뮬레이션 결과와 그림 3.4에 나타난 Kalman 이득의 시뮬레이션 결과를 고찰함으로써 알 수 있다. 즉 오차 공분산은 초기시간에서 정의된 초기 행렬 P_0 로부터 Kalman 필터 알고리즘에 의해 오프라인에서 일방적으로 계산되기 때문에 정상상태에서 매우 작은 일정한 값으로 수렴되고, 이를 바탕으로 계산되는 Kalman 이득도 정상상태에서 매우 작은 값으로 수렴된다. 따라서 온라인에서 이노베이션 프로세스의 값이 파라미터의 불확실성으로 인해 그림 3.5와 같이 매우 커지더라도, 정상상태에서 작은 값으로 수렴된 Kalman 이득과의 곱에 의해 보상되는 필터의 보상치가 그다지 크지 않게 됨으로써 필터 추정치는 실제의 시스템 상태를 제대로 추정하지 못하게 되는 것이다.

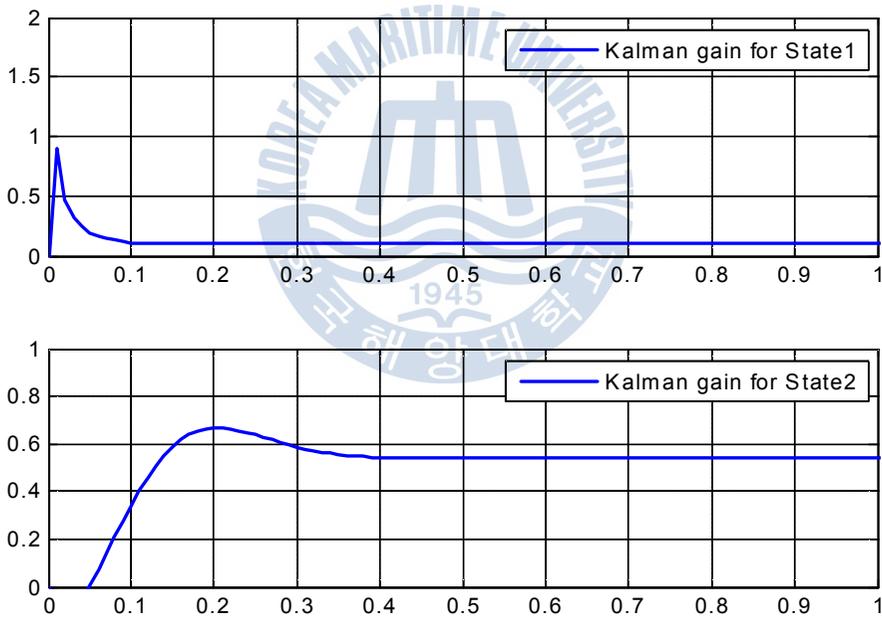


그림 3.4 파라미터 불확실성 시스템에 대한 Kalman 이득의 시뮬레이션 결과
 Fig 3.4 Simulation result of Kalman gain for parameter uncertain system

한편, 그림 3.5에서 보는 바와 같이 파라미터 불확실성 시스템에 대한 Kalman 필터의 이노베이션 프로세스는, 파라미터 불확실성이 없는 시스템에

대한 정상상태 Kalman 필터의 이노베이션 프로세스에 파라미터 불확실성으로 인한 출력오차 \tilde{z}_k 가 더해진 형태로 표출됨을 알 수 있고, 결과적으로 이노베이션 프로세스의 통계적 평균 즉 기대치도 0이 되지 않음을 확인할 수 있다.

결론적으로 파라미터에 불확실성이 포함된 선형 시불변 이산시간 시스템에 대한 상태추정 문제에 있어서 Kalman 필터는 실제 시스템의 상태를 제대로 추정하지 못하고 발산하게 됨으로써 상태 추정에 실패하고 만다. 따라서 파라미터 불확실성으로 인해 발생하는 이노베이션 프로세스의 큰 변화량을 적절히 활용하여 필터의 보상치를 실시간으로 키워 줄 수 있는 새로운 방법이 도입되어야 함을 알 수 있다.

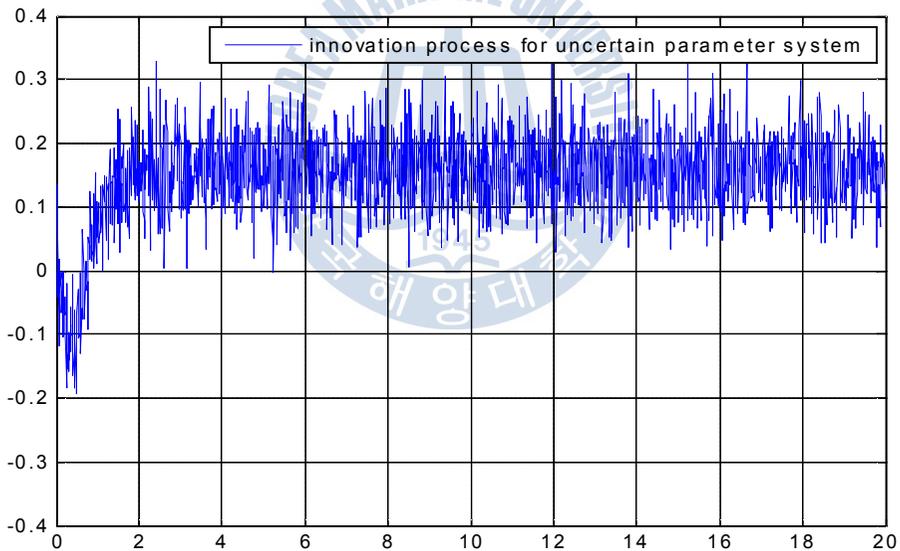


그림 3.5 파라미터 불확실성 시스템에 대한 이노베이션 프로세스 시뮬레이션 결과
 Fig 3.5 Simulation result of innovation process for parameter uncertain system

제 4 장 불확실성 입력을 가진 이산시간 시스템

이 장에서는 선형 시불변 이산시간 시스템을 대상으로 불확실성 입력이 인가될 경우에 시스템과 Kalman 필터 알고리즘의 구성에 대하여 논한 다음, 예제 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행하고 그 결과를 고찰함으로써 Kalman 필터 알고리즘이 실제 상태를 제대로 추정하는지 여부에 대하여 평가하고자 한다.

4.1 불확실성 입력이 인가되는 선형 시불변 이산시간 시스템과 Kalman 필터의 구성

그림 4.1은 알려진 입력 u_{k-1} 에 알려지지 않은 불확실성 입력 U_{k-1} 이 인가된 이산시간 시스템과 Kalman 필터 알고리즘을 나타낸 블록선도이다.

수학적으로 모델링된 이산시간 시스템에 알려진 입력 u_{k-1} 만이 인가될 경우 시스템의 상태공간 방정식은 식 (4.1)과 같다.

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= A\bar{x}_{k-1} + Bu_{k-1} + Dw_{k-1} \\ \bar{z}_k &= C\bar{x}_k + v_k\end{aligned}\quad (4.1)$$

이때, 불확실성 입력 U_{k-1} 이 이산시간 시스템에 추가로 인가된다면, 상태공간 방정식은 식 (4.2)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}x_k &= Ax_{k-1} + B(u_{k-1} + U_{k-1}) + Dw_{k-1} \\ z_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\quad (4.2)$$

불확실성 입력이 없는 경우와 있는 경우의 상태변수 사이의 관계는 식 (4.3)으로 정리되고, 두 경우에 있어서 출력 사이의 관계는 식 (4.4)와 같이 정리될 수 있다. 여기서 \tilde{z}_k 는 불확실성 입력 U_{k-1} 로 인해 출력되는 두 경우 사이의 출력

오차이다.

$$\begin{aligned}
 x_k &= Ax_{k-1} + B(u_{k-1} + U_{k-1}) + Dw_{k-1} & (4.3) \\
 &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + Dw_{k-1} + BU_{k-1} \\
 &= \bar{x}_k + BU_{k-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_k &= C\bar{x}_k + CB U_{k-1} + v_k & (4.4) \\
 &= C\bar{x}_k + v_k + CB U_{k-1} \\
 &= \bar{z}_k + \tilde{z}_k
 \end{aligned}$$

한편, Kalman 필터 알고리즘은 모델링된 수학적모델과 알려진 입력 u_{k-1} 만을 활용하여 구성되고 불확실성 입력 U_{k-1} 은 알려져 있지 않음으로 Kalman 필터에서 활용될 수 없기 때문에, 불확실성 입력을 가진 선형 시불변 이산시간 시스템의 상태 추정을 위한 Kalman 필터 알고리즘은 식 (4.5)와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_k(-) &= A\hat{x}_{k-1}(+) + Bu_{k-1} & (4.5) \\
 P_k(-) &= AP_{k-1}(+)A^T + DQ_{k-1}D^T \\
 K_k &= P_k(-)C^T[CP_k(-)C^T + R_k]^{-1} \\
 \hat{x}_k(+) &= \hat{x}_k(-) + K_k[z_k - C\hat{x}_k(-)] \\
 P_k(+) &= [I - K_kC]P_k(-)
 \end{aligned}$$

식 (4.5)에서 현재의 샘플링 시간 k 에서의 출력은 z_k 가 사용됨에 주의하여야 한다. 불확실성 입력이 Kalman 필터 알고리즘으로 피드백 되지 않음으로 인해 실제의 측정치인 출력 z_k 와 예측 측정치 $\hat{z}_k(-)$ 사이에는 출력오차 \tilde{z}_k 로 인한 오차만큼 차이가 날 것을 예상할 수 있고 이로 인해 Kalman 필터의 필터 추정치 \hat{x}_k 는 시스템의 실제 상태 x_k 를 제 때 실시간으로 추정하지 못할 것임을 예측할 수 있다. 이와 같은 문제를 확인하기 위하여 선형 시불변 이산시간 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행하고 그 결과를 고찰하고자 한다.

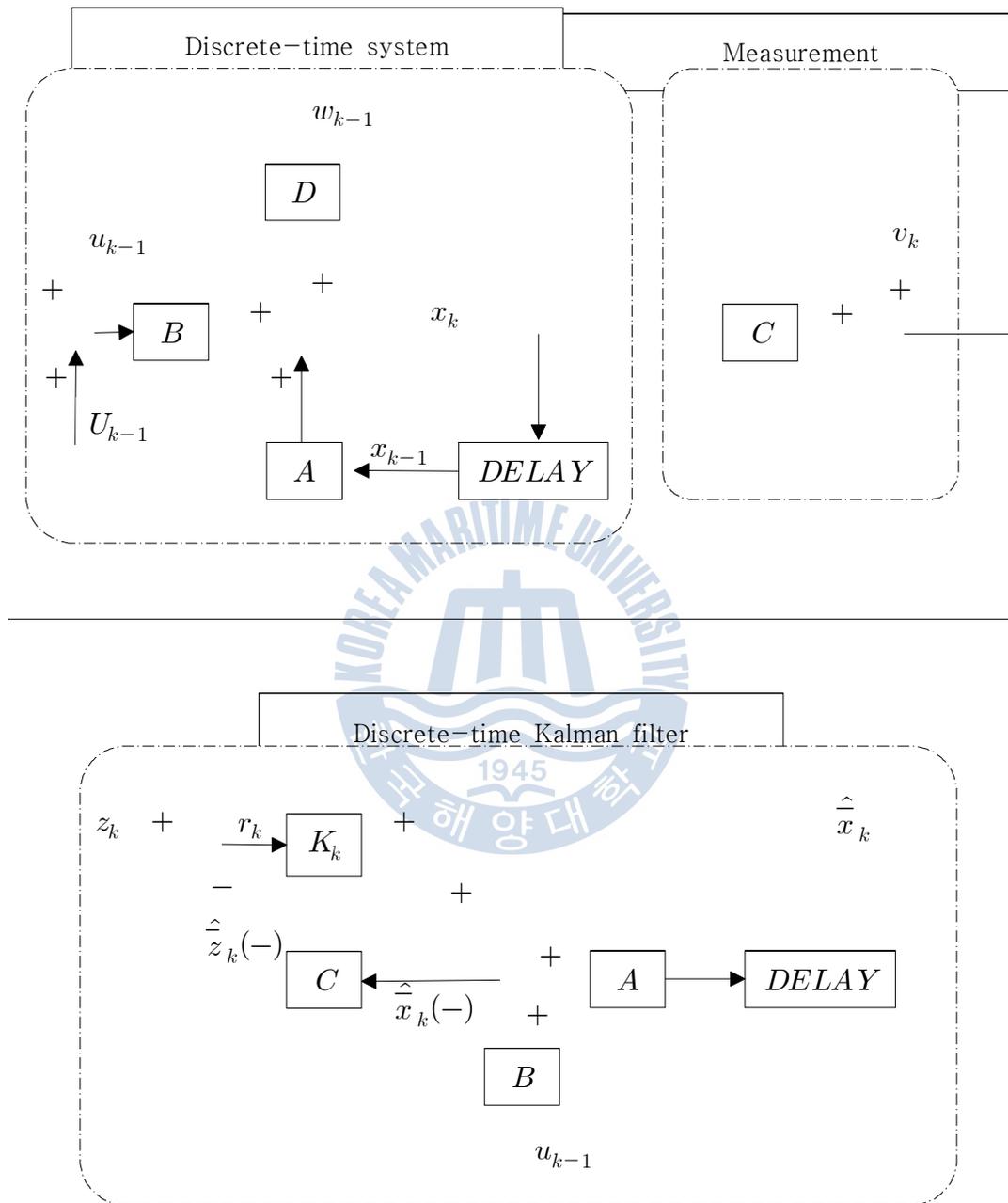


그림 4.1 불확실성 입력을 가진 이산시간 시스템과 Kalman 필터 블록선도
 Fig. 4.1 Discrete-time system with uncertain input and Kalman filter block diagram

4.2 불확실성 입력이 인가되는 선형 시불변 이산시간 시스템에 대한 Kalman 필터 알고리즘의 상태 추정성능 검증

불확실성 입력을 가진 이산시간 시스템에서의 Kalman 필터의 상태 추정 성능을 알아보기 위하여 식 (4.6)과 같은 이산시간 시스템을 고려한다.

$$x_k = \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \quad (4.6)$$

$$w_{k-1} \sim N(0, 0.05^2)$$

이때 출력방정식은 식 (4.7)과 같다.

$$z_k = [1 \ 0]x_k + v_k \quad (4.7)$$

$$v_k \sim N(0, 0.05^2)$$

불확실성 입력이 인가되는 이산시간 시스템의 상태공간 방정식은 식 (4.8)과 같다.

$$x_k = \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} (u_{k-1} + U_{k-1}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \quad (4.8)$$

$$z_k = [1 \ 0]x_k + v_k$$

$$w_{k-1} \sim N(0, 0.05^2), \quad v_k \sim N(0, 0.05^2)$$

입력 변화에 따른 Kalman 필터의 성능을 알아보기 위하여 알려진 입력 u_{k-1} 은 단위스텝으로 인가하였고, 알려지지 않은 불확실성 입력 U_{k-1} 은 시간에 따라 식 (4.9)와 같이 인가하였다.

$$U_{k-1} = 0, \quad 0 \leq t \leq 7 \quad (4.9)$$

$$U_{k-1} = -1, \quad 7 < t \leq 14$$

$$U_{k-1} = -0.7, \quad 14 < t$$

불확실성 입력에 대한 Kalman 필터 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 불확실성 입력 U_{k-1} 이 알려져 있다고 가정할 경우와 알려지지 않았다고 가정할 경우로 나누어 시뮬레이션을 수행하였다.

그림 4.2는 시스템의 수학 모델과 인가되는 입력을 모두 알고 있다고 가정할 경우의 시스템 출력과 필터 추정치의 시뮬레이션 결과이다.

그림 4.2의 첫 번째 그림에서 빨간색 선은 시스템 잡음을 포함한 실제 시스템의 상태 x_k 의 출력부분이다. 노란색 선은 측정 잡음 v_k 가 추가되면서 시스템의 상태 x_k 를 측정한 실제 시스템의 출력 z_k 이다. 두 번째 그림은 실제 시스템의 상태 x_k 의 출력부분과 Kalman 필터 알고리즘으로부터 추정된 필터 추

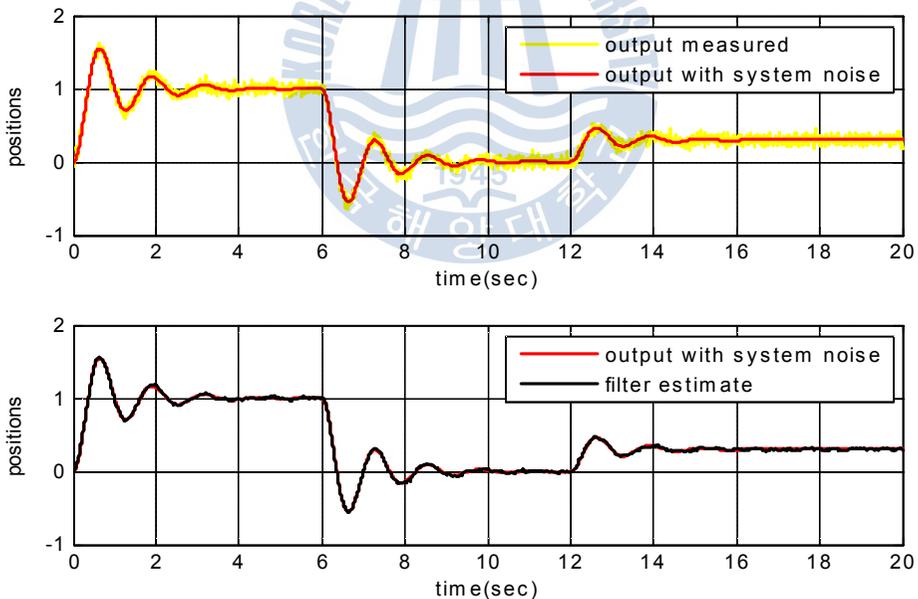


그림 4.2 입력을 알고 있을 때 시스템의 응답과 Kalman 필터 추정치
 Fig. 4.2 System response and filtered estimate of Kalman Filter
 when all inputs are known

정치 \hat{x}_k 의 출력부분을 비교한 것이다.

그림 4.2에서 보는 바와 같이 입력이 변하더라도 정확히 알려져 있다면, Kalman 필터의 알고리즘에도 반영됨으로써 실제 시스템의 상태를 좋은 성능을 가지고 잘 추정함을 볼 수 있다.

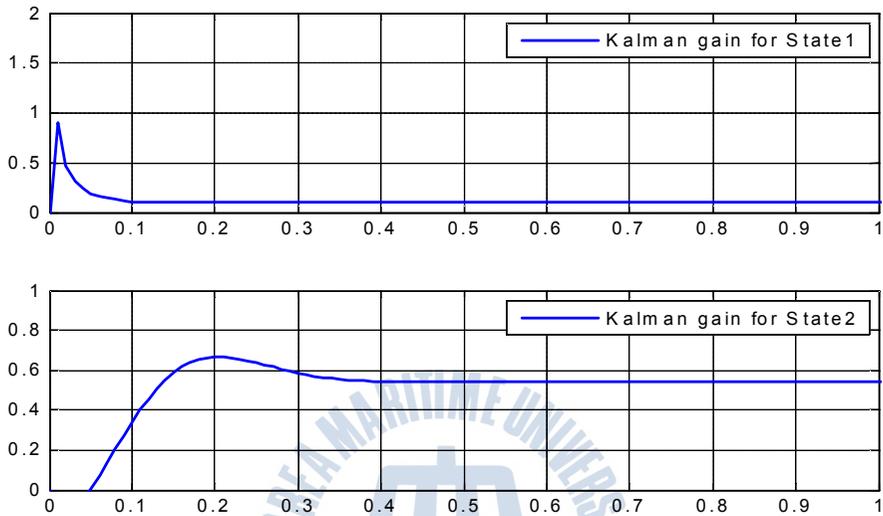


그림 4.3 모든 입력을 알고 있을 때 Kalman 이득의 시뮬레이션 결과
Fig. 4.3 Simulation result of Kalman gain when all inputs are known

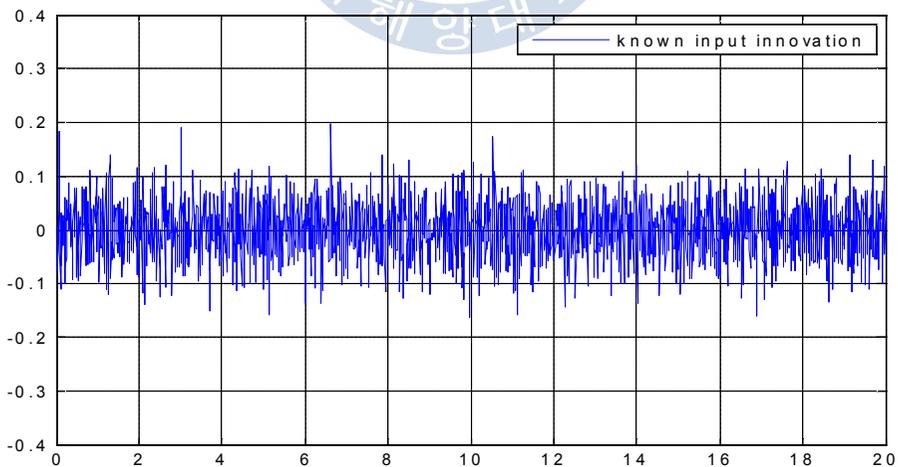


그림 4.4 모든 입력을 알고 있을 때 이노베이션 프로세스의 시뮬레이션 결과
Fig. 4.4 Simulation result of innovation process when all inputs are known

그림 4.3은 이 경우에 대한 Kalman 이득의 시뮬레이션 결과를 시간 축을 확장하여 1초까지만 나타낸 것이다. Kalman 이득은 초기에는 큰 값을 가지지만 점점 작아져 정상상태에서는 아주 작은 일정한 값으로 수렴됨을 볼 수 있다.

그림 4.4는 인가되는 모든 입력이 알려져 있을 경우에 대한 이노베이션 프로세스의 시뮬레이션 결과이며 통계적 평균인 기대치가 0이 됨을 확인할 수 있다.

한편 그림 4.5의 두 번째 그림은, 이 장에서 시험하고자 하는 바와 같이 U_{k-1} 이 시스템에 어떻게 인가되는지 모르는 불확실성 입력이라 가정할 경우에 시뮬레이션을 수행하고 얻은 실제 시스템의 상태와 Kalman 필터에 의한 추정치를 비교한 결과이다.

불확실성 입력 U_{k-1} 이 인가되지 않고 알려진 입력 $u_{k-1} = 1$ 만이 인가되는 7초까지는 Kalman 필터의 필터 추정치가 실제의 상태를 잘 추종하고 있고 이

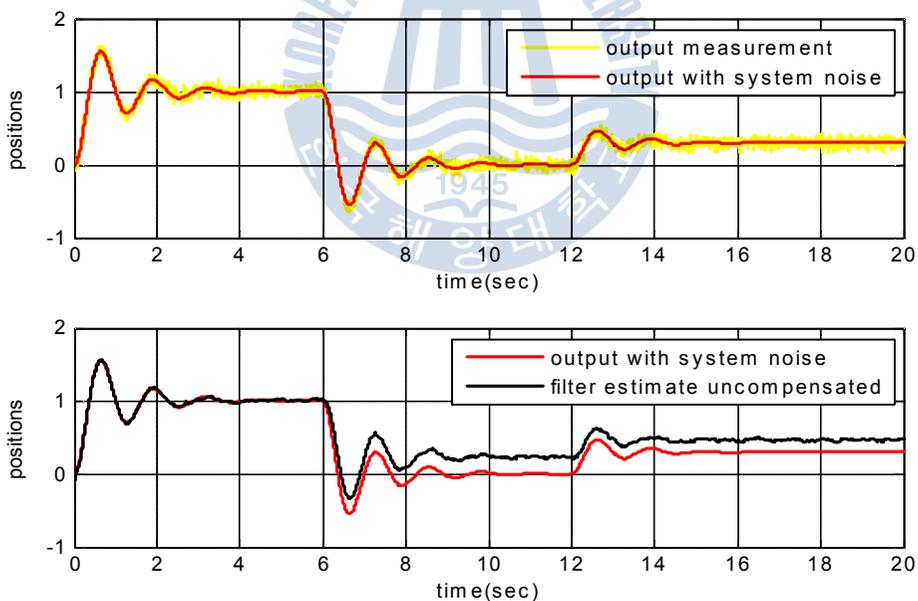


그림 4.5 불확실성 입력이 인가될 때 시스템 상태와 Kalman 필터 추정치
 Fig. 4.5 System response and filtered estimate of Kalman Filter
 when uncertain input is occurred

때의 추정치는 \hat{x}_k 이다. 한편 불확실성 입력 U_{k-1} 이 인가된 7초 이후에는 Kalman 필터는 상태 추정에 실패하고 있음을 볼 수 있다.

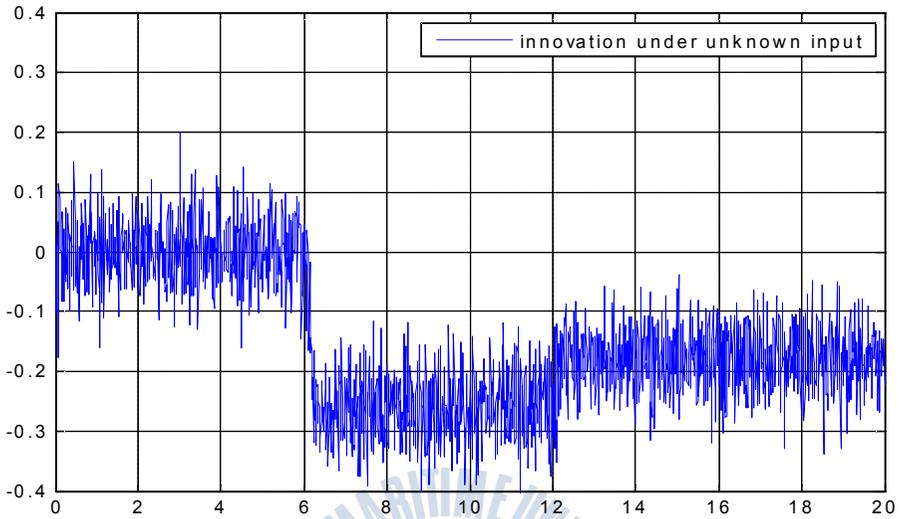


그림 4.6 불확실성 입력이 인가될 때의 이노베이션 프로세스

Fig. 4.6 Innovation process when uncertain input is occurred

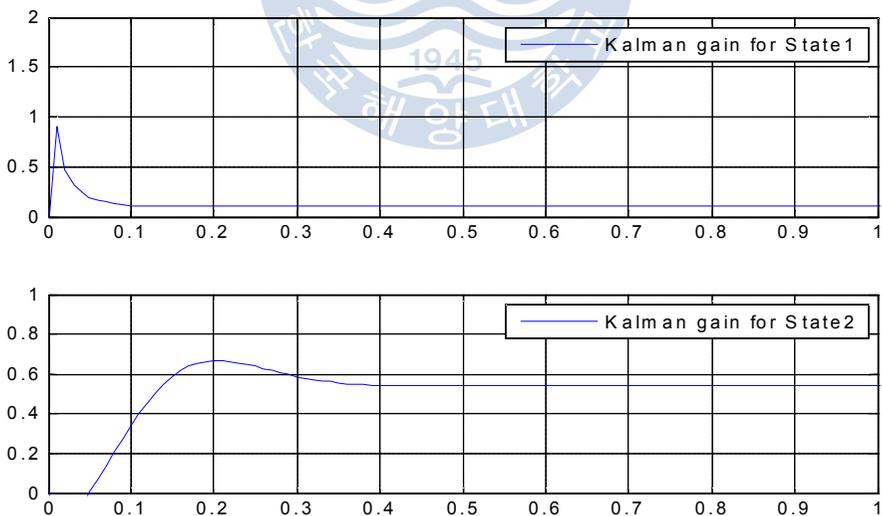
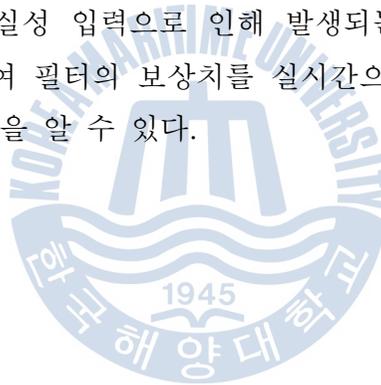


그림 4.7 불확실성 입력이 인가될 때의 Kalman 이득

Fig. 4.7 Kalman gain when uncertain input is occurred

그 이유는 불확실성 입력 U_{k-1} 이 Kalman 필터 알고리즘 내부에 반영되지 못함으로써 이때의 추정치는 \hat{x}_k 의 값만을 추정하기 때문이다. 현재 시간에서 실제의 출력 z_k 와 불확실성 입력이 반영되지 않은 예측 측정치 $\hat{z}_k(-)$ 의 차이인 이노베이션은 그림 4.6에서 그 결과를 나타낸 바와 같이 불확실성 입력의 변화에 따라 통계적 평균이 0과는 큰 차이를 보이는 구조적 특성을 표출함에도 불구하고, 그림 4.7에서 Kalman 이득의 값이 1보다 매우 작은 값으로 수렴됨으로써 필터의 보상량이 그다지 크지 않아 불확실성 입력으로 인한 상태의 변화를 실시간으로 보상해 줄 수 없기 때문이다.

결론적으로 시스템에 모르는 입력이 인가되는 불확실성 입력이 포함된 선형 시불변 이산시간 시스템에 대한 상태추정 문제에 있어서, Kalman 필터는 실제 시스템의 상태를 제대로 추정하지 못하고 발산하게 됨으로써 상태 추정에 실패하고 만다. 따라서 불확실성 입력으로 인해 발생하는 이노베이션 프로세스의 변화량을 적절히 활용하여 필터의 보상치를 실시간으로 키워 줄 수 있는 새로운 방법이 도입되어야 함을 알 수 있다.



제 5 장 퍼지 불확실성 추정기법이 결합된 Kalman 필터 기반의 상태 추정 알고리즘

제3장과 제4장에서 논의하고 시뮬레이션을 수행함으로써 얻은 결과에 따르면, 불확실성 파라미터가 존재하거나 불확실성 입력을 받는 시스템의 경우에 Kalman 필터는 시스템의 상태를 정상적으로 추정하지 못하고 실패하게 됨을 확인할 수 있었다. 또한 Kalman 필터가 시스템의 실제 상태를 제대로 추정하지 못하고 실패할 경우에는 이노베이션 프로세스의 통계적 평균이 0으로부터 크게 벗어나는 결과를 얻을 수 있었다.

이 장에서는 불확실성으로 인해 크게 변하는 이노베이션 프로세스의 특성을 이용하여 불확실성 존재여부를 판단하는 방법과, 이노베이션 프로세스를 입력으로 이용하여 불확실성의 크기를 추정하는 퍼지 불확실성 추정기법을 제안한 다음, 이를 Kalman 필터 알고리즘에 피드백 함으로써 Kalman 필터 기반의 새로운 상태 추정 알고리즘을 제안한다.

5.1 불확실성 존재 및 발생여부의 판단방법

이전의 두 장에서 논의한 바에 따르면, 선형 시불변 이산시간 시스템에서 파라미터에 불확실성이 존재하지 않거나 불확실성 입력이 인가되지 않는다면 Kalman 필터 알고리즘은 정상상태에서 실제 시스템의 상태를 신뢰성을 가지고 잘 추정함을 볼 수 있었고 이노베이션 프로세스의 통계적 평균이 0이 됨을 볼 수 있었다.

한편, 시스템의 파라미터에 불확실성이 존재하거나 시스템 외부에서 불확실성 입력이 인가될 경우 Kalman 필터는 신뢰성 있는 상태추정에 실패하게 되고 이노베이션 프로세스의 통계적 평균도 0에서 크게 벗어나 변화를 보임을 확인할 수 있었다.

이 절에서는 파라미터 불확실성의 존재나 불확실성 입력의 인가여부를 판단하기 위한 방법으로 이노베이션 프로세스를 활용하는 방법을 제안한다.

만약 불확실성의 영향 때문에 이노베이션 프로세스의 통계적 평균이 0에서 크게 벗어난다고 가정한다면, 매 샘플링 시간마다 발생하는 이노베이션 프로세스의 값을 제공하여 양의 값으로 환산하고 이를 특정한 수의 샘플링 구간동안 합한다면 크게 변동되지 않는 값을 얻을 수 있게 된다. 이를 수식으로 표현한 것이 식 (5.1)이다.

$$S = \sum_{i=0}^N (r_{k-i})^2, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (5.1)$$

여기서 r_k 는 샘플링 시간 k 에서 발생하는 이노베이션 프로세스이고 N 은 축적하고자 하는 데이터 개수의 범위를 정하는 유한 데이터 윈도우(Finite data window)이다. S 는 유한 데이터 윈도우 N 내에서 축적되는 $(N+1)$ 개의 이노베이션 프로세스 r_{k-i} ($i = 0, 1, \dots, N$) 제공의 합을 의미한다. N 이 너무 크게 되면 현재의 샘플링 시간 k 에서 들어오는 이노베이션 프로세스 r_k 가 S 에 미치는 영향이 크지 않아 최신 정보의 영향에 둔감하게 되고, N 이 너무 작게 되면 현재의 샘플링 시간 k 에서 들어오는 이노베이션 프로세스 r_k 가 S 에 미치는 영향이 너무 민감하게 됨으로써 안정된 S 의 값을 얻기가 곤란하게 된다 [5]. 따라서 N 의 크기는 실제 시스템의 상황에 따라 추정 알고리즘을 설계하는 설계자가 민감도를 판단하여 결정하게 된다.

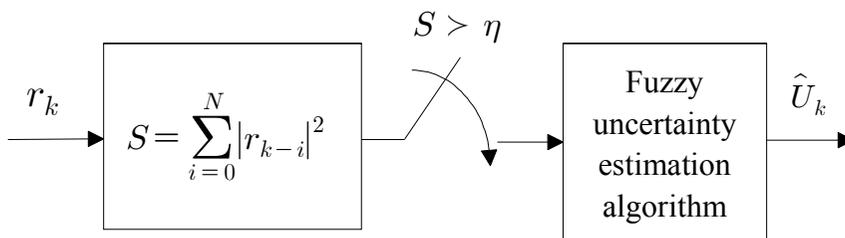


그림 5.1 이노베이션 프로세스를 이용한 불확실성 존재여부의 판단
 Fig. 5.1 Test for uncertainty presence using innovation process

식 (5.1)에서 계산한 S 값을 토대로 불확실성의 존재나 발생여부를 판단하는 것은 특정한 크기의 기준값과 비교함으로써 이루어진다. 이를 나타낸 것이 그림 5.1이다. 여기서 η 는 문턱 값(Threshold)으로 정의되는 상수이며 불확실성이 존재하지 않는 시스템에 적용된 Kalman 필터의 이노베이션 프로세스를 이용하여 반복적으로 구한 S 값을 토대로 추정 알고리즘 설계자가 결정하는 것이다. 따라서 그림 5.1에서 나타낸 바와 같이 S 값이 문턱 값 η 보다 큰 $S > \eta$ 조건을 만족할 경우에는 시스템에 파라미터 불확실성이 존재하거나 불확실성 입력이 인가되는 경우라고 판단을 내린다. 그 때 다음의 5.2절에서 제안하는 퍼지 불확실성 추정 알고리즘에 의해 불확실성의 크기 \hat{U}_k 가 추정된다.

5.2 불확실성 추정을 위한 퍼지 불확실성 추정 알고리즘

5.1절에서 제안한 방법에 의하여 불확실성 존재여부가 확인되면 그 크기를 추정할 수 있는 방법이 필요하다.

이 절에서는 Kalman 필터 이노베이션 프로세스를 입력으로 사용하여 최종적으로 불확실성의 크기를 생성하는 퍼지 불확실성 추정 알고리즘을 제안한다.

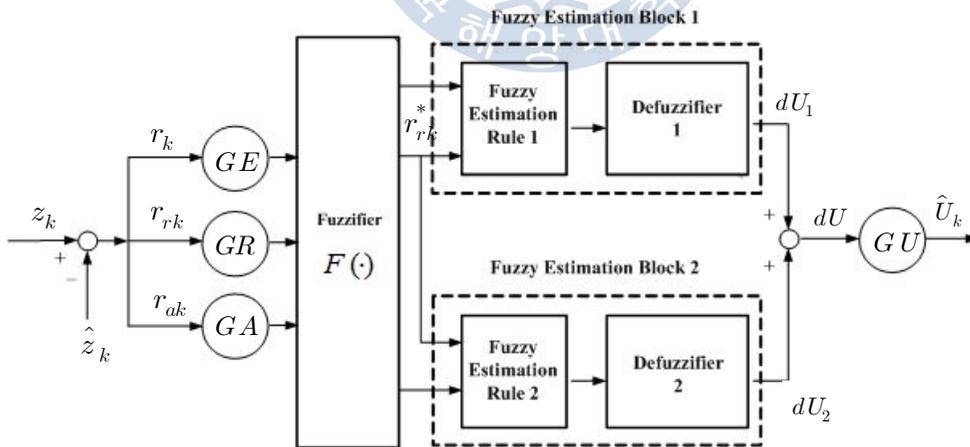


그림 5.2 퍼지 불확실성 추정 알고리즘의 기능선도

Fig. 5.2 Functional diagram of a fuzzy uncertainty estimation algorithm

그림 5.2는 제안하는 퍼지 불확실성 추정 알고리즘의 기능선도를 나타낸 것이다. 퍼지 추정 알고리즘의 입력은 기본입력으로 실제 상태의 측정치 z_k 와 예측 측정치 \hat{z}_k 의 차, 즉 불확실성이 존재할 경우의 이노베이션 프로세스 r_k 를 사용한다. 이를 사용하여 다양한 퍼지변수를 생성함으로써 퍼지규칙에서 활용하는데 이들을 설명하면 식 (5.2)와 같다.

$$\begin{aligned}
 r_k &= z_k - \hat{z}_k, & r_k^* &= GE \times r_k \\
 r_{rk} &= r_k / T, & r_{rk}^* &= GR \times r_{rk} \\
 r_{ak} &= [r_k - r_{k-1}] / T, & r_{ak}^* &= GA \times r_{ak} \\
 GE &= L / r_k, & GR &= L / r_{rk}, \\
 GA &= L / r_{ak}, & GU &= 4 / GR \\
 dU &= dU_1 + dU_2 \\
 \hat{U}_k &= dU \times GU
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

여기서 T 는 샘플링 시간이고 r_{rk} 는 이노베이션 r_k 를 샘플링 타임 T 로 나눈 것이다. r_{ak} 는 이노베이션 r_k 의 샘플링 타임에 따른 변화율이다. GE, GR, GA 는 각각 r_k, r_{rk}, r_{ak} 의 크기를 정규화 시키기 위한 입력 스케일 파라미터이다. GU 는 퍼지 출력 dU 를 위한 스케일 파라미터이고 L 은 입력과 출력을 정규화 시키기 위한 정규화 파라미터로서 퍼지 불확실성 추정 알고리즘 설계자가 결정하는 설계 파라미터이다.

5.2.1 퍼지화 알고리즘

그림 5.3은 퍼지 불확실성 추정 알고리즘의 입력으로 사용되는 정규화된 $r_k^*, r_{rk}^*, r_{ak}^*$ 를 퍼지집합으로 퍼지화 하는 알고리즘을 나타낸 것이다[7,8]. r_k^* 는 그림 EP와 EN의 두 개의 멤버를 갖고, r_{rk}^* 는 RP와 RN의 두 개의 멤버,

r_{ak}^* 는 AN 과 AP 의 두 개의 멤버를 갖는다.

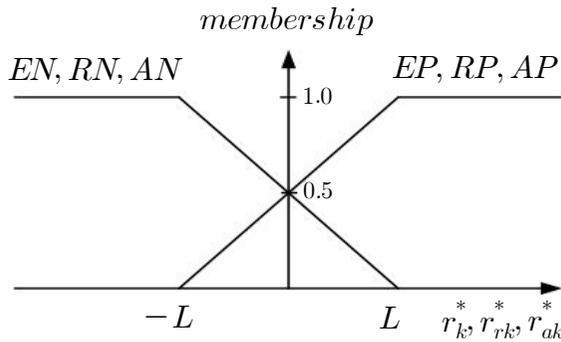


그림 5.3 퍼지 불확실성 추정 알고리즘을 위한 입력의 퍼지화

Fig. 5.3 Input fuzzifications for the fuzzy uncertainty estimation algorithm

그림 5.2의 퍼지 추정 블록(Fuzzy estimation block) 1의 퍼지 출력인 U_1 에 대한 퍼지화는 그림 5.4에서 보는 것과 같이 OP , OZ , ON 의 세 개의 멤버를 갖는 퍼지집합으로 정의되고, 퍼지 추정 블록 2의 퍼지 출력인 U_2 에 대한 퍼지화는 그림 5.5에서 보는 것과 같이 OPM 과 ONM 의 두 개의 멤버를 갖는 퍼지집합으로 정의된다.

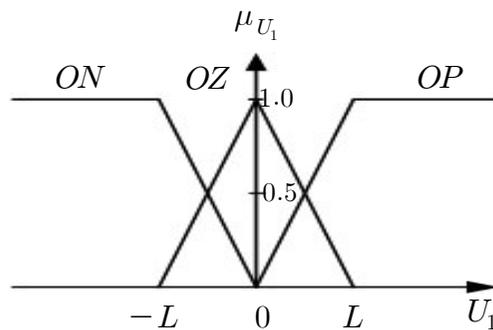


그림 5.4 퍼지 추정블록 1에 대한 출력 퍼지화

Fig. 5.4 Output fuzzification for fuzzy estimation block 1

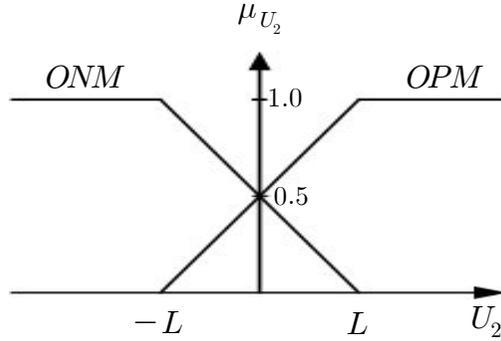


그림 5.5 퍼지 추정블록 2에 대한 출력 퍼지화

Fig. 5.5 Output fuzzification for fuzzy estimation block 2

5.2.2 불확실성 추정을 위한 퍼지규칙

이노베이션 프로세스의 향으로 발생된 시스템의 불확실성의 크기를 추정하기 위한 퍼지 불확실성 추정 알고리즘에 사용되는 퍼지규칙은 'IF ~ THEN ~' 형식으로 다음과 같이 표현된다[14,15].

퍼지 추정 블록 1을 위한 4개의 퍼지 추정규칙은 다음과 같다.

$$(R1)_1 : IF r_k^* = EP \text{ and } r_{rk}^* = RP, THEN U_1 = OP$$

$$(R2)_1 : IF r_k^* = EP \text{ and } r_{rk}^* = RN, THEN U_1 = OZ$$

$$(R3)_1 : IF r_k^* = EN \text{ and } r_{rk}^* = RP, THEN U_1 = OZ$$

$$(R4)_1 : IF r_k^* = EN \text{ and } r_{rk}^* = RN, THEN U_1 = ON$$

퍼지 추정 블록 2를 위한 4개의 퍼지 추정규칙은 다음과 같다.

$$(R1)_2 : IF r_{rk}^* = RP \text{ and } r_{ak}^* = AP, THEN U_2 = OPM$$

$$(R2)_2 : IF r_{rk}^* = RP \text{ and } r_{ak}^* = AN, THEN U_2 = ONM$$

$$(R3)_2 : IF r_{rk}^* = RN \text{ and } r_{ak}^* = AP, THEN U_2 = OPM$$

$$(R4)_2 : IF r_{rk}^* = RN \text{ and } r_{ak}^* = AN, THEN U_2 = ONM$$

퍼지규칙 $(R1)_1 \sim (R4)_1$, $(R1)_2 \sim (R4)_2$ 에서 각 규칙의 전반부를 판단하는 추론논리로는 Zadeh의 AND 논리가 적용되며, 각각의 규칙을 결합하는 논리로는 Lukasiewicz OR 논리를 적용한다.

퍼지 추론논리를 퍼지 추정 블록 1과 2에 적용하기 위한 입력공간은, 입력의 크기에 따라 정규화 파라미터인 L 범위 내에 입력들이 항상 존재하도록 식 (5.3)과 같이 매 샘플링 시간마다 스케일 파라미터를 가변시켜 줌으로써, 퍼지 추정 블록 1에 대해서는 그림 5.6과 같이 퍼지 추정 블록 2에 대해서는 그림 5.7과 같이 간단하게 분할할 수 있다[5].

$$GE = L/r_k, \quad GR = L/r_{rk}, \quad GA = L/r_{ak} \quad (5.3)$$


 r_k^*

그림 5.6 r_k^*, r_{rk}^* 에 대한 입력공간 분할

Fig. 5.6 Possible input partitioning for r_k^* and r_{rk}^*

r_{ak}^* r_{rk}^*

그림 5.7 r_{rk}^*, r_{ak}^* 에 대한 입력공간 분할
 Fig. 5.7 Possible Input partitioning for r_{rk}^* and r_{ak}^*

5.2.3 비퍼지화 알고리즘

퍼지 불확실성 추정 알고리즘에서 사용된 비퍼지화 알고리즘으로는 무게중심 평균법을 사용하며 비퍼지화된 출력은 식 (5.4)와 같다[9~11,13].

$$dU_i = \frac{\sum(\text{membership of member}) \times (\text{value of member})}{\sum(\text{memberships})} \quad (5.4)$$

여기서 $i = 1, 2$ 이다.

퍼지 추정 블록 1에 대해서 출력 퍼지집합을 L 의 구간 내에서 비퍼지화 하면 식 (5.5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & IF \quad GR \times |r_{rk}| \leq GE \times |r_k| \leq L, \\
 & dU_1 = \frac{0.5 \times L}{2L - GE \times |r_k|} [GE \times r_k + GR \times r_{rk}]
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
 & IF \quad GE \times |r_k| \leq GR \times |r_{rk}| \leq L, \\
 & dU_1 = \frac{0.5 \times L}{2L - GR \times |r_{rk}|} [GE \times r_k + GR \times r_{rk}]
 \end{aligned}$$

같은 방법으로 퍼지 추정 블록 2에 대하여 출력 퍼지집합을 비퍼지화 하면 식 (5.6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & IF \quad GA \times |r_{ak}| \leq GR \times |r_{rk}| \leq L, \\
 & dU_2 = \frac{0.25 \times L}{2L - GR \times |r_{rk}|} [GA \times a(nT)]
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
 & IF \quad GR \times |r_{rk}| \leq GA \times |r_{ak}| \leq L, \\
 & dU_2 = \frac{0.25 \times L}{2L - GA \times |r_{ak}|} [GA \times r_{ak}]
 \end{aligned}$$

식 (5.5)와 식(5.6)으로 주어진 퍼지 추정 블록 1, 2의 출력 dU_1 과 dU_2 를 합하고, 출력 스케일 파라미터인 GU 를 곱함으로써 최종 출력인 불확실성 추정 값 \hat{U}_k 를 조건에 따라 정리하면 식 (5.7)~(5.10)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad IF \quad GR \times |r_{rk}| \leq GE \times |r_k| \leq L \text{ and } GA \times |r_{ak}| \leq GR \times |r_{rk}| \leq L, \\
 & \hat{U}_k = \frac{0.5 \times L \times GU \times GE}{2L - GE \times |r_k|} r_k + \frac{0.5 \times L \times GU \times GR}{2L - GE \times |r_k|} r_{rk} \\
 & \quad + \frac{0.25 \times L \times GU \times GA}{2L - GR \times |r_{rk}|} r_{ak}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 & 2) \quad IF \quad GR \times |r_{rk}| \leq GE \times |r_k| \leq L \text{ and } GR \times |r_{rk}| \leq GA \times |r_{ak}| \leq L, \\
 & \hat{U}_k = \frac{0.5 \times L \times GU \times GE}{2L - GE \times |r_k|} r_k + \frac{0.5 \times L \times GU \times GR}{2L - GE \times |r_{rk}|} r_{rk}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$+ \frac{0.25 \times L \times GU \times GA}{2L - GA \times |r_{ak}|} r_{ak}$$

$$3) \text{ IF } GR \times |r_{rk}| \leq GE \times |r_k| \leq L \text{ and } GA \times |r_{ak}| \leq GR \times |r_{rk}| \leq L, \quad (5.9)$$

$$\hat{U}_k = \frac{0.5 \times L \times GU \times GE}{2L - GR \times |r_{rk}|} r_k + \frac{0.5 \times L \times GU \times GR}{2L - GR \times |r_{rk}|} r_{rk} \\ + \frac{0.25 \times L \times GU \times GA}{2L - GR \times |r_{rk}|} r_{ak}$$

$$4) \text{ IF } GE \times |r_k| \leq GR \times |r_{rk}| \leq L \text{ and } GR \times |r_{rk}| \leq GA \times |r_{ak}| \leq L, \quad (5.10)$$

$$\hat{U}_k = \frac{0.5 \times L \times GU \times GE}{2L - GR \times |r_{rk}|} r_k + \frac{0.5 \times L \times GU \times GR}{2L - GR \times |r_{rk}|} r_{rk} \\ + \frac{0.25 \times L \times GU \times GA}{2L - GA \times |r_{ak}|} r_{ak}$$

식 (5.3)을 활용하여 매 샘플링 시간마다 스케일 파라미터를 변경한다면 식 (5.7)부터 식(5.10)에서의 분모는 항상 L 이 됨으로써 식 (5.11)과 같이 간단한 수식으로 정리된다.

$$\hat{U}_k = K_i r_k + K_p r_{rk} + K_d r_{ak} \quad (5.11)$$

여기서, K_i, K_p, K_d 는 다음과 같다.

$$K_i = 0.5 \times GU \times GE$$

$$K_p = 0.5 \times GU \times GR$$

$$K_d = 0.25 \times GU \times GA$$

5.3 Kalman 필터 기반의 새로운 상태 추정 알고리즘

시스템의 파라미터에 불확실성이 존재하거나 시스템 외부에서 불확실성 입력

이 인가될 경우에는 통계적 평균이 0에서 크게 벗어나는 Kalman 필터의 이노베이션 프로세스를 토대로 식 (5.1)을 사용함으로써 불확실성의 발생여부를 판단할 수 있다. 이때 발생한 불확실성의 크기는 퍼지 불확실성 추정 알고리즘의 결과식인 식 (5.11)에 의해 그 값이 \hat{U}_k 로 추정된다. 이를 다음 샘플링 시간에서 Kalman 필터 알고리즘에서 추가되는 입력으로 피드백 시켜 필터 추정치를 보상시키는 방법을 택함으로써 실제의 상태를 신뢰성 있게 추정할 수 있도록 상태 추정 알고리즘을 구성할 수 있다.

식 (5.12)는 기존의 Kalman 필터 알고리즘에 추정된 불확실성 \hat{U}_k 가 다음 샘플링 시간에서 예측 추정치를 계산하는데 입력으로 피드백 된 상태 추정 알고리즘을 정리한 것이다. 순환 알고리즘을 사용함으로써 \hat{U}_k 이 한 스텝 지연되어 \hat{U}_{k-1} 로 표현되고 다음 샘플링 시간의 예측 추정치 $\hat{x}_k(-)$ 를 계산하는데 입력의 형태로 피드백 되었음을 확인할 수 있다. 또한 \hat{U}_k 는 식 (5.1)이 만족될 때만 새롭게 계산되고 그렇지 않을 경우에는 이전에 계산된 값을 계속 사용하게 된다.

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_k(-) &= A\hat{x}_{k-1} + B(u_{k-1} + \hat{U}_{k-1}) & (5.12) \\
 P_k(-) &= AP_{k-1}(+)A^T + DQ_{k-1}D^T \\
 K_k &= P_k(-)C^T[CP_k(-)C^T + R_k]^{-1} \\
 \hat{x}_k &= \hat{x}_k(-) + K_k[z_k - C\hat{x}_k(-)] \\
 P_k &= [I - K_kC]P_k(-) \\
 \hat{U}_k &= K_i r_k + K_p r_{rk} + K_d r_{dk}
 \end{aligned}$$

그림 5.8은 불확실성 발생유무를 판단하기 위한 알고리즘과 불확실성 계산 알고리즘 및 이를 피드백 하는 루프가 삽입된 Kalman 필터 기반의 새로운 상태 추정 알고리즘의 흐름선도를 나타낸 그림이다.

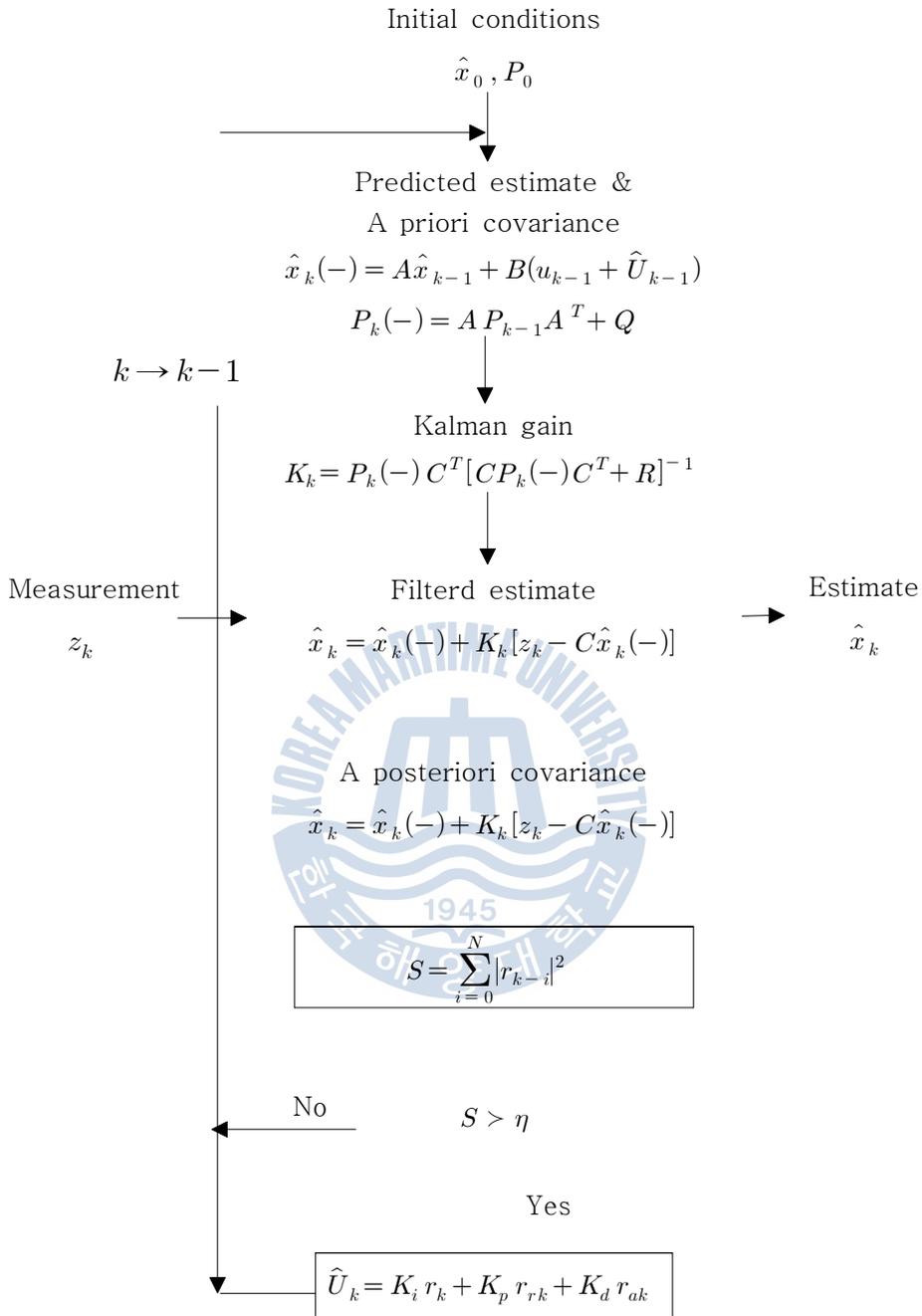


그림 5.8 불확실성 추정 알고리즘이 결합된 Kalman 필터 기반 상태 추정 알고리즘의 흐름선도

Fig. 5.8 Flowchart of Kalman filter based state estimation algorithm with uncertainty estimation algorithm

제 6 장 퍼지 불확실성 추정 알고리즘이 결합된 Kalman 필터 기반의 상태 추정 알고리즘 성능 검증

이 장에서는 선형 시불변 이산시간 확률 시스템에 파라미터 불확실성과 불확실성 입력이 인가되는 경우 제안된 퍼지 불확실성 추정 알고리즘이 결합된 Kalman 필터 기반의 상태 추정 알고리즘의 성능을 검증한다. 이를 위하여 이전의 장에서 논의된 예제 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행하고 그 결과를 고찰함으로써 성능을 평가한다.

6.1 파라미터 불확실성을 가진 선형 시불변 이산시간 시스템의 상태 추정

제안된 알고리즘의 실제 시스템에 대한 상태 추정 성능을 알아보기 위하여 3장에서 다루어진 불확실성 파라미터를 가진 선형 시불변 이산시간 확률 시스템을 대상으로 상태 추정 시뮬레이션을 수행하였다.

수학적으로 모델링된 이산시간 시스템의 상태방정식과 시스템 잡음의 특성은 식 (6.1)과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix} \bar{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \quad (6.1) \\ w_{k-1} &\sim N(0, 0.05^2) \end{aligned}$$

이산시간 시스템의 출력방정식과 측정잡음의 특성은 식 (6.2)와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{z}_k &= [1 \quad 0] \bar{x}_k + v_k \quad (6.2) \\ v_k &\sim N(0, 0.05^2) \end{aligned}$$

한편, 파라미터 불확실성을 포함한 실제 이산시간 시스템은 식 (6.3)과 같다고 가정한다.

$$\begin{aligned} x_k &= (A + \Delta)x_{k-1} + Bu_{k-1} + Dw_{k-1} \\ z_k &= [1 \ 0]x_k + v_k \\ w_{k-1} &\sim N(0, 0.05^2), \quad v_k \sim N(0, 0.05^2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

이때 모델링된 공칭 이산시간 시스템의 시스템 행렬 A 는 $\begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix}$

이고 포함된 파라미터 불확실성 행렬 Δ 는 $\begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}$ 이라 가정한다. 따라서 실제 시스템의 수학 모델은 식 (6.4)와 같다.

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{bmatrix} 0.8992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 1.0096 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \\ A + \Delta &= \begin{bmatrix} 0.8992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 1.0096 \end{bmatrix}, \\ A &= \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} -0.1000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0300 \end{bmatrix} \\ w_{k-1} &\sim N(0, 0.05^2), \quad v_k \sim N(0, 0.05^2) \end{aligned} \quad (6.4)$$

그림 6.1은 모델링된 공칭 시스템의 응답과 불확실성 파라미터가 존재할 경우의 실제 시스템의 응답, 그리고 Kalman 필터에 의한 필터 추정치를 나타낸 것이다. 그림 6.1을 보면 파라미터 불확실성으로 인하여 공칭 시스템의 응답과 실제 시스템의 응답에서 과도응답부터 정상상태 응답까지 확연한 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 그리고 Kalman 필터의 필터 추정치도 공칭 시스템에 대한 추정치 \hat{x}_k 로서 실제 시스템의 상태 추정에 실패한 결과를 확인할 수 있다.

그림 6.2는 공칭 시스템을 대상으로 기존의 Kalman 필터 알고리즘을 적용하였을 경우의 필터 추정치와, 제안된 퍼지 불확실성 추정 알고리즘을 가진 Kalman

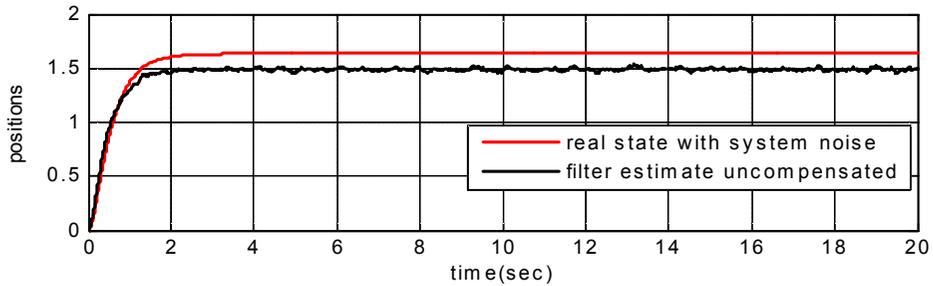
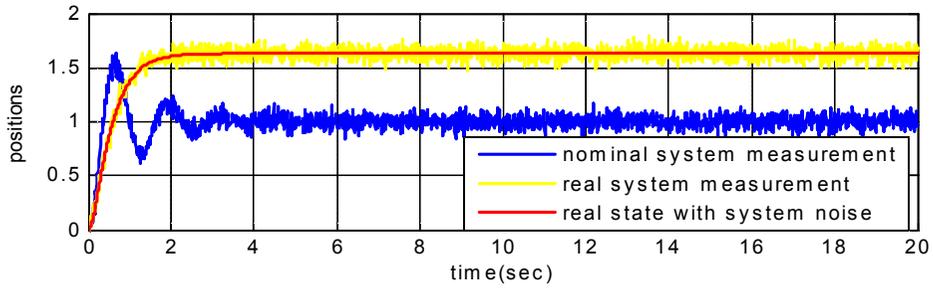


그림 6.1 파라미터 불확실성 시스템의 응답과 기존의 Kalman 필터의 상태 추정 결과
 Fig. 6.1 Response of parameter uncertain system and state estimation result of conventional Kalman filter

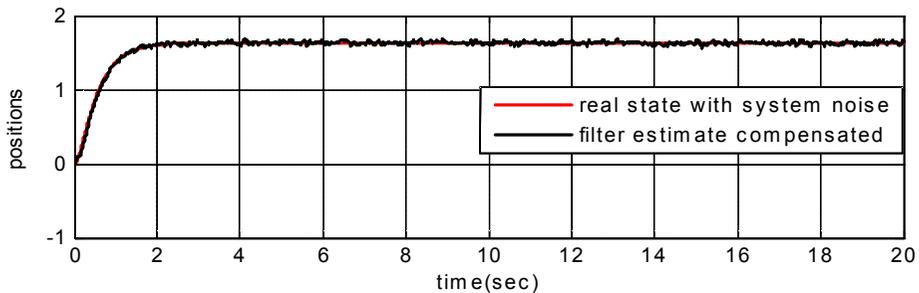
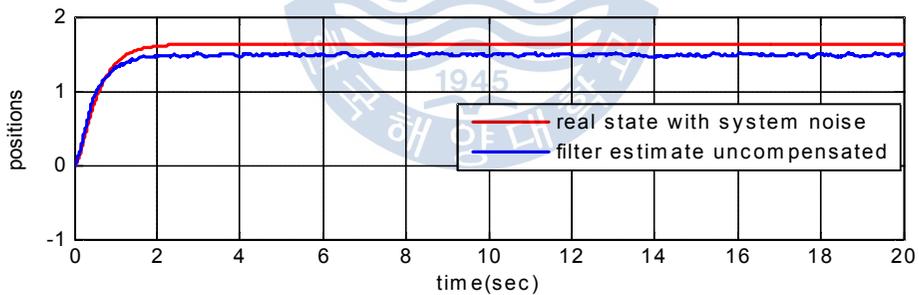


그림 6.2 기존의 Kalman 필터와 제안된 추정 알고리즘에 의한 필터 추정치
 Fig 6.2 Filtered estimates by conventional Kalman filter and suggest estimation algorithm

필터 기반의 상태 추정 알고리즘에 의한 추정 결과를 비교한 것이다. 그림 6.2를 살펴보면 불확실성 파라미터가 존재할 경우 기존의 Kalman 필터만으로는 상태 추정은 실패하지만, 본 논문에서 제안된 퍼지 불확실성 추정 알고리즘이 결합된 Kalman 필터 기반 상태 추정 알고리즘에 의한 필터 추정치 \hat{x}_k 는 실제 시스템의 상태를 잘 추정하는 것을 확인할 수 있다.

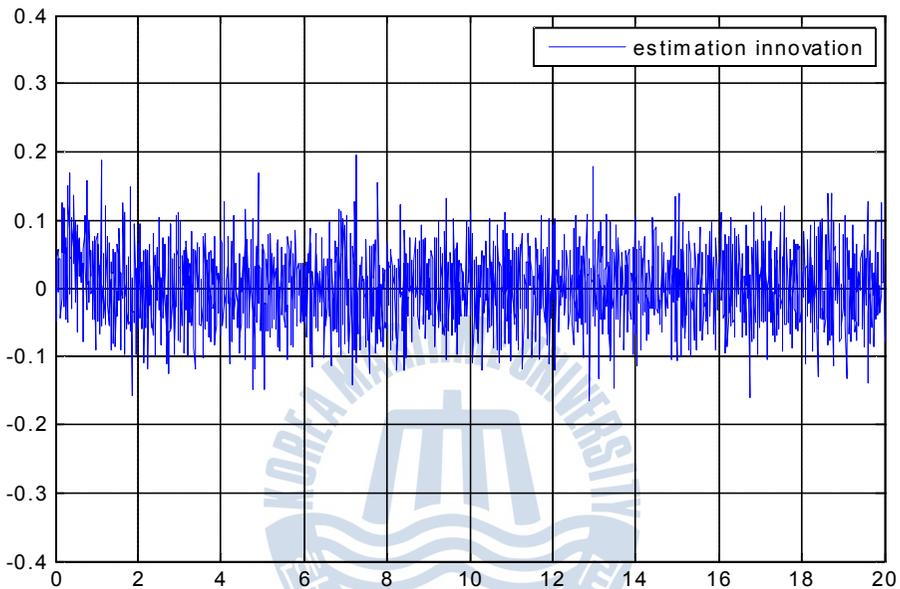


그림 6.3 제안된 알고리즘을 사용하였을 경우의 이노베이션 프로세스
 Fig 6.3 Innovation process generated by suggested estimation algorithm

그림 6.3은 제안된 알고리즘을 이용하였을 경우의 발생하는 이노베이션 프로세스의 결과를 나타낸 그림이다. 그림에서도 알 수 있듯이 초기 과도상태가 지나 정상상태에 도달하면 이노베이션 프로세스의 값이 거의 0 주변에 분포됨으로써 통계적 평균이 0에 근사됨으로써, 불확실성이 존재하지 않는 시스템에 기존의 Kalman 필터를 적용하였을 경우의 이노베이션 프로세스인 그림 2.6과 아주 유사함을 확인할 수 있다.

그림 6.4는 제안된 상태 추정 알고리즘을 사용하였을 경우 퍼지 불확실성 추정 알고리즘에 의해 추정된 불확실성 입력이다.

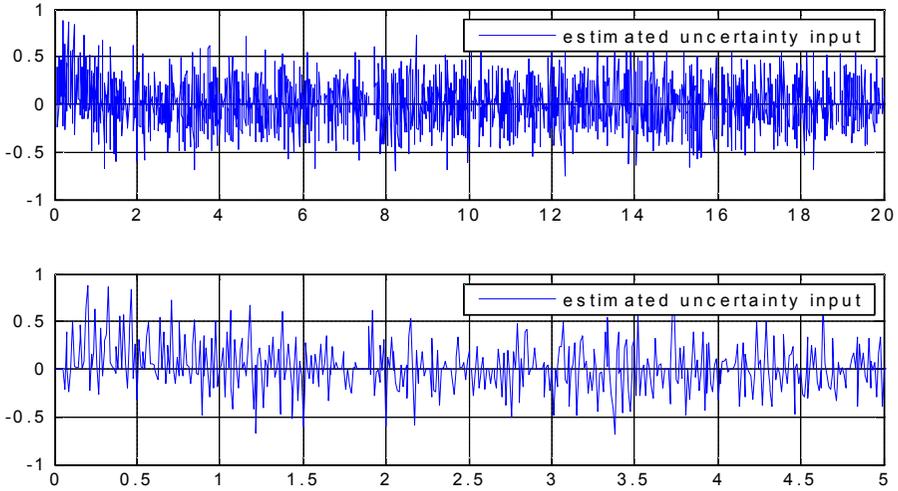


그림 6.4 퍼지 불확실성 추정 알고리즘에 의해 추정된 불확실성 입력
 Fig. 6.4 Uncertainty input estimated by fuzzy uncertainty estimation algorithm

6.2 불확실성 입력이 인가되는 선형 시불변 이산시간 시스템의 상태 추정

불확실성 입력을 가진 이산시간 시스템의 상태 추정 성능을 알아보기 위하여 식 (6.5)와 같은 이산시간 시스템을 고려한다.

$$x_k = \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \quad (6.5)$$

$$w_{k-1} \sim N(0, 0.05^2)$$

이때 출력방정식은 식 (6.6)과 같다.

$$z_k = [1 \quad 0] x_k + v_k \quad (6.6)$$

$$v_k \sim N(0, 0.05^2)$$

불확실성 입력이 인가되는 이산시간 시스템의 상태공간 방정식은 식 (6.7)과 같다.

$$x_k = \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0099 \\ -0.2475 & 0.9796 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.2473 \end{bmatrix} (u_{k-1} + U_{k-1}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1} \quad (6.7)$$

$$z_k = [1 \ 0] x_k + v_k$$

$$w_{k-1} \sim N(0, 0.05^2), \quad v_k \sim N(0, 0.05^2)$$

입력 변화에 따른 Kalman 필터의 성능을 알아보기 위하여 알려진 입력 u_{k-1} 은 단위스텝으로 인가하였고, 알려지지 않은 불확실성 입력 U_{k-1} 은 시간에 따라 식 (6.8)과 같이 인가하였다.

$$U_{k-1} = 0, \quad 0 \leq t \leq 7 \quad (6.8)$$

$$U_{k-1} = -1, \quad 7 < t \leq 14$$

$$U_{k-1} = -0.7, \quad 14 < t$$

그림 6.5는 불확실성 입력이 인가되었을 경우의 시스템의 상태와 기존의 Kalman 필터에 의한 상태 추정치 \hat{x}_k 를 나타낸 것이다. 그림으로부터 기존의 Kalman 필터에 의한 필터 추정치 \hat{x}_k 는 불확실성 입력이 인가되는 시간인 7초에서부터 상태 추정에 실패한 것을 확인할 수 있다.

그림 6.6은 실제 시스템의 상태와 제안된 퍼지 불확실성 추정 알고리즘이 결합된 Kalman 필터 기반의 상태 추정 알고리즘을 적용한 경우 시스템의 상태를 추정한 결과 \hat{x}_k 이다. 그림에서 보는 바와 같이 불확실성 입력이 인가되고 있음에도 불구하고 제안된 추정 알고리즘은 시스템의 실제 상태를 잘 추정하고 있음을 확인할 수 있다.

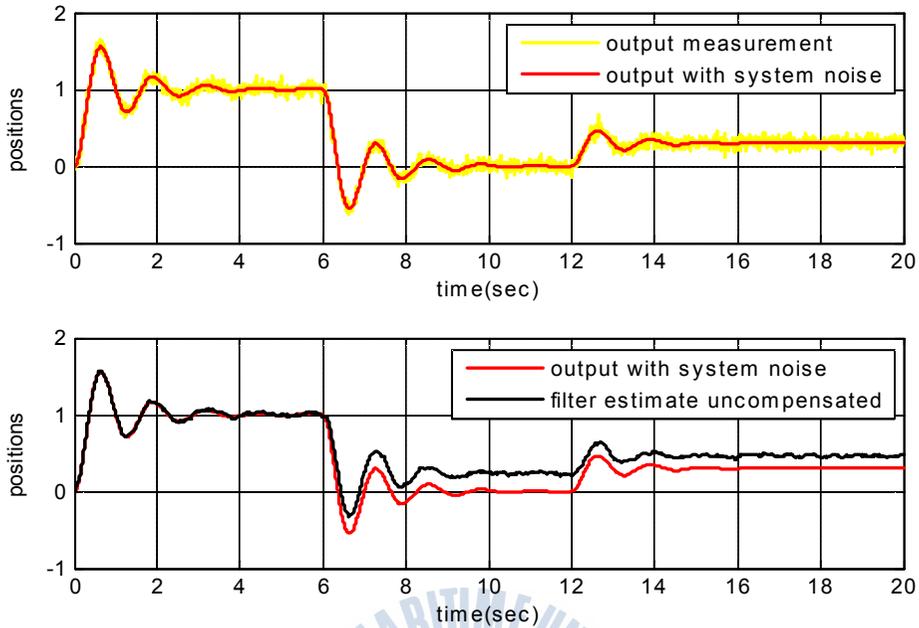


그림 6.5 불확실성 입력이 인가될 경우 시스템 상태와 기존 Kalman 필터 추정치
 Fig. 6.5 System state and filtered estimate by conventional Kalman filter when uncertain input is occurred

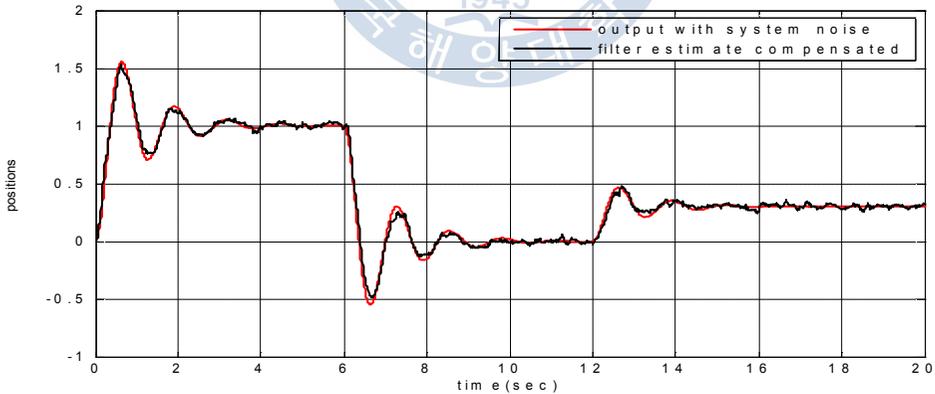


그림 6.6 불확실성 입력이 인가될 경우의 제안된 알고리즘에 의한 상태 추정 결과
 Fig. 6.6 State estimation result by suggested algorithm when uncertain input is occurred

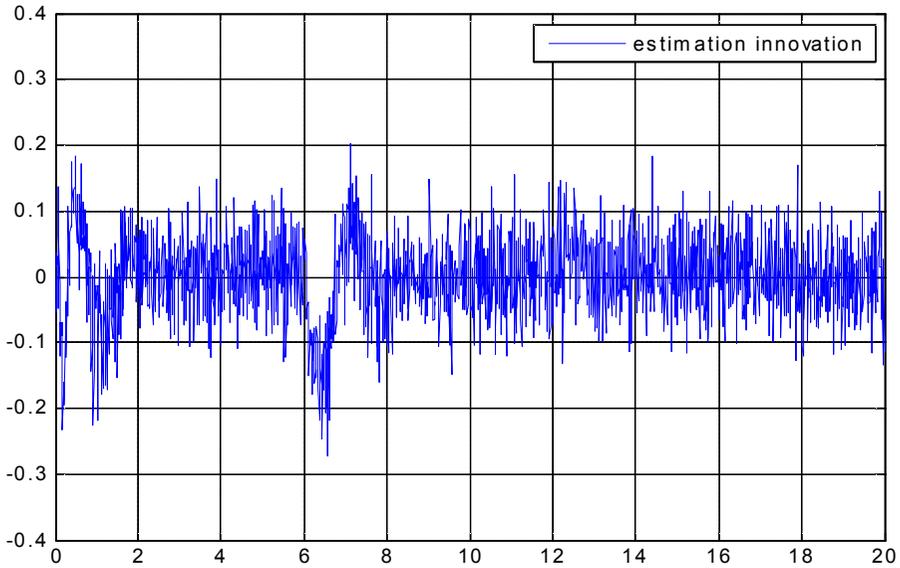


그림 6.7 제안된 알고리즘을 사용하였을 경우의 이노베이션 프로세스
 Fig. 6.7 Innovation process generated by suggested estimation algorithm

그림 6.7은 제안된 상태 추정 알고리즘을 이용하였을 경우의 이노베이션 프로세스를 나타낸 결과이다. 그림에서 보는 바와 같이 이노베이션 프로세스의 값이 시스템 응답의 과도상태가 지나고 정상상태에 도달했을 경우에는 0 주변에 분포하고 있음을 알 수 있고 이 경우에는 통계적 평균이 거의 0에 근사함을 알 수 있다. 따라서 제안한 퍼지 불확실성 추정 알고리즘이 결합된 Kalman 필터 기반의 상태 추정 알고리즘은 정상상태에서 실제 시스템의 상태를 양호하게 추정함을 확인할 수 있다.

제 7 장 결 론

Kalman 필터 알고리즘은 통계적 특성이 변하지 않는 선형 시불변 확률 시스템의 상태 추정에 적합한 이론이다. 한편 시스템에 파라미터 불확실성이 존재하거나 불확실성 입력이 인가되는 경우 Kalman 필터는 시스템의 실제 상태를 추정하는데 실패하게 된다.

본 논문에서는 파라미터 불확실성이나 불확실성 입력이 존재하더라도 시스템의 실제 상태를 안정적으로 추정할 수 있는 Kalman 필터 기반의 상태추정 알고리즘을 제안하였고, 다음과 과정을 거침으로써 제안된 알고리즘의 유효성과 실시간 상태 추정의 가능성을 증명하였다.

- (1) 선형 시불변 이산시간 확률 시스템을 대상으로 Kalman 필터 알고리즘을 전개하였고 예제 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행함으로써 실시간 상태 추정 가능성에 대한 Kalman 필터의 성능을 확인하였다.
- (2) 파라미터 불확실성이 존재하는 선형 시불변 이산시간 확률 시스템의 상태를 추정하기 위하여 모델링된 공칭 시스템을 대상으로 구성된 Kalman 필터는 실제 시스템의 상태를 추정하는데 실패함을 예제 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행함으로써 확인하였다. 시뮬레이션 결과 오프라인으로 계산되는 Kalman 이득이 정상상태에서 아주 작은 값으로 수렴됨으로써 파라미터 불확실성으로 인한 이노베이션 프로세스의 큰 변화에도 불구하고 필터 추정치를 보상하는데 한계가 있기 때문임을 증명하였다.
- (3) 불확실성 입력이 인가되는 선형 시불변 이산시간 확률 시스템의 상태를 추정하기 위하여 구성된 Kalman 필터는 불확실성 입력으로 인해 변하는 실제 시스템의 상태를 추정하는데 실패함을 예제 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행함으로써 확인하였다. Kalman 필터는 모델기반 알고리즘으로서 알려진 입력만을 알고리즘 상에 반영하기 때문이고, 시뮬레이션 결과 작은 값으로 수렴된 Kalman 이득이 불확실성 입력으로 인한 이노베이션

프로세스의 큰 변화를 필터 추정치의 보상에 제대로 반영하지 못하기 때문임을 증명하였다.

- (4) 파라미터 불확실성이나 불확실성 입력이 존재하더라도 시스템의 실제 상태를 안정적으로 추정할 수 있는 Kalman 필터 기반의 상태추정 알고리즘을 제안하였다. 이노베이션 프로세스를 기반으로 불확실성 발생여부를 탐지하는 방법을 제안하였고, 퍼지 불확실성 추정 알고리즘을 제안하였으며, 이를 Kalman 필터 알고리즘으로 결합함으로써 불확실성을 가진 실제 시스템의 상태를 추정할 수 있는 상태 추정 알고리즘을 완성하였다.
- (5) 파라미터 불확실성을 가진 경우와 불확실성 입력이 인가되는 경우의 예제 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행함으로써 제안된 상태 추정 알고리즘의 유효성과 상태 추정의 가능성을 검증하였다.

이상의 연구결과를 토대로 선형 시불변 이산시간 확률 시스템의 경우에는 비록 파라미터 불확실성이 존재하거나 불확실성 입력이 인가될 때에도, 본 논문에서 제안한 퍼지 불확실성 추정 알고리즘이 결합된 Kalman 필터 기반의 상태 추정 알고리즘을 사용하면, 실제 시스템의 상태를 안정적으로 추정할 수 있을 것이라 판단된다.

참 고 문 헌

- [1] A. E. Gelb et.al., *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, 1974.
- [2] Moginder S. Grewal and Angus P. Andrews, *Kalman Filtering Theory and Practice*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
- [3] A. P. Sage and C. C. White, *Optimum Systems Control*, Prentice-Hall, Seoul, 1977.
- [4] Andrew H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, 1960.
- [5] J. Kim, J. Lim, S. Seo, and Y. Ha, "Kalman Filter Based Estimation Algorithm for Uncertainty Estimation of LTI System," Proceedings of the 36th KOSME Fall Conference, p. 157, 2012.(in Korean)
- [6] Thor I. Fossen, *Marine Control Systems*, Marine Cybernetics, Norway, 2002.
- [7] J. H. kim and S. J. Oh, "A Fuzzy PID Controller for Nonlinear and Uncertain System," Springer-Verlag, Soft Computing, Vol. 4, Issue 2, pp. 123-129, 2000.
- [8] I. Kim, B. Lee, and J. Kim, "A Study on the Performance Improvement of the Nonlinear Fuzzy PID Controller," Journal of Korean Society of Marine Engineers, Vol. 27, No. 7, pp. 852~861, 2003.(in Korean)
- [9] K.J. Åstrom, K. H. Johansson, and Q. G. Wang. "Design of Decoupled PID Controllers for MIMO Systems," American Control Conference, Vol. 3, pp. 2015~2020, 2001.
- [10] S. K. Nam and W. S. Yoo, "Fuzzy PID Control with Accelerated Reasoning for DC Servo Motors," Engineering Application of Artificial Intelligent, Vol. 7, pp. 559~569, 1994.
- [11] S. He, S. Tan, F. Xu, and P.Wang, "Fuzzy Self-Tuning PID Controllers,"

- Fuzzy Sets and Systems, Vol. 56, pp. 37~46, 1993.
- [12] J. H. Kim, "A Suggestion of Nonlinear Fuzzy PID Controller to Improve Transient Responses of Nonlinear or Uncertain Systems," 한국 퍼지 및 지능시스템학회 논문지, Vol. 5, No. 4, pp. 87~100, 1995.
- [13] H. Ying, W. Siler, and J. J. Buckley, "Fuzzy Control Theory: A Nonlinear Case," Automatica, Vol. 29, pp. 513~520, 1990.
- [14] 김인환, "가변 파라미터를 갖는 비선형 퍼지 PID 제어기의 설계방법에 관한 연구," 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과, 박사논문, 2004.
- [15] 주하나, "비선형 퍼지 PID제어기의 성능개선에 관한 연구," 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과, 석사논문, 2012.

