



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

工學碩士 學位論文

船舶用 可變피치 프로펠러의 應力 및
振動解析에 관한 研究

A Study on the Analysis of Stress and Vibration for
Controllable Pitch Propeller

指導教授 金正烈



2009 年 2 月

韓國海洋大學校 大學院

機關시스템工學科

柳 然 苗

목 차

List of Tables	iii
List of Figures	iv
Abstract	vii
제 1 장 서 론	1
1.1 연구 배경	1
1.1.1 가변피치 프로펠러의 특성	1
1.1.2 가변피치 프로펠러의 경제성	4
1.1.3 가변피치 프로펠러의 신뢰성	5
1.2 연구 내용	6
제 2 장 프로펠러 날개의 강도	7
2.1 추력과 토크에 의한 굽힘모멘트	8
2.1.1 추력에 의한 전단력과 굽힘모멘트	8
2.1.2 토크에 의한 전단력과 굽힘모멘트	11
2.1.3 날개 현에서의 굽힘모멘트	16
2.2 원심력에 의한 굽힘모멘트	18
2.2.1 날개의 외형과 면적	18
2.2.2 날개 무게	20
2.2.3 원심력	23
2.2.4 원심력에 의해 발생하는 모멘트	24
2.2.5 날개 경사에 의한 굽힘모멘트	24
2.2.6 스큐에 의한 굽힘모멘트	27
2.2.7 원심력에 의한 굽힘모멘트	27

2.3 날개의 두께	31
2.3.1 Flexure 이론의 적용	32
2.3.2 날개의 두께식	35
2.3.3 날개의 강도	38
2.4 날개의 진동	39
제 3 장 응력 및 고유진동 해석	41
3.1 가변피치 프로펠러의 응력 해석	43
3.1.1 전진상태 날개의 응력 해석	43
3.1.2 후진상태 날개의 응력 해석	49
3.2 가변피치 프로펠러의 고유진동 해석	54
제 4 장 결 론	69
참고문헌	70
부 록	72



List of Tables

Table 3.1	Specification of the propeller	42
Table 3.2	Displacements for 1st mode	57
Table 3.3	Displacements for 2nd mode	59
Table 3.4	Displacements for 3rd mode	61
Table 3.5	Displacements for 4th mode	63
Table 3.6	Displacements for 5th mode	65
Table 3.7	Displacements for 6th mode	67



List of Figures

Fig. 2.1	Lift distribution for ship propeller	9
Fig. 2.2	Average thrust distribution	9
Fig. 2.3	Bending moments due to thrust and torque	17
Fig. 2.4	Blade outline for various values of parameters	19
Fig. 2.5	Radial distribution of maximum blade thickness	21
Fig. 2.6	Bending moment due to rake	25
Fig. 2.7	Bending moment due to skew	28
Fig. 2.8	Variation of distance from neutral axis to points of maximum stress for various sections	37
Fig. 2.9	Location of maximum stress in the section	38
Fig. 3.1	Mesh of CPP assembly for analysis	42
Fig. 3.2	Equivalent stress shape of the propeller in ahead condition	43
Fig. 3.3	Equivalent stress shape of the blade in ahead condition	44
Fig. 3.4	Equivalent stress shape of the blade face at root in ahead condition	46

Fig. 3.5	Equivalent stress of the blade face at root in ahead condition	46
Fig. 3.6	Equivalent stress shape of the blade back at root in ahead condition	47
Fig. 3.7	Equivalent stress of the blade back at root in ahead condition	47
Fig. 3.8	Equivalent stress of the blade section at root in ahead condition	48
Fig. 3.9	Mesh of the propeller in astern condition	50
Fig. 3.10	Equivalent stress of the blade in astern condition	50
Fig. 3.11	Equivalent stress shape of the blade face at root in astern condition	51
Fig. 3.12	Equivalent stress of the blade face at root in astern condition	51
Fig. 3.13	Equivalent stress shape of the blade back at root in astern condition	52
Fig. 3.14	Equivalent stress of the blade back at root in astern condition	52
Fig. 3.15	Equivalent stress of the blade section at root in astern condition	53

Fig. 3.16	Vibration mode shape of 1st order	55
Fig. 3.17	1st vibration mode shapes for each axis direction	56
Fig. 3.18	Vibration mode shape of 2nd order	57
Fig. 3.19	2nd vibration mode shapes for each axis direction	58
Fig. 3.20	Vibration mode shape of 3rd order	59
Fig. 3.21	3rd vibration mode shapes for each axis direction	60
Fig. 3.22	Vibration mode shape of 4th order	61
Fig. 3.23	4th vibration mode shapes for each axis direction	62
Fig. 3.24	Vibration mode shape of 5th order	63
Fig. 3.25	5th vibration mode shapes for each axis direction	64
Fig. 3.26	Vibration mode shape of 6th order	65
Fig. 3.27	6th vibration mode shapes for each axis direction	66
Fig. 3.28	Displacement and frequency at each mode	68



A Study on the Analysis of Stress and Vibration for Controllable Pitch Propeller

Yeon - Chul, Ryu

Department of Marine System Engineering
Graduate School
Korea Maritime University

Abstract



Controllable pitch propeller(CPP) system for marine that moved the blade pitch angle without reversing revolution of the propulsion shaft has been used for the ship of special purpose, as battle warship, icebreaker, excursion ship, deep-see fishing vessel, by reason of the efficient load control, improvement of ship control and so on. But almost of the CPP system has depended on import and some has been used for the introduction manufacturing of technology from the affiliated company what avoid the transferring technology. So, it is difficult to learn the main technology. Because of this situations, the study of stress and vibration for CPP doesn't widely pursue.

This thesis is focused on the stress and vibration characteristics of the CPP blade by finite element method(FEM) using ANSYS code and design of the CPP system. First of all, to compare the stress shape of the blade and maximum stress point of the blade section at root in ahead and astern condition, equivalent stress is solved about CPP blade and around root that is maximum stress area. Also, through the vibration analysis, deformation characteristics of the CPP blade of each mode are solved and the results show the frequency zone of occurring maximum displacement.



제 1 장 서 론

1.1 연구 배경

일반적으로 선박용 추진기에는 스크류형 추진기를 사용하고 있으며, 스크류형에는 고정피치 프로펠러와 가변피치 프로펠러가 있다. 상선에서는 대부분 고정피치 프로펠러를 사용하고 있으나, 군함, 쇄빙선, 유람선, 원양어선 등에서는 가변피치 프로펠러가 가지고 있는 여러 가지 장점을 활용하여 이것을 많이 사용하고 있다. 그러나 가변피치 프로펠러의 대부분을 수입에 의존하고 있고, 일부 기술도입 제품에 대해서는 제작사로부터 기술이전을 받지 못해 지금까지 독자적인 기술개발 및 설계능력을 갖고 있지 못한 실정이다. 하지만 국내에서도 자체 기술개발을 위한 연구가 진행 중에 있으므로^{[1],[2]} 조만간에 독자적인 기술 및 설계능력을 갖출 것으로 예상된다. 따라서 가변피치 프로펠러 시스템의 완전 국산화 일환으로 이와 관련한 연구가 절대적으로 필요하다. 그리고 가변피치 프로펠러의 특성과 경제성 및 신뢰성을 보면 다음과 같다.^[3]

1.1.1 가변피치 프로펠러의 특성

1) 주기 부하제어 및 연료소비량 측면

가변피치 프로펠러의 경우 어떤 부하가 주어지면 날개 각도의 제어에 의하여 임의의 마력과 회전수의 관계를 얻을 수 있다. 따라서 프로펠러 부하가 변화한 경우라도 날개각도를 제어함으로써 주기출력을 유효하게 이용하고 연료소비량을 최소로 하는 운항이 가능하다.

하중조건이 크게 변화하는 트롤선, 예선 등과 같은 선박의 경우 항해시에는 프로펠러 피치를 크게 하고 예인시에는 프로펠러 피치를 감함으로서 항상 주기관의 능력을 충분히 이용할 수 있기 때문에 상이한 하중조건에 대하여 각각 요구하는 선속 또는 추력을 얻을 수 있다.

경년변화에 의한 선체저항의 증가에 대하여 고정피치 프로펠러는 주기의 운전한계에 달하였을 경우 그 이상의 토크 리치를 막기 위하여 회전수를 낮추어

야 하며 그 결과로 주기출력이 저하하기 때문에 운항 선속을 부득이 낮추게 된다. 그러나 가변피치 프로펠러는 피치를 줄임으로서 주기를 언제나 상용출력으로 유지할 수 있고 그 결과로 운항 선속의 저하를 최소한도로 억제할 수 있으며 재화상태의 변화에 의한 프로펠러 부하의 변화에 대해서도 프로펠러 피치를 조절하여 주기를 상용출력으로 유지한다. 그리고 근래에 연료비 절약을 위하여 운항 선속을 본래의 설계 선속보다 낮추어 운항하는 경우가 일어나고 있으며 이러한 감속 운항시에 선속에 따라 최적의 피치와 회전수를 설정할 수 있고 고정피치 프로펠러보다 연료비 절감 효과가 크다.

황천 항해시에 프로펠러 피치를 통상 항해시보다 감함으로서 주기관 토크 리치 내지 서징영역 운전을 피할 수 있으며 항로가 심수구역, 천수구역 등으로 변화하는 선박에서는 항해구역에 따라 선체저항이 변화하게 된다. 따라서 항해 구역에 맞추어서 프로펠러 피치를 선정함으로서 주기의 토크리치를 피하는 것이 가능하게 되고 주기출력을 유효하게 이용할 수 있다. 또한 저출력 운전의 경우 프로펠러 피치의 제어에 의하여 임의의 선속을 얻을 수 있어 협수역에서의 저속 운항이 용이한 외에 저출력 운전시간이 긴 선박에서는 주기의 마멸을 줄이는 운전이 가능하다.

근래의 저속 비대선에서는 배의 톤수에 비하여 주기출력이 적다. 이 때문에 출항시에는 배의 관성력으로 인하여 장기간 가속상태가 지속되는데 이 경우에 가변피치 프로펠러를 채용하면 주기의 토크 리치를 회피할 수 있다.

2) 자동화 및 조선성능 측면

가변피치 프로펠러의 경우 날개각의 제어에 의하여 주기관 조종조작을 전진 전속으로부터 후진전속까지 연속적으로 행할 수 있다. 후진시 주기의 역전조작이 필요 없으므로 브리지 제어가 용이하게 됨에 따라 인력절약에 도움이 되고 과부하 보호장치나 자동부하 제어장치의 장비에 의하여 한층 효율적인 자동운전이 가능하게 된다. 또한 프로펠러 회전수와 프로펠러 피치와의 조합에 의한 자유도가 높은 제어가 가능하기 때문에 전자계산기와 연동으로 여러 가지 자동조선에 적합하다.

선박을 긴급히 정지시킬 필요가 있을 경우 날개각 조종레버를 후진 최대까지

옮기는 것만으로도 수 십초 이내에 유효한 제동력을 얻을 수 있기 때문에 후진 발령 후 유효한 제동력을 얻을 때까지 몇 분이 소요되는 경우도 있는 고정피치 프로펠러에 비하여 정선능력이 우수하다. 특히 대형 저출력선에서는 배의 관성력이 크고 타력에 의한 선체운동이 쉽게 멈추지 않기 때문에 이 긴급정선능력은 중요하다. 또한 긴급정선능력과 더불어 주기의 저출력운전이 가능함으로 협수역 항해에서의 안전성이 증가함과 안벽에 접안 또는 이안하는 시간을 단축할 수 있다.

근래 선체진동의 경감과 진동정도를 유지한 채 선체와 프로펠러와의 틈을 작게 하고 효율이 높은 저회전 대직경 프로펠러를 장비할 목적으로 하이스큐 프로펠러가 채용되고 있다. 하이스큐 고정피치 프로펠러의 경우 날개의 휨에 의한 피치의 오차를 일으킬 염려가 있다든지 역전시 추력이 약간 작게 되는 등의 문제가 발생할 수 있다. 그러나 가변피치 프로펠러의 경우 피치는 용이하게 수정할 수 있고 또한 역전의 필요도 없기 때문에 이러한 문제가 없다.

3) 주기관 동력계통 측면

가변피치 프로펠러의 경우 날개각의 중립 운전 및 정 회전수 운전이 가능하다. 주축 회전방향을 일정한 방향으로 유지한 채 후진을 행할 수 있으므로 주기관의 역전기구 또는 역전 감속기가 필요 없다. 디젤기관선의 경우 전후진 조작에 있어 주기의 시동 정지가 필요 없게 되고, 시동용 공기탱크를 소형으로 할 수 있어 공간이 절약된다. 또한 주기관의 기동 회수를 감소할 수 있는 것, 토크리치 운전을 회피할 수 있는 것, 저속회전 운전을 회피할 수 있는 것, 정선 중에도 날개각 중립의 상태로 난기운전이 가능한 것 등으로 인하여 주기관의 내구연수를 향상시킬 수 있다.

주기역전이 필요 없으므로 과도한 토크변동을 억제할 수 있고 탄성 커플링 장비선의 경우 탄성 커플링의 수명이 길어진다. 또한 주기용 보조 블로워를 장비하지 않는 디젤기관선에서는 역전에 따른 배기가스농도의 상승이 적어 공해 대책상 유리하다.

주축 구동발전기의 채용이 용이하며 선내 동력을 일원화하기 쉬운데, 이 경우에 과부하 보호장치 또는 자동부하 제어장치를 장비함으로써 주기의 회전수

변동을 억제할 수 있고, 또한 주축구동 발전기 뿐만 아니라 각종 보기를 구동할 경우 용이하게 주기출력을 이용할 수 있다.

4) 구조상의 문제

가변피치 프로펠러의 경우 유압제어를 위하여 변절기구를 프로펠러 보스 내부 및 축계에 장비하기 때문에 구조가 복잡하고 중량도 증가한다. 따라서 설계 제작상 주의해야 할 사항이 많으며 부품수도 많아 설계, 제작, 설치의 전공정에 걸쳐 관리를 철저히 하여야하며 예비품의 수량과 종류가 많아져서 예비품의 보관공간의 증대 및 관리작업이 증가한다.

가변피치 프로펠러는 고정피치 프로펠러에 비하여 무게가 무거우며 축계 배치상 특히 주의를 기울여야 하며 프로펠러 보스 내부에 기름이 들어있는 형식의 가변피치 프로펠러에서는 고장 발생시 기름 누설의 우려도 있다.

가변피치 프로펠러의 일체형 플랜지 붙이 프로펠러축은 축의 발출공사나 검사시에 선외로 뽑아야 하기 때문에 부수 공사로서 통상 타를 떼어내어야 한다. 그리고 선급협회 규정에 의하면 기름 윤활베어링을 갖추고 또한 선미관 시일 장치의 시일 링을 프로펠러축을 뽑지 않고 바꿀 수 있을 경우에는 4년마다 축의 후부 베어링 접촉부의 부분검사를 행하여 8년 만에 축을 완전히 뽑아서 검사할 수 있다고 규정되어 있다. 따라서 배의 수명과 그 기간내의 축발출 검사 회수를 생각할 때 검사에 관련한 부수공사 등으로 특히 불리하다. 또한, 가변피치 프로펠러의 경우 프로펠러축 발출검사 때마다 프로펠러 날개를 떼어내고 변절기구를 검사해야 한다.

1.1.2 가변피치 프로펠러의 경제성

실제의 운항상태에서는 재화조건, 기상조건, 선체오손 등에 의하여 선체저항이 시시각각 변한다. 가변피치 프로펠러는 어떠한 선체저항에 대하여서도 프로펠러 피치를 조절함으로써 주기를 항상 상용출력으로 유지할 수 있다. 이에 반하여 고정피치 프로펠러의 선박에서는 주기 출력을 정격으로 유지하려 하면 토크리치, 연소불량, 열부하 상승이 발생하고 이것을 회피하기 위하여서는 회전수를 낮추지 않을 수 없고 결과적으로 출력저하를 초래하게 된다. 이 때문에 가

변피치 프로펠러는 주기출력을 유리하게 이용할 수 있으므로 운항 일정이 설정되어 있는 선박에서는 평균 선속의 향상을 기대할 수 있다.

가변피치 프로펠러의 경우 배의 운전조건 여하에도 불구하고 프로펠러 피치를 조절함으로써 주기 연료소비율, 프로펠러 추진효율 등을 종합적으로 고려한 최적 효율점에서 운항하는 것이 가능하며 연료소비량의 절감을 기대할 수 있다. 실선에 있어서의 이와 같은 최적 효율점에서의 운항은 자동부하 제어장치를 설치하면 자동적으로 달성되며 황천 항해 중에도 프로펠러 피치를 통상 항해시보다 감함으로서 주기의 토크리치 내지 서징영역의 운전에 의한 연소불량을 피하고 연료소비율의 개선을 피할 수 있기 때문에 연료소비량의 절감을 기대할 수 있다. 또한 브리지로부터의 원격조정이 매우 용이하여 인력절감의 효과 및 조선능력이 높기 때문에 항만에서의 접안, 출항시간이 감소하여 예인선비의 경감을 기대할 수 있으며 안벽에 접안 또는 이안하는 시간의 단축은 운항효율의 상승도 기대할 수 있다.

축 회전수를 일정하게 유지할 수 있으므로 축구동 발전기를 설치하면 연료비와 발전기용 엔진의 보수비를 절감할 수 있을 뿐만 아니라 주기의 역전장치가 필요 없으므로 기동장치를 축소할 수 있다. 또한 주기 발정횟수가 감소하고, 해상조건에 따라 최적의 회전수와 주기출력을 선정할 수 있으며 주기를 적절한 상태로 운전할 수 있기 때문에 주기의 유지비와 보수비가 경감된다.

경년변화에 의한 프로펠러와 선체의 저항증가에 의한 토크리치 대책으로서 고정피치 프로펠러는 날개 선단 절단, 후연 절단 가공 또는 프로펠러 피치 수정이 필요한 경우가 있는데 가변피치는 이와 같은 처치가 불필요하다.

1.1.3 가변피치 프로펠러의 신뢰성

가변피치 프로펠러는 날개가 조립형이기 때문에 동일 프로펠러 직경의 일체형 고정피치 프로펠러에 비하여 주물의 크기가 소형으로 되어 구조성이 좋아진다. 따라서 가변피치 프로펠러의 구조상태는 고정피치 프로펠러보다 좋으며 신뢰성이 높다. 또한 조립형이기 때문에 날개 손상시에 날개만 교환함으로써 보수가 가능하고 예비품을 갖출 경우 고정피치 프로펠러보다 유리하다.

일체형 플랜지에 의하여 프로펠러축에 설치 조립되어 있는 가변피치 프로펠

러는 키이블이 프로펠러축의 원추부에서 볼 수 있는 프레팅 부식 등의 발생문제가 없으며 축의 강도상에 있어서도 신뢰성이 높다.

간혹 가변피치 프로펠러에 관련된 고장 발생이 보고되고 있으나 이들의 대부분이 원격 조종장치에 관련된 것이고 일반적으로 상용의 조종장치 외에 예비의 조종기구 및 기측 조종기구도 갖추고 있으므로 원격조정장치의 고장이 중대사고로 연결되는 일은 별로 없을 것이며 고장난 원격조종장치의 복구는 단시간내에 가능하다.

1.2 연구 내용

본 논문은 가변피치 프로펠러 시스템의 날개에 발생하는 응력과 고유진동을 해석하여 그 특성을 파악하였다. 가변피치 프로펠러 날개의 응력은 날개 강도에 관한 Schoenherr의 식 전개를^[4] 통한 응력의 분포 현상과 유한요소해석을 하여 그 결과를 비교하였으며, 전진상태와 후진상태에서의 날개응력도 해석하여 비교하였다. 그리고 일반적으로 수중과 공기중의 고유진동해석 결과는 진동수의 차이만 있을 뿐 그 경향은 비슷하게 나타남에 따라^[5] 공기중 날개의 고유진동 모드별 해석을 통해 변형 특성을 고찰하였다.

제 2 장 프로펠러 날개의 강도

프로펠러를 설계하는 방법에는, 작은 규모의 프로펠러 시험으로부터 도출한 시험자료를 이용하는 방법과 이론과 시험에 의해 전개된 적절한 형상의 수중익 스크류 프로펠러의 순환이론에 기초하여 계산한 자료에 의하여 설계하는 방법이 있다. 프로펠러의 설계는 보통 한 가지 방법을 사용하거나 두 가지 방법을 조합하여 사용하며, 어떤 방법을 사용하든지 설계의 목적은 최고 효율과 적절한 날개의 강도를 가지게 하는 것이다. 일반적으로 날개의 강도가 요구 됨에 따라 효율이 저하되므로 설계자는 설계 초기단계에서 요구하는 강도에 적절한 날개 최소 두께를 계산하여야 한다.

힘과 모멘트에 의한 계산은 날개의 단면에서 fiber 응력에 의한 질량 효과를 고려하여 유체역학적으로 도출하고 있으나, 수학적 복잡성과 요구되는 방법에 따라 시간의 소요량은 다르다. 그래서 간단한 방법으로 날개를 추력과 토크가 날개의 반경방향으로 분포되는 외팔보라고 취급하며, 더 발전시키면 날개를 외팔보라고 가정하고 Taylor의 계산식에^[6] 의해 양력과 인력이 작용한다고 본다. 그리고 Taylor의 shell 이론에^[7] 의한 날개를 변하는 힘이 분포된 얇은 shell로 가정한다. 이 방법들의 적용에는 날개의 응력상태를 대략적인 상태로 단순화하여 계산하기 때문에 이점과 단점이 있으나 실제적으로 다양한 영향을 받는 유체속의 날개 진동에 의한 동적응력을 정확히 계산하기에는 불가능하다.

Taylor는 프로펠러 날개를 반경방향으로 추력과 토크가 선형적으로 분포되는 외팔보라고 가정하였고 추력과 토크에 의해 굽힘모멘트가 발생한다고 하였다. 또한 타원형의 날개 경사로 인해 원심력에 의한 굽힘모멘트도 작용한다고 보았다.

2.1 추력과 토크에 의한 굽힘모멘트

2.1.1 추력에 의한 전단력과 굽힘모멘트

추력과 토크에 의한 힘은 양력의 요소이며, 이론적 양력은 Taylor의 이론^[6]을 이용하여 계산하는데 반경방향으로 양력의 분포를 나타내면 **Fig. 2.1**과 같다. 또한 추력 분포곡선은 다양한 설계 요소와 설계자에 따라 다르게 나타나고 있으나 근본적으로 크게 다르지 않으며 비슷한 경향을 보이고 있다. 따라서 여러 가지 설계 변수면에서 추력 분포는 상대적으로 큰 영향을 미치지 못하며 다양한 추력 분포곡선에서 평균값을 도출하였고 그 결과는 다음과 같다.^[8]

$$y_t = 3.5x^2 \sqrt{1-x} \quad (2.1)$$

여기서, y_t : 임의 반경에서의 추력비

x : r/R , R 은 반경

Fig. 2.2에 보이는 바와 같이 **Fig. 2.1**과 식 (2.1)을 비교하여 보면 실용적인 목적에 적합함을 알 수 있다. 식 (2.1)에 날개의 단위 길이당 평균 추력을 곱하면 추력 분포식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{dT}{z} = 3.5k_t x^2 \sqrt{1-x} R dx \quad (2.2)$$

여기서, T : 프로펠러 추력

z : 날개의 수

k_t : 날개 단위 길이당 추력

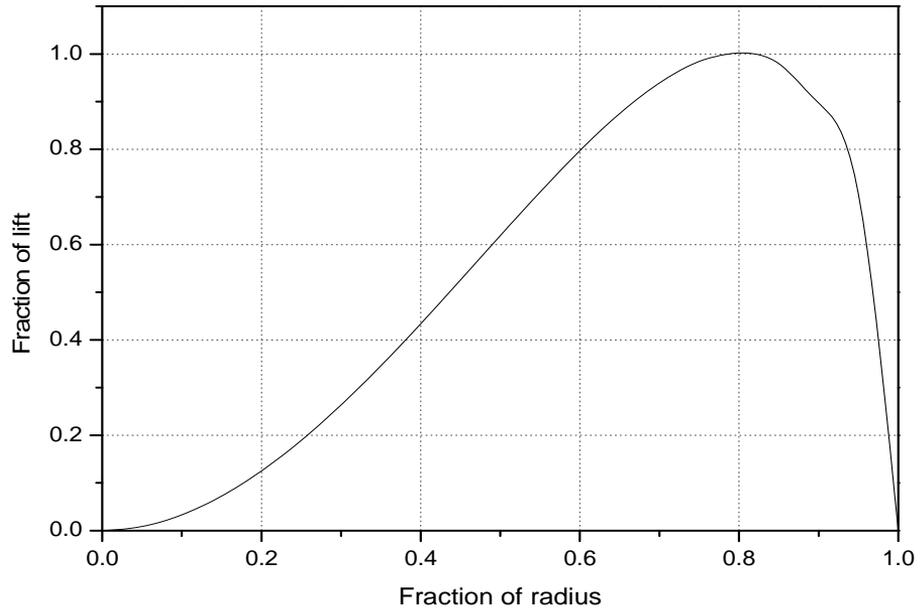


Fig. 2.1 Lift distribution for ship propeller

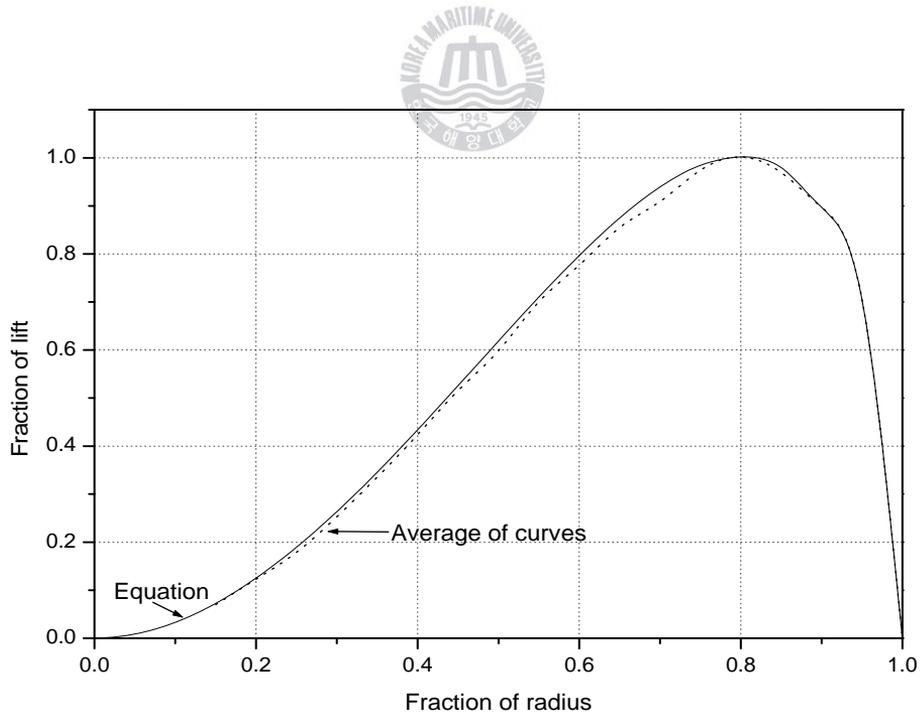


Fig. 2.2 Average thrust distribution

식 (2.2)를 $x=x_0$ 에서 $x=1$ 까지 적분하면 식 (2.3)이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{z} &= 3.5 R k_t \int_{x_0}^1 x^2 \sqrt{1-x} dx \\ &= R k_t \left[\frac{1}{15} (8+4x_0+3x_0^2-15x_0^3) \sqrt{1-x_0} \right] \\ &= R k_t \phi_1(x_0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

식 (2.3)의 우변항은 날개 반경 r_0 에서 반경 끝까지의 추력이고, 이것은 보 (beam) 이론에^[9] 의하여 반경 r_0 인 단면에서의 전단력과 같으며 식 (2.4)로 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} S_{t_0} &= R k_t \phi_1(x_0) \\ S_{t_h} &= R k_t \phi_1(x_h) \end{aligned} \right\} \tag{2.4}$$

여기서, S_{t_0} : 반경 r_0 에서 전단력

S_{t_h} : 허브 반경 r_h 에서의 전단력



식 (2.3)과 식 (2.4)에서 k_t 의 값은 아직 알 수 없으나 날개당 프로펠러 추력은 허브에서의 전단력과 같으므로 식 (2.4)에서 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$k_t = \frac{S_{t_h}}{R\phi_1(x_h)} = \frac{T}{zR\phi_1(x_h)} \tag{2.5}$$

$$S_{t_0} = \frac{T \phi_1(x_0)}{z \phi_1(x_h)} \tag{2.6}$$

보 (beam) 이론에서 나온 결과를 확장하면, 반경 r_0 인 단면에서의 굽힘모멘트는 식 (2.2)를 2번 적분하면 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
M_{t_0} &= R \int_{x_0}^1 S_{t_x} dx = 3.5R^2 k_t \int_{x_0}^1 \int_x^1 x^2 \sqrt{1-x} dx dx \\
&= \frac{1}{15} R^2 k_t \int_{x_0}^1 (8 + 4x + 3x^2 - 15x^3) \sqrt{1-x} dx \\
&= R^2 k_t \left[\frac{2}{45} (8 - 8x_0 - 3x_0^2 - 2x_0^3 + 5x_0^4) \sqrt{1-x_0} \right] \\
&= R^2 k_t \phi_2(x_0) \tag{2.7}
\end{aligned}$$

식 (2.5)의 k_t 값을 식 (2.7)에 대입하여 추력에 의한 굽힘모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned}
M_{t_0} &= \frac{TR}{z} \frac{\phi_2(x_0)}{\phi_1(x_h)} \\
M_{t_h} &= \frac{TR}{z} \frac{\phi_2(x_h)}{\phi_1(x_h)}
\end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$



2.1.2 토크에 의한 전단력과 굽힘모멘트

2.1.1 과 같은 방식으로 토크에 의한 전단력과 굽힘모멘트를 구할 수 있으며 식에 의해서 평균 토크 분포곡선을 나타낼 수 있으나 추력과 토크는 독립적인 인자가 아니고 양력의 요소이기 때문에 날개 효율에 의해 추력 분포곡선으로부터 토크 분포곡선을 도출할 수 있다. 따라서 날개 효율의 정의에 따라 식 (2.9)로 나타내며

$$e_e = \frac{v_a dT}{2\pi n d Q} = \frac{v_a dT}{2\pi n R x d F_q} \tag{2.9}$$

여기서, Q : 프로펠러 토크

F_q : 토크에 상응하는 힘

v_a : 전진속도

n : 초당 회전수

식 (2.9)를 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dF_q}{z} &= \frac{1}{e_e} \left[\frac{v_a}{nD} \right] \frac{dT}{z\pi x} \\ &= \frac{1}{e_e} J \frac{dT}{z\pi x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

여기서, e_e : 날개 효율

J : 프로펠러 전진계수

D : 프로펠러 직경

식 (2.10)과 식 (2.2)를 결합시키면 식 (2.11)을 얻을 수 있다.

$$\frac{dF_q}{z} = 3.5 \frac{JR}{\pi e_e} k_t x \sqrt{1-x} dx \quad (2.11)$$

위 식에서 e_e 값을 가정할 수 있고, 순환이론에 의하면 최고 효율은 적절한 피치에서 e_e 의 값이 일정할 때 얻어진다. 그리고 이 이론은 실용적 설계에 널리 사용되고 있고 전부는 아니지만 대부분의 설계에서 e_e 의 값을 대략적으로 일정하다고 가정한다. 이것을 반경에는 독립적이지만 프로펠러 효율 e 에 비례하는 것으로 가정하면 식 (2.11)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dF_q}{z} &= 3.5 \left[\frac{JR}{\pi e} \right] k_q x \sqrt{1-x} dx \\ &= 3.5 A k_q x \sqrt{1-x} dx \end{aligned} \quad (2.12)$$

k_q 는 k_t 와 e 의 비례값인 e_e 의 결합에 의해 일정한 값이 되고 식 (2.12)는 Kretschmer의 자료에^[8] 의해 식의 타당성을 확인할 수 있다.

2.1.1에서의 방식으로 x 에 따른 토크 값을 유추하면 토크에 의한 전단력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
S_{q_0} &= 3.5 Ak_q \int_{x_0}^1 x \sqrt{1-x} dx \\
&= Ak_q \left[\frac{7}{15} (2+x_0-3x_0^2) \sqrt{1-x_0} \right] \\
&= Ak_q \psi_1(x_0)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

그리고 허브에서 전단력과 날개의 추력이 같다고 보면 k_q 와 전단력 S_{q_0} 는 각각 다음과 같다.

$$k_q = \frac{F_q}{zA\psi_1(x_h)} \tag{2.14}$$

$$S_{q_0} = \frac{F_q \psi_1(x_0)}{z \psi_1(x_h)} \tag{2.15}$$

따라서 토크에 의한 굽힘모멘트는 식 (2.12)를 2번 적분하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
M_{q_0} &= 3.5Ak_q \int_{x_0}^1 \int_x^1 x \sqrt{1-x} dx dx \\
&= \frac{7}{15} ARk_q \int_{x_0}^1 (2+x-3x^2) \sqrt{1-x} dx \\
&= ARk_q \left[\frac{2}{15} (4-5x-2x_0^2+3x_0^3) \sqrt{1-x_0} \right] \\
&= ARk_q \psi_2(x_0)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

식 (2.14)의 k_q 값을 식 (2.16)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$M_{q_0} = R \frac{F_q \psi_2(x_0)}{z \psi_1(x_h)} \tag{2.17}$$

식 (2.17)은 토크 힘인 F_q 에 대한 굽힘모멘트이며, 일반적으로 이 힘은 명시적으로 알려져 있지 않기 때문에 프로펠러 토크 Q 또는 마력 P 에서 S_{q_0} 와 M_{q_0} 를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_{q_0} &= S_{q_0}(\overline{r_{q_0}} - r_0) \\ &= S_{q_0}R(\overline{x_{q_0}} - x_0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

여기서, $\overline{r_{q_0}}$: 중심에서 반경방향 거리

앞서 유도한 M_{q_0} 와 S_{q_0} 를 식 (2.18)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$\left. \begin{aligned} \overline{x_{q_0}} &= x_0 + \frac{\psi_2(x_0)}{\psi_1(x_0)} \\ \overline{x_{q_h}} &= x_h + \frac{\psi_2(x_h)}{\psi_1(x_h)} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

프로펠러 토크 Q 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q = F_{q_h} \overline{r_{q_h}} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} F_{q_h} &= \frac{Q}{R \overline{x_{q_h}}} \\ &= \frac{Q \psi_1(x_h)}{R [x_h \psi_1(x_h) + \psi_2(x_h)]} \\ &= \frac{Q \psi_1(x_h)}{R \phi_1(x_h)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$S_{q_0} = \frac{Q \psi_1(x_0)}{zR \phi_1(x_h)} \quad (2.22)$$

$$M_{q_0} = \frac{Q \psi_2(x_0)}{z \phi_1(x_h)} \quad (2.23)$$

여기서, P, e, H 를 다음과 같이 정의하고

$$P = \frac{2\pi QN}{33,000} \quad (2.24)$$

$$e = \frac{v_a T}{2\pi Qn} \quad (2.25)$$

$$H = \frac{16,500P}{Nz} = \frac{Q\pi}{z} \quad (2.26)$$

식 (2.15), (2.8), (2.22), (2.23)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$S_{i_0} = \frac{He}{RJ} \frac{\phi_1(x_0)}{\phi_1(x_h)} = \frac{He}{RJ} \Gamma_{i_0} \quad (2.27)$$

$$M_{i_0} = \frac{He}{J} \frac{\phi_2(x_0)}{\phi_1(x_h)} = \frac{He}{J} \Omega_{i_0} \quad (2.28)$$

$$S_{q_0} = \frac{H}{R\pi} \frac{\psi_1(x_0)}{\phi_1(x_h)} = \frac{H}{R} \Gamma_{q_0} \quad (2.29)$$

$$M_{q_0} = \frac{H}{\pi} \frac{\psi_2(x_0)}{\phi_1(x_h)} = H\Omega_{q_0} \quad (2.30)$$



또한 앞의 각 식에서의 ϕ 및 ψ 함수값은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x_0) &= \frac{1}{15} (8 + 4x_0 + 3x_0^2 - 15x_0^3) \sqrt{1-x_0} \\ \phi_1(x_h) &= \frac{1}{15} (8 + 4x_h + 3x_h^2 - 15x_h^3) \sqrt{1-x_h} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

$$\phi_2(x_0) = \frac{2}{45} (8 - 8x_0 - 3x_0^2 - 2x_0^3 + 5x_0^4) \sqrt{1-x_0} \quad (2.32)$$

$$\psi_1(x_0) = \frac{7}{15} (2 + x_0 - 3x_0^2) \sqrt{1-x_0} \quad (2.33)$$

$$\psi_2(x_0) = \frac{2}{15} (4 - 5x_0 - 2x_0^2 + 3x_0^3) \sqrt{1-x_0} \quad (2.34)$$

그리고 x_0 와 x_h 의 두 가지 변수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Gamma_{t_0} = \frac{\phi_1(x_0)}{\phi_1(x_h)} \quad (2.35)$$

$$\Omega_{t_0} = \frac{\phi_2(x_0)}{\phi_1(x_h)} \quad (2.36)$$

$$\Gamma_{q_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\psi_1(x_0)}{\phi_1(x_h)} \quad (2.37)$$

$$\Omega_{q_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\psi_2(x_0)}{\phi_1(x_h)} \quad (2.38)$$

위 식의 Ω_{t_0} 와 Ω_{q_0} 는 계산하여 일람표를 만들었다.(부록 A)

2.1.3 날개 현에서의 굽힘모멘트

날개의 중요한 응력들은 전단보다 굽힘에 의해 발생하나 예외적으로 매우 넓은 날개에서는 비틀림에 의한 전단응력이 중요하며 굽힘모멘트 M_t 와 M_q 는 회전하는 프로펠러의 추력과 토크의 평면에서 발생된다. 그러나 정적상태에서 가정하였기 때문에 정적인 문제로 취급되며, 이것은 유체력과 원심력의 부하를 받는 고정된 날개로 생각할 수 있다. 따라서 프로펠러를 우회전한다고 가정하면 추력과 토크는 **Fig. 2.3** 과 같이 나타낼 수 있다.

z 축은 현에 평행하고 y 축은 단면의 현에 수직인 새로운 축선을 구축하여 M_t 와 M_q 를 평행요소와 수직요소에 삽입하면 새 축선에서 다음과 같이 각각 유도할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} M_{p_{n0}} &= M_{t_0} \cos\beta_0 + M_{q_0} \sin\beta_0 \\ M_{p_{t0}} &= M_{t_0} \sin\beta_0 - M_{q_0} \cos\beta_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

여기서, β_0 : 반경 r_0 에서의 피치각

식 (2.28)과 (2.30)에 M_{t_0} 와 M_{q_0} 값을 대입하면 다음과 같이 유도되며

$$\left. \begin{aligned} M_{p_{n_0}} &= H \left(\frac{e}{J} \Omega_{t_0} \sin \beta_0 + \Omega_{q_0} \cos \beta_0 \right) \\ M_{p_{l_0}} &= H \left(\frac{e}{J} \Omega_{t_0} \sin \beta_0 - \Omega_{q_0} \cos \beta_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

위 식들을 삼각함수법으로 정리하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} M_{p_{n_0}} &= \frac{H}{\beta_0} \left(\Omega_{t_0} \frac{e}{J} + \Omega_{q_0} \tan \beta_0 \right) = \frac{H}{\beta_0} \Omega_{n_0} \\ M_{p_{l_0}} &= \frac{H}{\beta_0} \left(\Omega_{t_0} \frac{e}{J} \tan \beta_0 - \Omega_{q_0} \right) = \frac{H}{\beta_0} \Omega_{l_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

$$\overline{\beta_0} = \sqrt{1 + \tan^2 \beta_0} \quad (2.42)$$

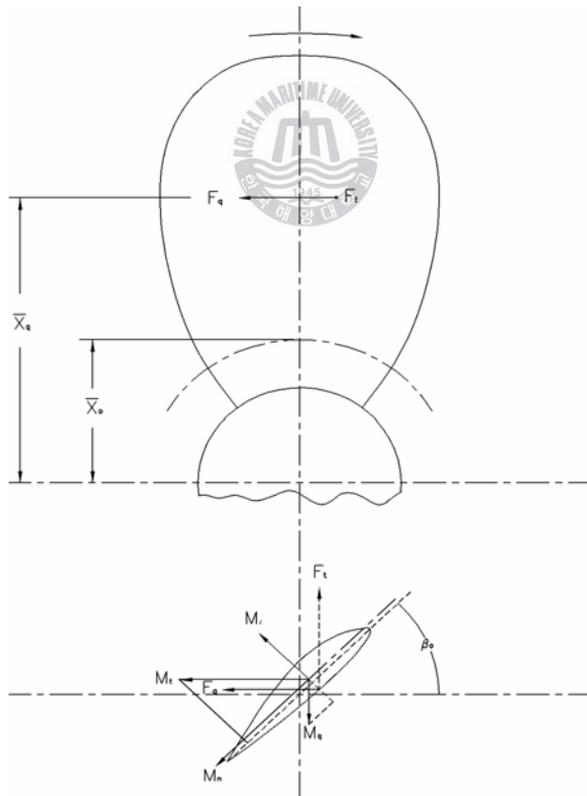


Fig. 2.3 Bending moments due to thrust and torque

2.2 원심력에 의한 굽힘모멘트

원심력과 모멘트는 반경방향의 날개 부피의 분포로 유추할 수 있고 설계에 적용할 수 있는 날개 부피와 무게를 구함으로서 원심력을 구할 수 있다.

2.2.1 날개의 외형과 면적

날개의 외형은 다음과 같이 표시할 수 있다.^[6]

$$b = K_1 R(c+x)(1-x)^m \quad (2.43)$$

여기서, b : 날개폭

R : 반경

x : r/R

c, m, K_1 : 날개 외형을 결정하는 변수

K_1 으로 날개의 전체폭을 조절할 수 있고, $x=0$ 일 때 c 도 날개폭을 조절할 수 있다. 또한 지수 m 으로 최대 날개폭을 조절하여 날개의 형상을 만들 수 있다. 그리고 식 (2.43)을 미분하면 0과 같으므로 식 (2.44)과 같이 되고, m 이 작을 때 x^m 은 반비례로 커지며 이것을 다르게 표현하면 지수 m 이 감소할수록 날개 끝단 쪽으로 넓이가 최대가 된다.

$$x^m = \frac{1-cm}{1+m} \quad (2.44)$$

Fig. 2.4 는 다양한 변수의 영향으로 인한 날개의 형상이다. 상선 프로펠러에서 효율적인 외형은 $c=0.1 \sim 0.2$, $m=0.4 \sim 0.5$ 를 가지며, K_1 값은 평균 날개폭이 요구되는 적절한 값을 사용한다.(일반적으로 1.0~1.2)

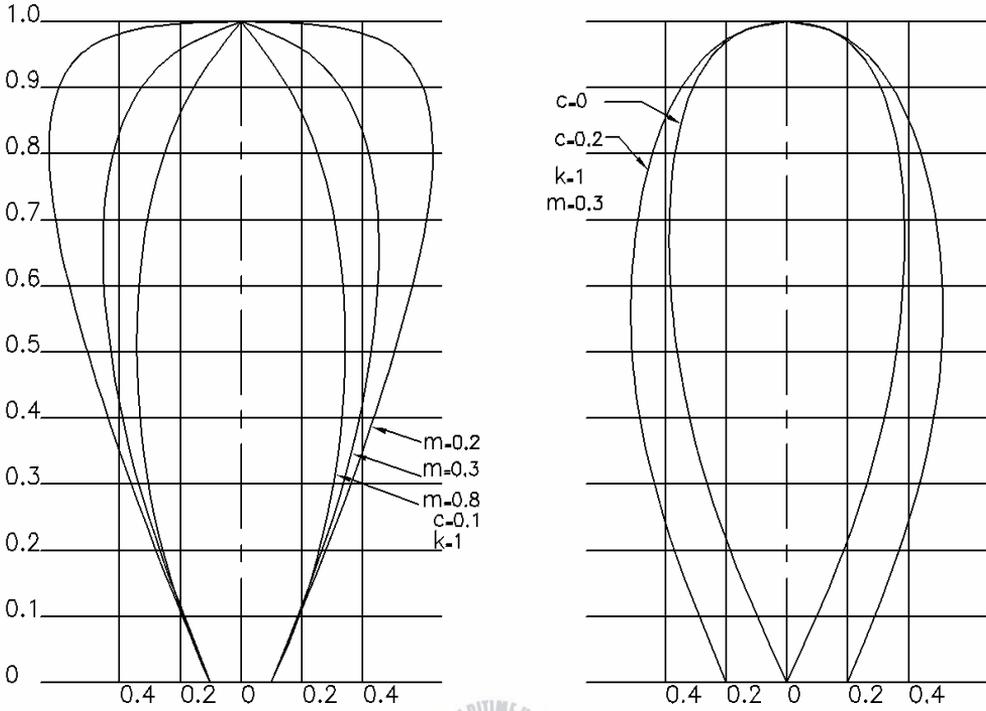


Fig. 2.4 Blade outline for various values of parameters

실제 설계에서 앞서 말한바와 같이 변수 c 와 m 을 정할 수 있다. 그리고 신장면적비나 평균 날개폭 비를 얻을 수 있는 K_1 의 값도 정할 수 있으며 다음과 같이 식 (2.43)을 적분하여 유도한다.

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^R bdr &= K_1 R^2 \int_{x_0}^1 (c+x)(1-x)^m dx \\
 &= K_1 R^2 (1-x_0)^{1+m} \left[\frac{1+c}{1+m} - \frac{1-x_0}{2+m} \right] \\
 &= K_1 R^2 (1-x_0)^{1+m} B_0
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

식 (2.45)는 반경 r_0 에서 날개 외형의 면적이고, 식 (2.45)에서 x_0 를 x_h 로 대체하고 날개의 수 z 를 곱하면 총 날개 신장면적이 되며 날개 면적비와 평균 폭비는 일반적으로 다음과 같이 정의된다.

$$\zeta = \frac{a_e}{\pi R^2} = \frac{K_1 z}{\pi} (1 - x_h)^{1+m} B_h \quad (2.46)$$

$$\mu = \frac{a_e}{2R^2(1-x_h)z} = \frac{K_1}{2} (1-x_h)^m B_h \quad (2.47)$$

여기서, ζ : 전원면적에서 날개 면적비

μ : 평균 날개 폭비

a_e : 날개 신장면적

2.2.2 날개 무게

날개 외형과 면적에서 반경을 통한 최대 날개 두께의 분포로부터 날개 무게를 유도할 수 있다. 샤프트 축에서 동심원의 원형 실린더가 날개들을 통하여 지나고 접선면에서 확장될 때 확장된 날개 단면을 얻을 수 있으며 이 단면의 면적은 식 (2.48)로 나타낼 수 있다.

$$a_s = c_s b t \quad (2.48)$$

여기서, a_s : 단면의 면적

b : 확장된 현의 길이

t : 최대 두께

c_s : 계수

이 식에서 계수 c_s 는 단면 형상을 변화시킬 수 있으나 형상 변화를 위한 c_s 값은 상대적으로 민감하지 않다.

선박용 프로펠러에서 최대 두께 t 는 일반적으로 허브에서 끝단까지 감소하며 두께 변화는 r 과 함께 선형적이거나 비선형적이다. 비선형적인 t 값의 변화

목적은 반경방향으로 날개의 일정한 응력분포를 얻는 것이며 이것을 위해서는 그 유형을 간단하게 나타낼 수 있으나 진동하는 얇은 날개에서는 응력 분포를 정확하게 계산할 수가 없어 그 목적 달성이 어렵다. 반면에 선형적인 변화는 무게가 약간 증가하는 것을 제외하면 안전성 측면에서 응력을 유지하는 경향이 있다. 이런 이유에서 가정상 최대 두께의 비선형적인 감소는 상선에서는 선급 규칙보다 예외적이다. 그래서 이 측면에서 목적 달성을 위하여 합리적으로 선형적인 변화 t 를 가정하였다.

Fig. 2.5 는 최대 날개 두께의 분포를 나타내며 임의의 반경 x 에서 두께 t 는 다음의 식으로 나타난다.

$$t = t_a(1-x) + t_1x \quad (2.49)$$

여기서, t_a : 최대 날개 두께

t_1 : 끝단의 두께

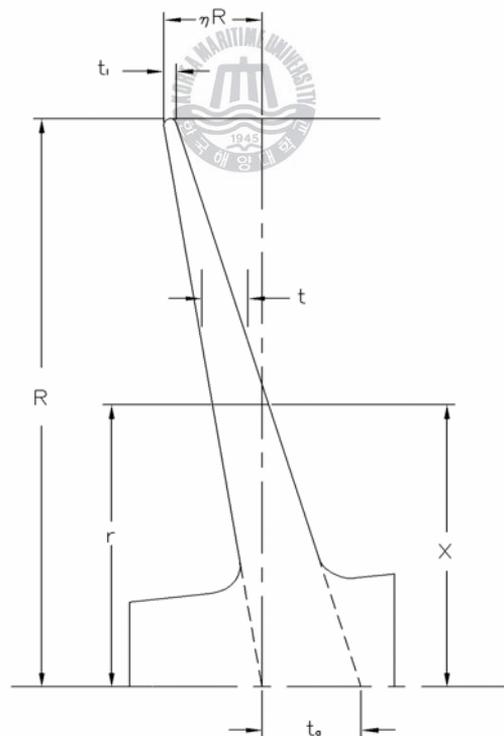


Fig. 2.5 Radial distribution of maximum blade thickness

좀 더 간편하게 무차원화 시키면 아래와 같다.

$$\tau = \frac{t_a}{2R} \quad (2.50)$$

$$\varepsilon = \frac{t_1}{t_a} = \frac{t_1}{2R\tau} \quad (2.51)$$

위 식을 식 (2.49)에 넣으면 식 (2.52)가 되며 x, τ, ε 은 일정한 변수이다.

$$t = 2R\tau(1-x+\varepsilon x) \quad (2.52)$$

날개 단면의 무게를 가지는 면적 a_s 와 반경방향의 두께 dr 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$dW = \gamma a_s dr = \gamma a_s R dx \quad (2.53)$$

여기서, γ : 날개 재료의 비중량

식 (2.43), (2.52), (2.53)을 조합하면 식 (2.54)가 된다.

$$dW = 2\gamma c_s \tau K_1 R^3 (c+x)(1-x)^m (1-x+\varepsilon x) dx \quad (2.54)$$

그리고 c_s 가 일정하다고 가정하면 식 (2.55)가 된다.

$$W = K_2 R^3 \int_{x_0}^1 (c+x)(1-x)^m (1-x+\varepsilon x) dx \quad (2.55)$$

$$K_2 = 2\gamma c_s \tau K_1 \quad (2.56)$$

식 (2.55)를 적분하여 산출하면 다음과 같고 C_0 는 식 (2.58)과 같다.

$$W_0 = K_2 R^3 (1-x_0)^{1+m} [C_0 + \varepsilon(B_0 - C_0)] \quad (2.57)$$

$$C_0 = (1-x_0) \left[\frac{1+c}{2+m} - \frac{1-x_0}{3+m} \right] \quad (2.58)$$

2.2.3 원심력

원심력 F_c 는 무게 dW 의 날개 단면에 의해 발생한다. 이것을 정의하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} dF_c &= \frac{(2\pi n)^2}{g} r dW \\ &= \frac{(2\pi n)^2}{g} R x dW \end{aligned} \quad (2.59)$$

위 식에 식 (2.54)를 대입하면 식 (2.60)이 되며 적분하면 식 (2.61)이 된다.

$$dF_c = \frac{(2\pi n)^2}{g} K_2 R^4 (c+x)(1-x)^m (1-x+\varepsilon x) x dx \quad (2.60)$$

$$F_c = K_3 R^4 \int_{x_0}^1 (c+x)(1-x)^m (1-x+\varepsilon x) x dx \quad (2.61)$$

$$K_3 = \frac{(2\pi n)^2}{g} K_2 \quad (2.62)$$

식 (2.61)로부터 원심력을 다음과 같이 표현할 수 있으며

$$F_{c_0} = K_2 R^4 (1-x_0)^{1+m} [C_0 - E_0 + \varepsilon(B_0 - 2C_0 + E_0)] \quad (2.63)$$

$$E_0 = (1-x_0)^2 \left[\frac{1+c}{3+m} - \frac{1-x_0}{4+m} \right] \quad (2.64)$$

식 (2.63)의 인자들을 다르게 표현하면 (2.65)와 같다.

$$F_{c_0} = \frac{(2\pi n)^2}{g} K_2 R^4 [C_0 + \varepsilon(B_0 - C_0)] \left[1 - \frac{E_0 + \varepsilon(C_0 - E_0)}{C_0 + \varepsilon(B_0 - C_0)} \right] \quad (2.65)$$

식 (2.65)와 식 (2.57)을 비교하면 F_{c_0} 의 값은 식 (2.66)과 같다.

$$F_{c_0} = \frac{(2\pi n)^2}{g} R W_0 x_{c_0} \quad (2.66)$$

2.2.4 원심력에 의해 발생하는 모멘트

일반적으로 원심력 F_{c_0} 는 직접적인 인장응력과 굽힘응력을 발생하며 후자는 날개의 전방 및 후방의 경사로부터 생겨난다. 경사와 스큐에 의한 굽힘모멘트는 쉽게 계산되고 비대칭 부피 분포에 의한 계산은 어려우나 다행히 비대칭 부피 분포에 의한 모멘트는 상대적으로 선박용 프로펠러의 날개에서는 크지 않으며 이것은 알려지지 않은 다양한 응력의 결합에 의해 발생된다. 그리고 설계에서 변화를 일으킬만한 변수는 아니므로 비대칭 부피 분포에 의한 굽힘모멘트는 무시할 만하고 경사와 스큐에 의해 발생하는 굽힘모멘트는 고려하여야 한다.

2.2.5 날개 경사에 의한 굽힘모멘트

일반적으로 경사는 설계에서 기울어짐으로 볼 수 있으며 Fig. 2.6 에서 경사가 없는 날개의 윤곽은 실선이고 경사가 있는 날개는 점선으로 표시되며 반경 참조선은 직선이다. 반경 r 에서 경사 i 를 다음 식으로 나타내었다.

$$i = \eta r = \eta R x = i_1 x \quad (2.67)$$



여기서, η : 경사각

i_1 : 날개 끝에서 경사

반경방향 dr 의 반경 r 의 단면에 발생하는 원심력을 고려해보면 Fig. 2.6 에서 보이는 것과 같이 후방경사 날개에서 경사가 지면서 dF_c 가 뒤쪽으로 거리 i 만큼 움직이게 되고 이것은 반경의 경사와 같다. $0z$ 축에 대한 xy 평면에서 모멘트는 dF_c 작용선의 이동으로 생기고 다음과 같다.

$$dM_i = dF_c i = dF_c i_1 x \quad (2.68)$$

경사선을 직선으로 가정하면 반경 r_0 에서 $0z$ 에 평행한 축에 대한 모멘트는 다음 식과 같다.

$$dM_i = dF_c(i - i_0) = dF_c i_1(x - x_0) \quad (2.69)$$

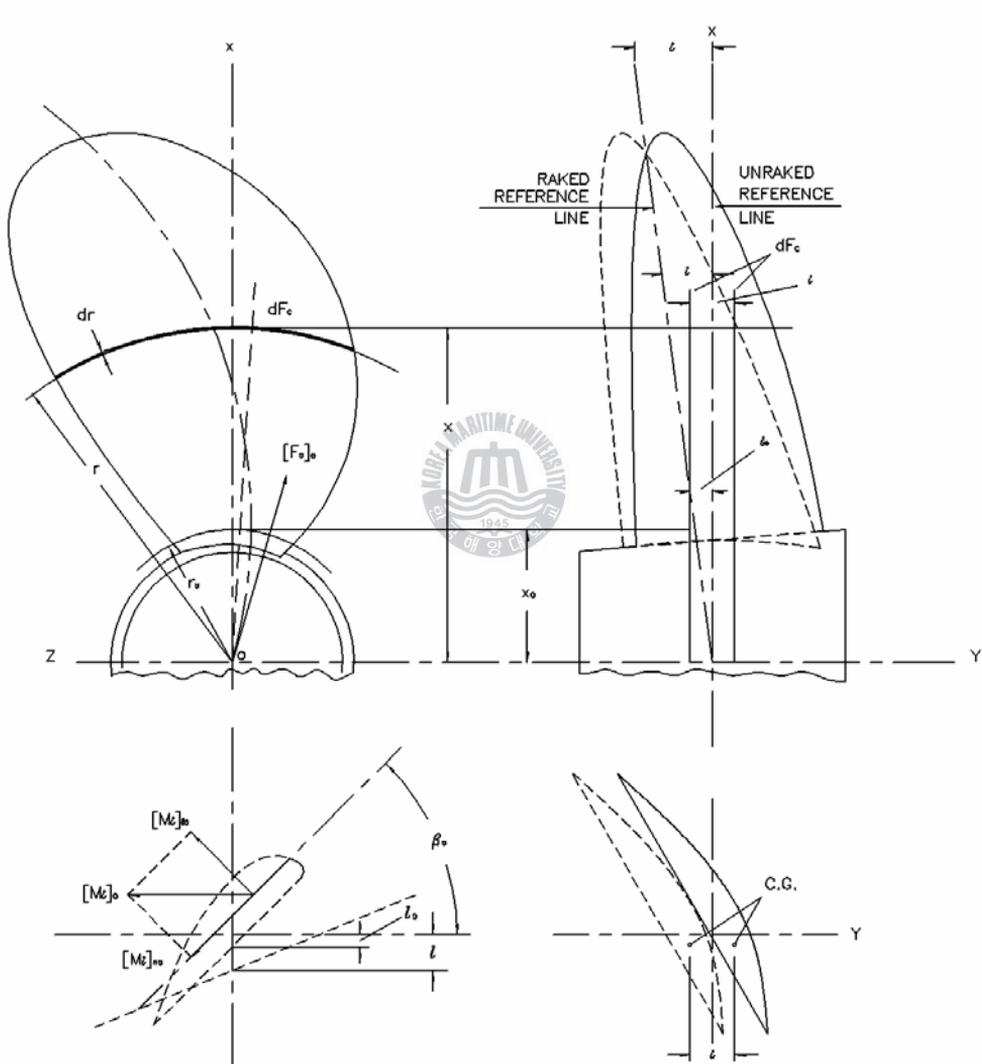


Fig. 2.6 Bending moment due to rake

식 (2.69) 에 식 (2.60)의 dF_c 를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 dM_i &= K_3 i_1 R^4 [(c+x)(1-x)^m(1-x+\varepsilon x)x^2 dx \\
 &\quad - x_0(c+x)(1-x)^m(1-x+\varepsilon x)x dx] \\
 M_i &= K_3 i_1 R^4 \left[\int_{x_0}^1 (c+x)(1-x)^m(1-x+\varepsilon x)x^2 dx \right. \\
 &\quad \left. - x_0 \int_{x_0}^1 (c+x)(1-x)^m(1-x+\varepsilon x)x dx \right] \\
 M_{i_0} &= K_3 i_1 R^4 (1-x_0)^{1+m} [C_0 - 2E_0 + F_0 + \varepsilon(B_0 - 3C_0 + 3E_0 - F_0)] \\
 &\quad - K_3 i_1 R^4 x_0 (1-x_0)^{1+m} [C_0 - E_0 + \varepsilon(B_0 - 2C_0 + E_0)] \\
 &= K_3 R^4 i_1 (1-x_0)^{1+m} [C_0 - E_0 + \varepsilon(B_0 - 2C_0 + E_0)] \\
 &\quad \times \left[1 - \frac{E_0 - F_0 + \varepsilon(C_0 - 2E_0 + F_0)}{C_0 - E_0 + \varepsilon(B_0 - 2C_0 + E_0)} - x_0 \right] \tag{2.70}
 \end{aligned}$$

경사에 의한 모멘트는 다음 식과 같다.

$$M_{i_0} = i_1 F_{c_0} (\overline{x_{i_0}} - x_0) \tag{2.71}$$

$$\overline{x_{i_0}} = 1 - \frac{E_0 - F_0 + \varepsilon(C_0 - 2E_0 + F_0)}{C_0 - E_0 + \varepsilon(B_0 - 2C_0 + E_0)} \tag{2.72}$$

식 (2.72)에서 $\overline{x_{i_0}}$ 는 F_{c_0} 의 해당 작용점에서의 x 값이다.

앞에서 나타낸 모멘트 M_{i_0} 는 xy 평면에서 모멘트이며 반경 x_0 에서 단면의 굽힘모멘트를 구하기 위해 **Fig. 2.6** 에서 보이는 것과 같이 M_{i_0} 를 통해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned}
 M_{i_{n0}} &= M_{i_0} \cos \beta_0 \\
 M_{i_0} &= M_{i_0} \sin \beta_0
 \end{aligned} \right\} \tag{2.73}$$

2.2.6 스큐에 의한 굽힘모멘트

프로펠러는 그 외형이 가로축에서 반경방향의 기준선에 비대칭일 때 스큐라고 한다. 스큐는 Fig. 2.7에 보이는 바와 같이 각각의 나선을 따라 단면이 연속적으로 놓여진 것으로 볼 수 있고, 여기서 굽힘모멘트는 단면의 현에 수직인 평면에서 스큐에 의해 발생된다. 그리고 이 단면의 응력은 매우 작고 이 평면의 다른 모멘트와 비교하면 무시할 수 있으며 단면의 현에 평행한 평면에서 굽힘모멘트는 이 평면의 다른 모멘트처럼 같은 차수이다. 스큐에 따른 모멘트는 적절한 스큐 분포의 가정을 통해 유도할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 M_{j_{i_0}} &= \frac{s_1 \cos \beta_1 F_{c_0}}{(1-x_s) \cos \beta_0} x_0 \left[1 - \frac{E_0 - F_0 + \varepsilon(C_0 - 2E_0 + F_0)}{C_0 - E_0 + \varepsilon(B_0 - 2C_0 + E_0)} - x_s \right] \\
 &= \frac{s_1 \cos \beta_1 F_{c_0}}{(1-x_s) \cos \beta_0} x_0 (\overline{x_{i_0}} - x_s)
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

여기서, s_1 : 날개 끝의 스큐

β_1 : 피치각

x_s : 스큐선이 반경방향의 기준선을 지나는 x 값



2.2.7 원심력에 의한 굽힘모멘트

앞의 식에서 나온 날개 변수의 조합인 B_0, C_0, E_0, F_0 는 다음과 같으며

$$B_0 = \frac{1+c}{1+m} - \frac{1-x_0}{2+m} \tag{2.75}$$

$$C_0 = (1-x_0) \left[\frac{1+c}{2+m} - \frac{1-x_0}{3+m} \right] \tag{2.76}$$

$$E_0 = (1-x_0)^2 \left[\frac{1+c}{3+m} - \frac{1-x_0}{4+m} \right] \tag{2.77}$$

$$F_0 = (1-x_0)^3 \left[\frac{1+c}{4+m} - \frac{1-x_0}{5+m} \right] \tag{2.78}$$

B_0, C_0, E_0, F_0 는 변수의 조합으로 나타나므로 $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ 로 정의하면 다음과 같다.

$$\Sigma_0 = C_0 + \varepsilon(B_0 - C_0) \quad (2.79)$$

$$\Sigma_{1_0} = C_0 - E_0 + \varepsilon(B_0 - 2C_0 + E_0) \quad (2.80)$$

$$\Sigma_{2_0} = E_0 - F_0 + \varepsilon(C_0 - 2E_0 + F_0) \quad (2.81)$$

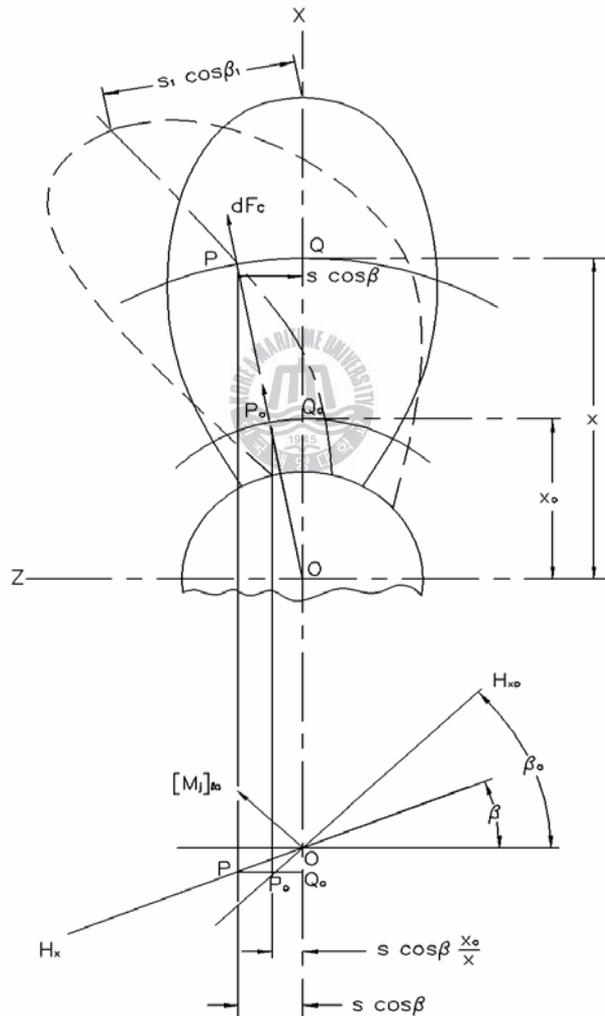


Fig. 2.7 Bending moment due to skew

위 값들을 식 (2.57), (2.63)에 대입하여 변환하면 다음과 같고

$$W_0 = K_2 R^3 (1-x_0)^{1+m} \Sigma_0 \quad (2.82)$$

$$F_{c_0} = \frac{(2\pi n)^2}{g} K_2 R^4 (1-x_0)^{1+m} \Sigma_{1_0} \quad (2.83)$$

여기서, 계수 K_2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_2 &= 2\gamma c_s \tau K_1 \\ &= \gamma c_s K_1 \frac{t_a}{R} \end{aligned} \quad (2.84)$$

F_{c_0} 는 변수 τ 또는 t_a 를 포함하고 있다. 그러나 순차적인 해석을 위해서는 두께변수 t_0 가 필요하다. 그래서 식 (2.52)에서 변형하면 식 (2.85)가 되며

$$\tau = \frac{t}{2R(1-x+\epsilon x)} \quad (2.85)$$



식 (2.84)를 식 (2.83)에 대입하면 다음과 같이 대체할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{c_0} &= \frac{(2\pi n)^2}{g} \gamma c_s K_1 R^3 \frac{(1-x_0)^{1+m}}{1-x_0(1-\epsilon)} \Sigma_{1_0} t_0 \\ &= \left[\frac{K_1 \gamma c_s N^2 R^3}{2934} \right] \left[\frac{(1-x_0)^{1+m} \Sigma_{1_0}}{1-x_0(1-\epsilon)} \right] t_0 \\ &= K_4 \Sigma_{3_0} t_0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

그리고 굽힘모멘트를 Σ 표기법으로 바꾸면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 M_{i_0} &= i_1 F_{c_0} \left[1 - \frac{E_0 - F_0 + \epsilon(C_0 - 2E_0 + F_0)}{C_0 - E_0 + \epsilon(B_0 - 2C_0 + E_0)} - x_0 \right] \\
 &= i_1 K_4 \Sigma_{3_0} \left[1 - \frac{\Sigma_{2_0}}{\Sigma_{1_0}} - x_0 \right] t_0 \\
 &= i_1 K_4 \Sigma_{3_0} \Sigma_{4_0} t_0
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

식 (2.87)을 경사에 의한 굽힘모멘트 식 (2.73)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned}
 M_{i_{n0}} &= M_{i_0} \cos \beta_0 = \frac{1}{\beta_0} i_1 K_4 \Sigma_{3_0} \Sigma_{4_0} t_0 \\
 M_{i_{t0}} &= \frac{\tan \beta_0}{\beta_0} i_1 K_4 \Sigma_{3_0} \Sigma_{4_0} t_0
 \end{aligned} \right\} \tag{2.88}$$

그리고 스큐에 의한 모멘트 식에서도 위와 같이 계산하면 다음과 같다.

$$M_{j_0} = \frac{s_1 \cos \beta_1}{\beta_0 (1 - x_s)} K_4 \Sigma_{3_0} x_0 (\Sigma_{4_0} + x_0 - x_s) \tag{2.89}$$

마지막으로 경사와 스큐에 의한 굽힘모멘트를 구하면 아래와 같이 된다.

$$M_{c_{n0}} = M_{i_{n0}} = \frac{1}{\beta_0} i_1 K_4 \Sigma_{3_0} \Sigma_{4_0} t_0 \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
 M_{c_{t0}} &= M_{i_{t0}} \pm M_{j_0} \\
 &= \frac{K_4 \Sigma_{3_0}}{\beta_0} \left[\Sigma_{4_0} i_1 \tan \beta_0 \pm \frac{s_1 \cos \beta_1}{1 - x_s} \beta^2 x_0 (\Sigma_{4_0} + x_0 - x_s) \right] \\
 &= \frac{1}{\beta_0} K_4 \Sigma_{3_0} \Sigma_{6_0} t_0
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

x_0, c, m, ϵ 의 각 고정값에 대한 $\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_4$ 의 값을 부록 B에 첨부하였다.

2.3 날개의 두께

정상상태에서 날개의 적절한 강도를 보증하기 위해 요구되는 날개의 최소 두께를 위한 식을 유도하기 위해 이전에 추론된 힘과 모멘트의 방정식들이 이용되며 이 식을 유도하기 위해 많은 가정들이 사용되는데 그 중 몇 개는 이미 서술되었다. 그러나 다시 서술하면 다음과 같다.

- (a) 날개는 유체력과 원심력의 영향을 받는 비대칭이고 변하는 교차 단면의 외팔보이다.
- (b) 굽힘모멘트들은 두 개의 평면에 적용되며 그 두 개의 평면은 강도단면의 현에 대해 수직인 평면과 평행한 평면이다.
- (c) 단면에서 수직응력만 적용하고 전단응력은 무시한다.
- (d) 중립축은 강도단면의 중심을 지나는 직선이고 단면의 현에 각각 평행이고 수직이다.
- (e) 관성의 주축과 중립축의 각은 0° 이다.
- (f) 모든 가정들은 Flexure 이론의 적용을 받는다. 즉, 교차단면의 평면은 부하속에 있으며 Hook의 법칙은 유효하다. 그리고 재료는 균질하고 등방성이며 fiber는 다양한 힘의 겹침으로부터 발생하는 응력점에서 이웃하는 fiber에 관계없이 독립적이다.
- (g) 그 단면들은 확장된 원통형 단면과 동등하다.

가정 (a), (b), (c), (f)는 Flexure 이론에서 관습적으로 만들어진 가정들이다. 그리고 가정 (d)도 Flexure 이론에 의해 관습적으로 만들어졌지만 현재 적용을 위해서는 부분적 사실이다. 또한 가정 (c)는 부하의 평면에서 수직선과 관성의 주축 사이의 각이 매우 작은 상대적으로 얇고 넓은 날개에 대략 정당화 된다(2° 정도이거나 더 작다). 그래서 Flexure 이론에 의해 중립축과 관성의 주축 사이의 각 역시 작다. 교차평면에 의해 형성되는 단면보다 확장된 원통형의 단면을 사용하는 것이 설계에서 더 간편한 방법이기 때문에 가정 (g)는 필요하지 않다.

2.3.1 Flexure 이론의 적용

Flexure 이론과 앞의 가정들을 통해 다음의 fiber 응력식을 나타낼 수 있다.^[9]

$$f = \pm \frac{M_n u}{I_n} \pm \frac{M_l w}{I_l} \pm \frac{F_c}{a_s} \quad (2.92)$$

여기서, M_n, M_l : 단면의 현에서 수직평면과 평행평면에서 각각의 굽힘모멘트

u, w : 단면의 원주에서 임의의 점 좌표

I_n, I_l : $U-W$ 축에 대한 단면의 관성모멘트

식 (2.92)는 u 와 w 가 최고일 때 원주의 임의의 점에서 fiber 응력이 가장 크다는 것을 나타낸다. 이 점들은 **Fig. 2.8** 에 ①, ②, ③, ④로 나타냈으며 $m=1, 2, 3, 4$ 이고 u_m 과 w_m 에 의해 이 점들의 좌표인 u, w 를 정하면 최대 fiber 응력은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} f_m &= \pm \frac{M_n u_m}{I_n} \pm \frac{M_l w_m}{I_l} \pm \frac{f_c}{a_s} \\ f_m &= \pm \frac{M_n}{I_n/u_m} \pm \frac{M_l}{I_l/w_m} \pm \frac{F_c}{a_s} \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

I_n/u_m 와 I_l/w_m 의 비는 단면계수이고 단면의 폭과 두께식을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_n}{u_m} &= c_n b t^2 \\ \frac{I_l}{w_m} &= c_l b^2 t \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

c_n 과 c_l 은 단면의 형상에 의존하는 형상요소이고 m 과 함께 변한다.

식 (2.94)를 식 (2.93)에 대입하면 식 (2.95)가 된다.

$$f_m = \frac{M_n}{c_n b t^2} + \frac{M_l}{c_l b^2 t} + \frac{F_c}{c_s b t} \quad (2.95)$$

식을 단순화하기 위해서 (-)부호를 생략했고 세 번째 항의 응력은 인장응력만 나타내며 이것은 모든 응력은 인장응력만 고려하는 것으로 (-)부호를 생략한 것과 같다. 일반적으로 이것은 사실이 아니지만 이 가정하에서 압축을 야기하는 굽힘모멘트로부터 발생하는 부호를 바꿈으로서 식에서 나타낼 수 있다.

M_n, M_l, F_c 의 값들은 식 (2.40), (2.41), (2.90), (2.91), (2.84)에 의해 정의되었다. 이 값들을 식 (2.95)에 대입하면 다음과 같으며

$$f_m = \frac{H\Omega_{n_0}}{\beta_0 c_n b_0 t_0^2} + \frac{i_1 K_4 \Sigma_{3_0} \Sigma_{4_0} t_0}{\beta_0 c_n b_0 t_0^2} + \frac{H\Omega_{l_0}}{\beta_0 c_l b_0^2 t_0} + \frac{K_4 \Sigma_{3_0} \Sigma_{6_0} t_0}{\beta_0 c_l b_0^2 t_0} + \frac{K_4 \Sigma_{3_0} t_0}{c_s b_0 t_0} \quad (2.96)$$

위 식의 각 항을 재조합하여 정리하면 식 (2.97)이 된다.

$$f_m = \frac{H}{\beta_0 b_0 t_0} \left(\frac{\Omega_{n_0}}{c_n t_0} + \frac{\Omega_{l_0}}{c_l b_0} \right) + \frac{K_3 \Sigma_{3_0}}{\beta_0 b_0} \left(\frac{i_1 \Sigma_{4_0}}{c_n t_0} + \frac{\Sigma_{6_0}}{c_l b_0} + \frac{\bar{\beta}_0}{c_s} \right) \quad (2.97)$$

식 (2.97)은 단면의 치수와 운전조건이 주어지면 f_m 을 계산하기 쉽다. 그러나 f_m 이 주어지고 최소 단면 두께가 정해졌을 때, 이것은 다른 식을 유도하기 위해 다른 변수의 항에서 t_0 를 표현한 식 (2.96)이 필요하며 식의 유도는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} U_n &= \frac{H\Omega_{n_0}}{c_n} & U_l &= \frac{H\Omega_{l_0}}{c_l b_0} \\ V_n &= \frac{i_1 K_3 \Sigma_{3_0} \Sigma_{4_0}}{c_n} & V_l &= \frac{K_3 \Sigma_{3_0} \Sigma_{6_0}}{c_l b_0} \\ V_d &= \frac{K_3 \Sigma_{3_0} \bar{\beta}_0}{c_s} & H &= \frac{16,500P}{zN} \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

식 (2.96)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f_m \overline{\beta_0} b_0 t_0^2 = U_n + V_n t_0 + U_l t_0 + V_l t_0^2 + V_d t_0^2 \quad (2.99)$$

$$U_n = t_0^2 \{ \overline{\beta_0} b_0 f_m - (V_l - V_d) \} - t_0 (U_l + V_n) \quad (2.100)$$

여기서, 식 (2.99)에서 t_0^2 의 계수를 A , t_0 의 계수를 B 로 놓고 2차식을 풀면 다음과 같이 된다.

$$t_0 = \frac{B}{2A} + \frac{1}{2A} \sqrt{4U_n A + B^2} \quad (2.101)$$

이 식은 날개 뿌리에서 첫째항과 비교하면 매우 작으므로(약 1%) B^2 항을 생략하면 다음과 같이 간략화할 수 있다.

$$t_0 = \frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{U_n}{A}} \quad (2.102)$$



상기 식 (2.102)에 A , B , U_n 의 값들을 대입하면 식 (2.103)이 된다.

$$t_0 = \sqrt{\frac{16,500 \Omega_{n_0} P}{z N c_n \overline{\beta_0} M}} + \frac{8250 \Omega_{l_0} P}{z N c_l b_0 \overline{\beta_0} M} + \frac{i_1 c_s K_4 \Sigma_{4_0}}{2 c_n \overline{\beta_0} M} \quad (2.103)$$

$$M = b_0 f_m - K(1 + K_6) \quad (2.104)$$

$$K = \frac{K_1 \gamma N^2 R^3}{2934} \Sigma_{3_0} \quad (2.105)$$

$$K_6 = \frac{c_s}{c_l b_0 \overline{\beta_0}} \left[i_1 \Sigma_{4_0} \tan \beta_0 + \frac{s_1 \cos \beta_1}{1 - x_s} \overline{\beta_0}^2 x_0 \times (\Sigma_{4_0} - x_0 + x_s) \right] \quad (2.106)$$

식 (2.103)은 반경 r_0 에서 날개 두께를 위한 일반적인 식이며 이 식은 운전 조건일 때 날개 변수들과 단면계수를 알아야 한다. 그리고 이 식이 사용될 때 첫 번째 항은 추력과 토크에 의한 가로축 굽힘을 나타내고, 두 번째 항은 추력과 토크에 의한 종축 굽힘을 나타낸다. 또한 세 번째 항은 경사에 의한 가로 굽힘을 나타내며 경사와 스큐에 의한 종축의 굽힘은 계수 K_6 에 포함되어 있다. 앞에 나타냈듯이 응력들은 인장응력만 고려한다고 하였으므로 이 가정하에서 굽힘모멘트 구성요소가 압축응력을 발생시킬 때 이 모멘트를 포함하는 항의 부호는 바뀌어야 하고 그렇지 않으면 바뀌지 않는다. 예를 들면 이전에 언급하였던 모멘트의 부호와 관련하여 Fig. 2.8의 4개 지점에서 후방경사는 인장을 전방경사는 압축을 발생시키며 이것은 날개가 전방경사일 때 식 (2.103)의 마지막 항의 부호와 식 (2.106)의 첫 번째 항의 부호가 바뀌어야 한다는 것을 내포하고 있다. 이런 이유에서 단면의 모든 점에서 항의 부호를 적절하게 정함으로써 정확성을 기할 수 있다.



2.3.2 날개의 두께식

식 (2.103)은 여전히 복잡하나 단순하게 만들 수 있으며 날개의 두께가 날개 끝 두께 t_1 까지 선형적으로 감소한다고 가정하였다. 앞서 말한바와 같이 이 가정은 안전성 측면에서 날개 두께가 변화하는 좋지 않은 방법이다. 즉, t 가 허브 근처 단면에서 계산되고 다른 단면의 두께가 식 (2.51)과 일치하여 결정될 때 이 두께는 전체 날개의 일정한 응력상태를 유지시키기 위해 요구되는 두께보다 약간 커진다. 이 사실은 식 (2.104)를 단순화하기 위해 사용되며 이 상황에 있는 t 는 오직 응력을 많이 받는 단면이나 대표적인 단면에 계산될 필요가 있다.

식 (2.103)을 단순화 할 두 번째 방법은 날개 변수 m , c , ε 을 위한 대표 평균값들을 선택함으로써 변수의 목록으로부터 그 양들을 제거한다.

세 번째 방법은 계산된 응력이 현재의 응력상태를 대표하는 강도단면의 윤곽 위의 고정점을 선택함으로써 고정된 점 c_n 과 c_l 을 얻는 것이다.

식 (2.103)을 단순화하기 위한 두가지 방법은 특별한 논의가 필요하지 않으나 마지막 방법은 심사숙고하여야 한다.

Fig. 2.8 은 허브 근처에서 사용하는 대표적인 세 단면을 나타내었다. 응력이 최대인 점들을 ①, ②, ③, ④로 표시하였고 단면의 중심을 통과하는 직선인 중립축을 세 그림에 각각 나타내었다. 그리고 마지막 그림에서 중립축은 Biezeno의 실험에^[10] 의해 결정된 중립축을 곡선 (C-C)에 의해 나타내었다.

먼저 ①점에서 날개의 경사와 스큐는 후방으로 되었다고 보면 모든 응력들은 부가되어 이점에서 총 응력은 최대가 된다. 그러나 이 점에서의 최대 응력은 **Fig. 2.8** (a)와 (b)에 보이는 단면의 u_1 값이 확연히 틀린 것과 같이 단면의 모양과 함께 변하기 쉽다. 더욱이 **Fig. 2.8** (c)에 보이는 것처럼 중립축이 직선이라는 가정은 결과를 부정확하게 만든다.

다음으로 ③점에서 응력들은 부분적으로 인장과 압축 응력을 가지고 이 점에서 총 응력은 다른 세 점보다 작으며 중립축이 직선이라는 가정은 ①점과 마찬가지로 부정확한 결과를 가져온다.

②점과 ④점에 초점을 두어 보면 중립축이 직선이라는 가정은 허용할 수 있다. 또한 u_2 와 u_4 의 값이 상대적으로 크기 때문에 가로 굽힘으로 발생된 응력은 큰 반면에 w_1 과 w_2 가 작기 때문에 세로 굽힘으로부터 발생한 응력은 작다. 따라서 식을 단순화 하기 위해 기준점을 잡을때 최대응력 근처의 점을 선택하는 것은 단면 형상변화에 상대적으로 무감각해 ②, ④점이 ①, ③점 보다 바람직하므로 ②점 또는 ④점으로 선택 폭이 줄어든다.

과거에는 ②점을 ④점 보다 더 선호하였다. ②점은 그 당시 주로 사용된 오지벌형 단면에 대해 명백히 정의된 반면에 ④점은 그렇지 못했으며 더욱이 ②점에서 계산된 응력이 ④점에서 계산된 응력보다 컸다. 그러나 이제 이러한 이유들은 유효하지 않다. 현대의 프로펠러는 뿌리 근처에서 에어로포일형 단면들을 가지며 ②점과 ④점은 똑같이 정의되고 계산된 응력들도 크기가 거의 같다. 이런 관점에서 프로펠러 재료의 강도 특성도 압력실험 보다 인장실험에 의해 유도되는 것처럼 인장응력이 작용하는 ④점을 참조하는 것이 더 합리적이다.

앞의 모든점을 고려해보면 날개의 최소 두께 결정을 위해 ④점을 선택하게 되며 이것은 두께식을 상당히 단순화시킨다. 이것은 c_n , c_t 의 고정값을 사용하

계 될 뿐만 아니라 세로 굽힘으로부터 발생한 항들을 제거할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$t_0 = \left[\frac{16,500 \Omega_{n_0} P}{z N c_n \beta_0 (b_0 f - K)} \right]^{1/2} \pm \frac{i_1 c_s \Sigma_{4_0}}{2 c_n \beta_0 (b_0 f - K)} \quad (2.107)$$

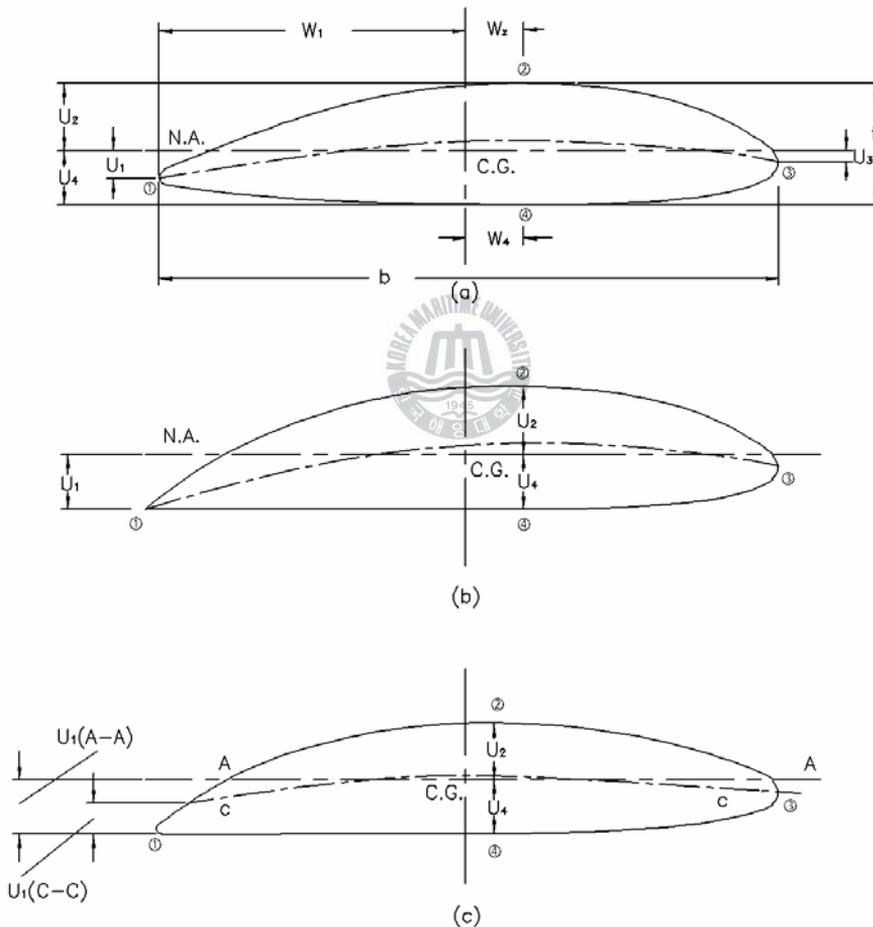


Fig. 2.8 Variation of distance from neutral axis to points of maximum stress for various sections

2.3.3 날개의 강도

Fig. 2.3 에서 본 바와 같이 날개 연결부의 날개단면에 작용하는 토크와 추력에 의한 모멘트로부터 날개단면에 직각 및 평행방향으로 작용하는 모멘트를 식 (2.39)에 구하였다.

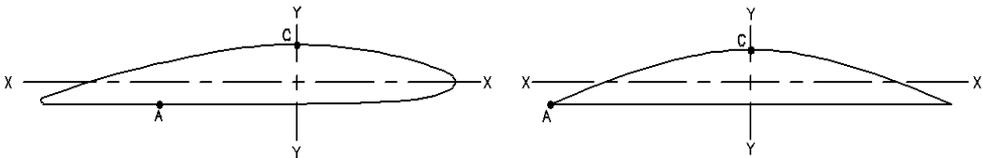
여기서 M_n 과 M_l 때문에 날개단면의 중립축으로부터 가장 먼 곳의 점에 최대 인장응력 S_T 및 최대 압축응력 S_c 가 작용하므로 S_T 와 S_c 는 다음과 같이 표현할 수 있다.^[3]

$$\left. \begin{aligned} S_T &= \frac{M_n}{Z_A} + \frac{M_l}{Z_{A'}} \\ S_c &= \frac{M_n}{Z_c} + \frac{M_l}{Z_{c'}} \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

여기서, Z_A, Z_c : xx 축 둘레의 단면계수, A점과 C점에 대응

$Z_{A'}, Z_{c'}$: yy 축 둘레의 단면계수, A점과 C점에 대응

여기서 Fig. 2.9 를 참고로 하여 생각하면 Z_A, Z_c 는 날개 폭을 l , 날개 두께를 t 라 하면 lt^2 에 비례하고 $Z_{A'}, Z_{c'}$ 는 l^2t 에 비례한다. 일반적으로 S_T, S_c 는 근사적으로 lt^2 에 역비례하게 되므로 날개 강도면에서 볼 때 날개폭보다 날개 두께 쪽이 날개 강도에 큰 영향을 미친다.



A : Point of max tension stress
C : Point of max compression stress

(a) aerofoil type

(b) ogival type

Fig. 2.9 Location of maximum stress in the section

2.4 날개의 진동

프로펠러 날개의 과도한 진동은 날개의 손상사고를 유발하여 선박의 운항, 안전성에 커다란 위험을 초래할 수 있으므로 설계시 이에 대한 검토가 필요하다. 프로펠러 날개진동의 기진원으로는 불균일 반류분포에 따른 유체력 및 축계진동의 전달 등을 들 수 있으며 프로펠러 날개의 과도한 진동은 프로펠러 날개의 고유진동수가 이들 기진원과 공진되어 발생할 수 있다.

일반적인 형상을 갖는 프로펠러 날개의 공기중 고유진동수 f_a [Hz]는 프로펠러 날개를 외팔보로 이상화하여 다음과 같이 계산될 수 있다.^[11]

$$f_a = \frac{\lambda}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho_m A_0}} \quad (2.109)$$

여기서, L : 프로펠러 날개 길이

E : 종탄성계수

I_0 : 날개뿌리의 단면 2차모멘트

λ : 날개의 형상과 진동형에 따라 결정되는 고유치

ρ_m : 소재 밀도

A_0 : 날개뿌리 단면의 면적

에너지법을 이용하여 1차 고유진동형의 경우 λ 값을 다음과 같이 구하였다.

$$\lambda = \frac{8.58}{0.55 + b_1/b_0} \quad (2.110)$$

여기서, b_0 : 날개뿌리에서 현의 길이

b_1 : 날개의 최대 현의 길이

수중에서의 프로펠러 날개의 고유진동수 f_w [Hz]는 부가수질량 효과로 인하여 공기중의 고유진동수보다 낮아지는데 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{f_w}{f_a} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \quad (2.111)$$

여기서, β : 부가수로 인한 질량증분율 (부가질량 계수)

β 에 대한 식은 다음과 같다.

$$\beta = \frac{J\pi\rho_w b_0}{4C_a\rho_m t_0} \times 2.61 \frac{b_1}{b_0} \quad (2.112)$$

식 (2.112)에서

$$C_a = \frac{A_0}{b_0 t_0} \quad (2.113)$$

$$J = 1 - 0.485 \left(\frac{b_1}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.114)$$



여기서, t_0 : 날개뿌리의 두께

A_0 : 날개뿌리의 단면적

ρ_w : 물의 밀도

J : 3차원 수정계수

일반적 형상의 프로펠러에 대해서는 $C_a \cong 9.75$, $b_0/t_0 \cong 5$ 로 취할 수 있어 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\beta \cong 13.68 \left\{ 1 - 0.485 \left(\frac{b_1}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \frac{b_1}{b_0} \frac{\rho_w}{\rho_m} \quad (2.115)$$

제 3 장 응력 및 고유진동 해석

프로펠러는 수중에서 회전하며 다양한 인자의 영향을 받기 때문에 많은 가정의 이론을 통해서는 그 특성을 명확하게 규명하기는 어렵다. 따라서 본 논문에서는 가변피치 프로펠러 조립체를 CAD 프로그램을 사용하여 모델링하였고 모델링한 가변피치 프로펠러는 칼라 베어링형으로서 최대 전진상태에서 프로펠러 날개의 전도동작에 따른 추력과 토크에 의해 반력을 흡수하고 허브의 교각부위에 최대 압력을 받고 있으며 원주방향에 따라 놓여 있는 구성품의 합성력에 의하여 날개 끝단에 미치는 최대값의 전도 모멘트가 나타나며 이 모멘트는 프로펠러 날개의 플랜지가 받쳐주게 된다. 이 모델링 자료를 이용하여 범용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS Code를 이용하여 가변피치 프로펠러 날개의 응력 및 고유진동 해석을 실시하였다.

가변피치 프로펠러의 상세 명세는 **Table 3.1** 과 같으며 이 데이터를 이용하여 프로펠러 날개의 응력 및 고유진동 해석을 수행하였다.

상기 프로그램을 이용하여 기하학적 형상에 절점과 요소를 정의한 유한요소 모델링(mesh)을 하였고, 그 형성 결과는 **Fig. 3.1** 과 같으며 절점의 수는 26,209 개이고 요소의 수는 13,346 개이다. Mesh는 결과의 정확성을 높이기 위하여 각 접촉면에서의 요소 크기를 조절하여 파트사이의 연결성을 향상시켰으며 응력 집중이 예상되는 관심부위에도 요소망의 밀도를 증가 시켰다.

Table 3.1 Specification of the propeller

Material	Crank pin ring	steel
	Blade	copper alloy
	Bolt	stainless steel
Propeller	Diameter	2795 [mm]
	Weight	4386 [kgf]
	Rotational velocity	287 [rpm]

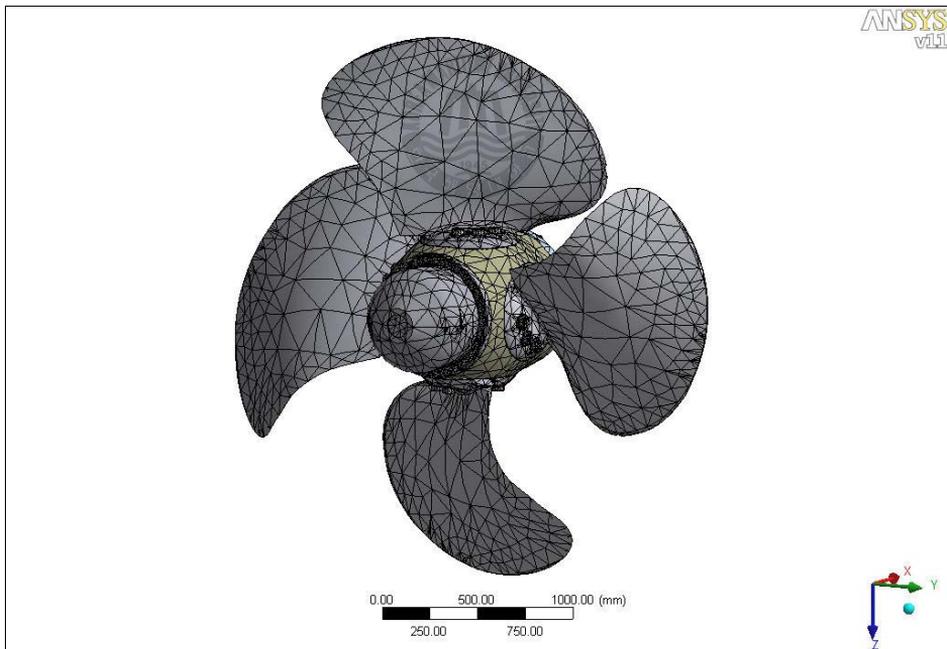


Fig. 3.1 Mesh of CPP assembly for analysis

3.1 가변피치 프로펠러의 응력 해석

3.1.1 전진상태 날개의 응력 해석

가변피치 프로펠러가 정상상태로 선미에서 선수로 보았을 때 전진방향인 시계방향으로 회전하여 작동하고 있을 경우에 각 날개단면에 작용하는 응력은 프로펠러가 발생하는 추력에 의한 굽힘모멘트(압력면, 즉 전진면에는 인장응력, 배면, 즉 후진면에는 압축응력)와 프로펠러를 회전시키는 회전모멘트에 의한 굽힘모멘트로 이루어진다. Fig. 3.2는 가변피치 프로펠러의 전진상태일 때 프로펠러의 등가응력상태를 보여준다. 등가응력의 결과를 보면 날개에 크랭크 링이 이용되며 이것이 날개 플랜지에 볼트로 고정되므로 하부에 응력이 집중되어 있음을 볼 수 있다.

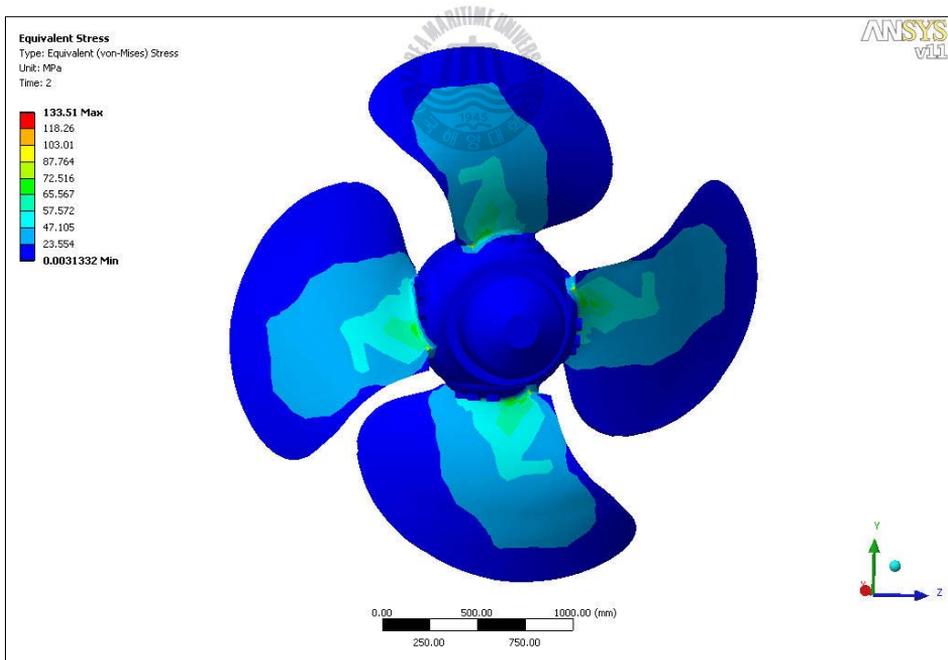


Fig. 3.2 Equivalent stress shape of the propeller in ahead condition

프로펠러는 4개의 동일한 형상 및 재질의 날개가 있으므로 하나의 날개에 대하여 세부적인 응력해석을 하였고 경계조건은 날개 하부와 허브가 만나는 지점을 fixed로 하였다. Fig. 3.3 은 날개의 등가응력을 나타낸다.

일반적으로도 날개의 0.2R 부근에 최대 응력이 발생하고 있으며 Fig. 3.3 에 보이는 바와 같이 날개의 하부에 응력이 크게 나타남을 볼 수 있다. 또한 하부의 응력상태 중에서도 날개의 밑부분과 플랜지의 이음부에 응력이 크게 나타난 것을 볼 수 있다.

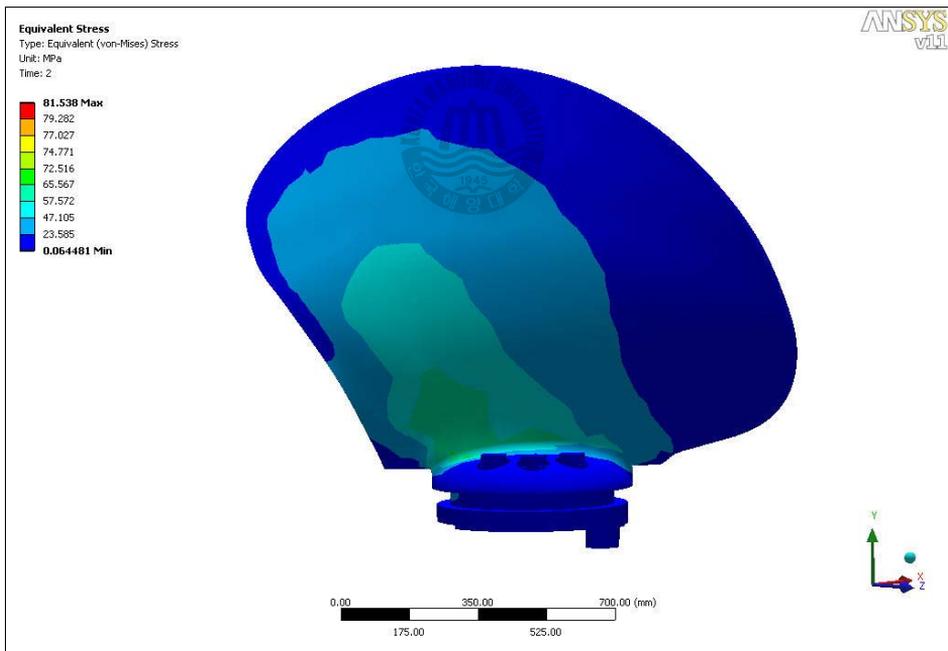


Fig. 3.3 Equivalent stress shape of the blade in ahead condition

응력이 집중되는 이음부에 대하여 응력해석을 수행하였으며 그 결과는 Fig. 3.4 ~ 3.7에 나타내었다.

전진면에서 날개와 플랜지의 이음부 응력상태를 Fig. 3.4에서 보여주고 있으며 각 지점에서의 응력 값을 Fig. 3.5에 나타내었다. 왼쪽하부를 시작점으로 보았을 때 1/3 지점인 부분에서 29.5 MPa로 가장 큰 응력을 나타내며 이 부분을 최대 인장응력점으로 볼 수 있다.

또한 후진면에서의 날개와 플랜지의 이음부 응력상태를 Fig. 3.6에서 보여주고 있으며 각 지점에서의 응력 값을 Fig. 3.7에 나타내었다. 오른쪽하부를 시작점으로 보았을 때 가운데 부위에서 큰 응력분포들을 보이고 있으며 그 중 가장 큰 값은 66.5 MPa로 나타나며 이 부분을 최대 압축응력점으로 볼 수 있다.





Fig. 3.4 Equivalent stress shape of the blade face at root in ahead condition

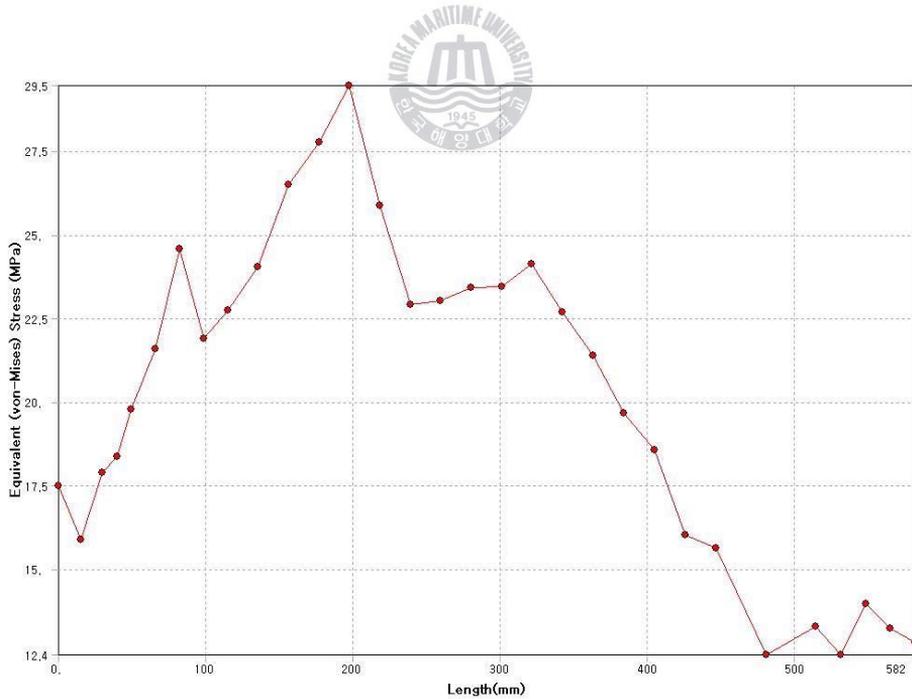


Fig. 3.5 Equivalent stress of the blade face at root in ahead condition



Fig. 3.6 Equivalent stress shape of the blade back at root in ahead condition

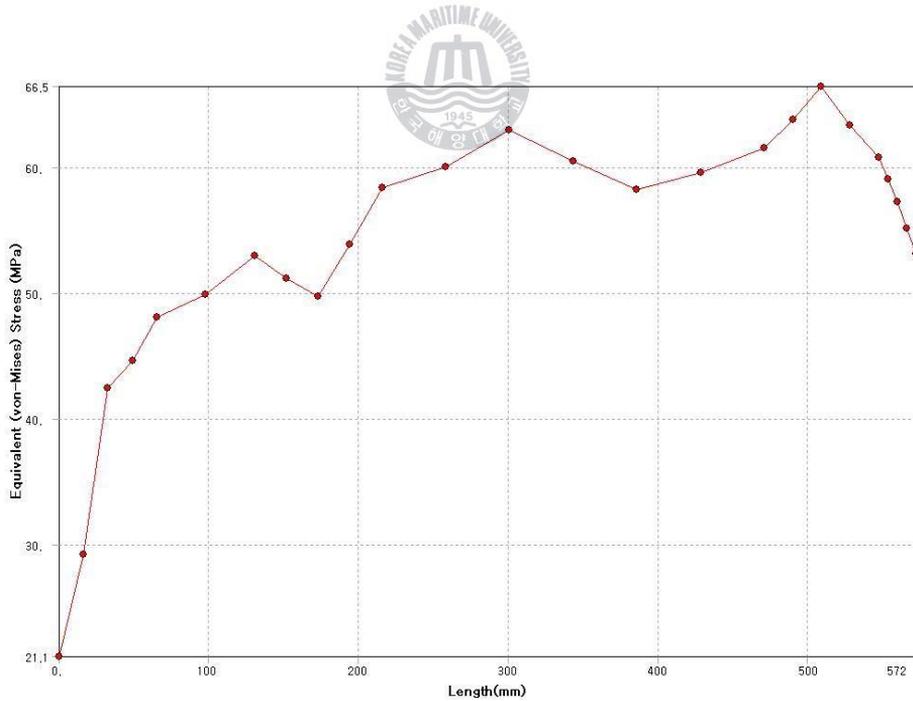


Fig. 3.7 Equivalent stress of the blade back at root in ahead condition

Fig. 3.8 은 길이를 중심으로 전진면과 후진면의 등가응력 분포 값을 나타내고 있으며 날개의 단면으로 보면 최대 인장응력을 발생시키는 것은 날개 후연 끝부분이며 최대 압축응력은 날개 최대 두께부의 후진면 부근에서 일어남을 알 수 있다.

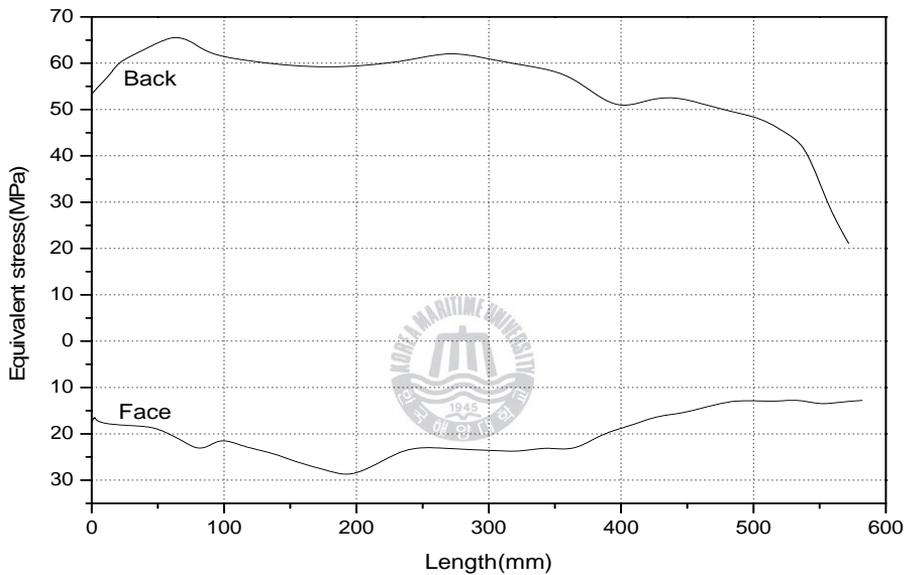


Fig. 3.8 Equivalent stress of the blade section at root in ahead condition

3.1.2 후진상태 날개의 응력 해석

가변피치 프로펠러는 전진상태와 마찬가지로 선미에서 선수로 보았을 때 전진방향인 시계방향으로 회전하여 작동하고 있을 경우에 후진상태의 피치각을 설정하여 Fig. 3.9 와 같이 나타내어 응력 해석을 하였다.

후진상태에서 날개 등가응력은 Fig. 3.10 과 같으며, 전진상태와 동일하게 날개의 하부에 응력이 크게 나타남을 볼 수 있으나 응력의 분포 형태가 전진상태의 y 축 방향의 분포와 달리 방사형의 분포를 보이고 있다. 또한 응력이 집중되는 날개와 플랜지의 이음부에 대하여 응력해석을 수행하였으며 그 결과는 Fig. 3.11 ~ 3.14 에 나타내었다.

전진면에서 이음부 응력상태를 Fig. 3.11 에서 보여주고 있으며 각 지점에서의 응력 값을 Fig. 3.12 에 나타내었고 오른쪽하부를 시작점으로 보았을 때 1/3 지점인 부분에서 28.8 MPa 로 가장 큰 응력을 나타내며 이 부분을 최대 인장응력점으로 볼 수 있다.

또한 후진면에서의 날개와 플랜지의 이음부 응력상태를 Fig. 3.13 에서 보여주고 있으며 각 지점에서의 응력 값을 Fig. 3.14 에 나타내었고 오른쪽하부를 시작점으로 보았을 때 1/3 지점인 부분에서 69 MPa 로 가장 큰 응력을 나타내며 이 부분을 최대 압축응력점으로 볼 수 있다.

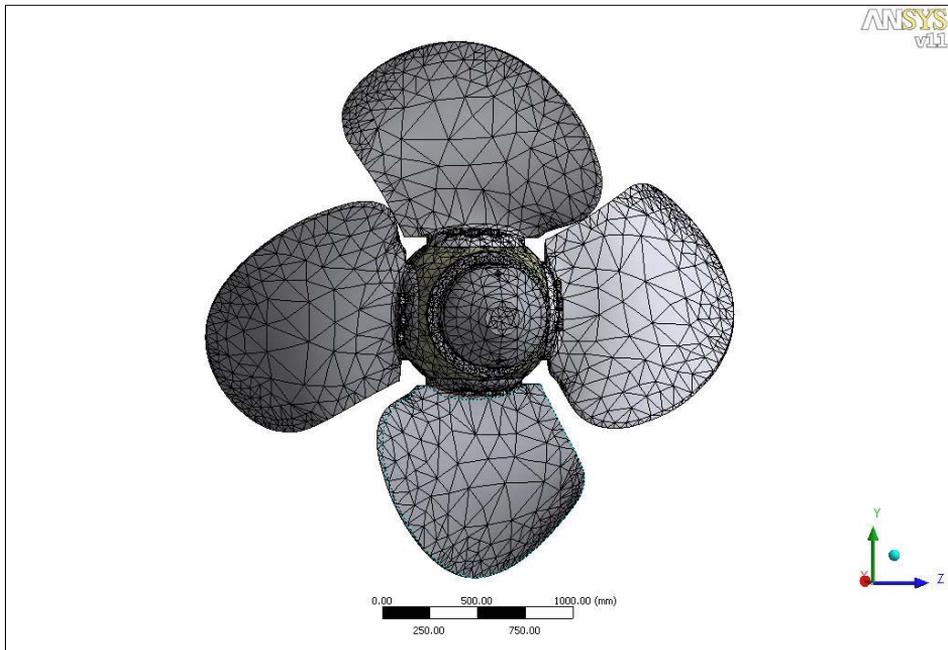


Fig. 3.9 Mesh of the propeller in astern condition

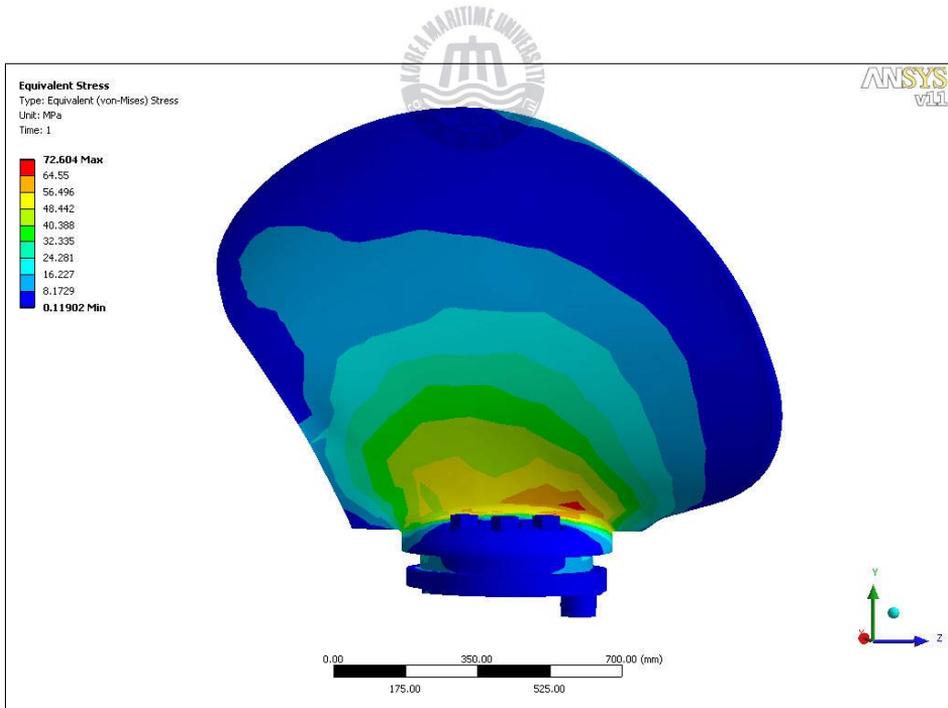


Fig. 3.10 Equivalent stress of the blade in astern condition



Fig. 3.11 Equivalent stress shape of the blade face at root in astern condition

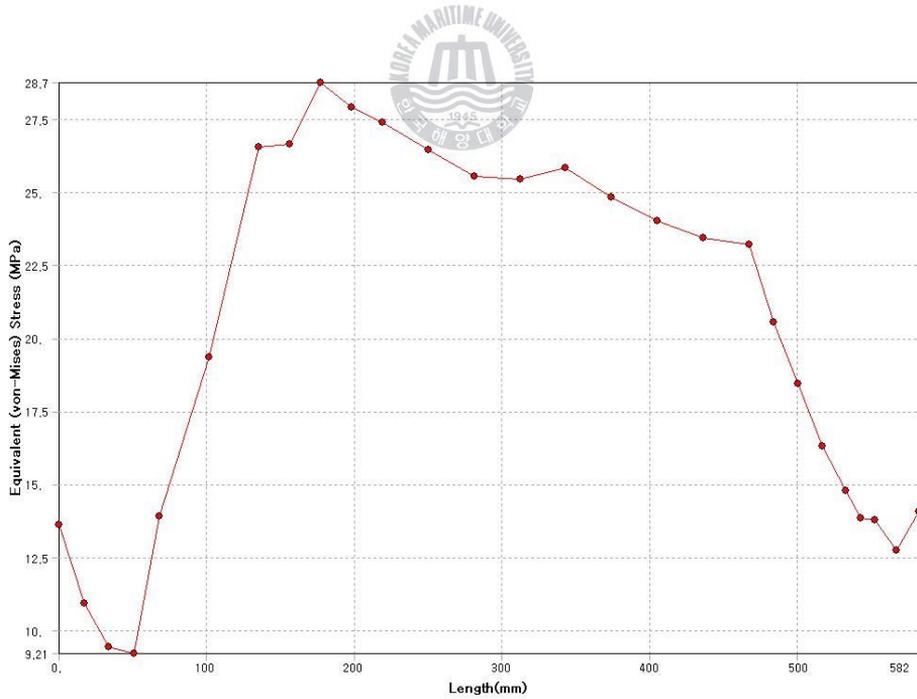


Fig. 3.12 Equivalent stress of the blade face at root in astern condition



Fig. 3.13 Equivalent stress shape of the blade back at root in astern condition

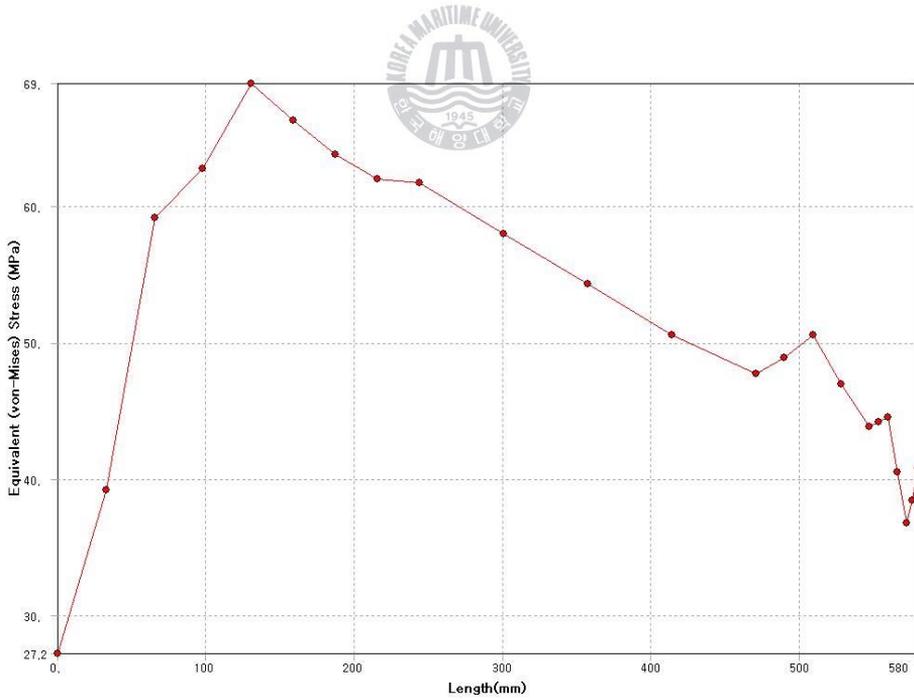


Fig. 3.14 Equivalent stress of the blade back at root in astern condition

Fig. 3.15는 날개 하부의 왼쪽지점을 시작으로 길이 방향으로의 전진면과 후진면의 등가응력 분포 값을 나타내고 있으며 날개의 단면으로 보면 최대 인장응력과 최대 압축응력을 발생시키는 부위는 날개 최대 두께부 부근에서 일어남을 알 수 있다.

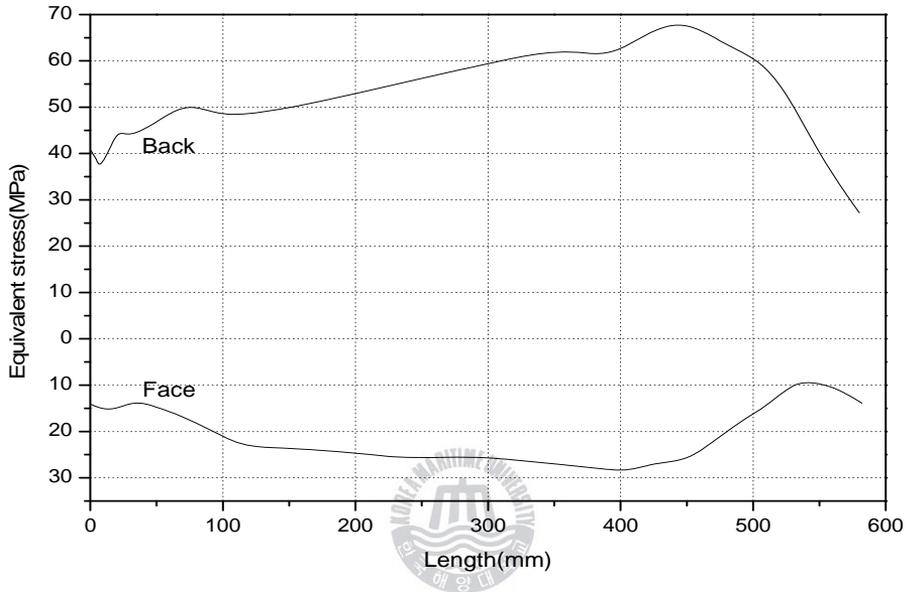


Fig. 3.15 Equivalent stress of the blade section at root in astern condition

전·후진상태의 날개 응력해석 결과를 종합하면, 전·후진상태의 응력은 날개의 하부에 응력이 집중되고 있음을 알 수 있었고 각 응력 분포형태 또한 다르게 나타난 것을 보았다. 그리고 전·후진상태에서 전진면과 후진면의 최대응력 값은 거의 같게 나타났으나 각각의 최대 응력발생점은 전진상태에서는 길이 방향의 1/3 지점에서 후진상태에서는 2/3 지점에서 발생하였다.

3.2 가변피치 프로펠러의 고유진동해석

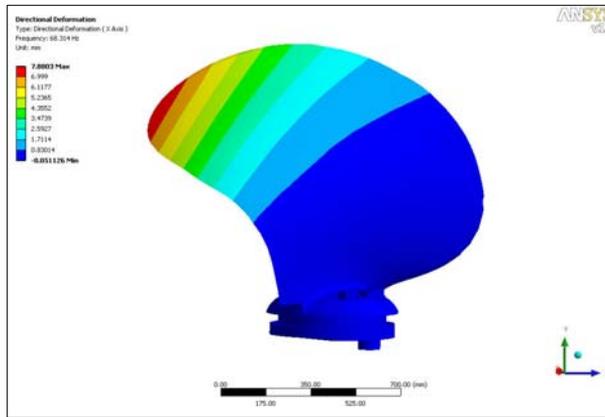
프로펠러의 날개는 유체 속에서 거동하게 되며 자체의 질량뿐만 아니라 유체 압력 성분에서 기인하는 부가수질량 효과의 영향을 받게 되며 프로펠러 날개의 강성 약화는 프로펠러 고유진동수를 더 낮추는 결과가 되므로 프로펠러에 작용하는 저차 하모닉 성분과 공진되어 동적효과가 더 커질 가능성이 높기 때문에 유체와 구조간의 상호작용을 고려하여야 하나 실질적으로 복잡 다양한 부가수질량 효과를 반영하기는 어렵다. 그리고 유체 속에 놓인 고유진동수는 부가수질량 효과에 의하여 공기 속에서의 고유진동수 보다 낮아지나 그 특성은 유사한 경향을 보인다. 본 논문에서는 가변피치 프로펠러 구조의 날개를 공기중에서의 고유진동해석을 통하여 각 모드별 진동의 특성을 파악하였고 모드의 형상을 보고 자연계에서의 변동할 수 있는 확률이 높은 부위로부터 각 고유진동수에서의 동적 거동을 파악하였다.

Fig. 3.16 은 가변피치 프로펠러 날개의 1차 모드를 나타내고 있으며 날개의 변형 형태를 보면 날개 끝단 쪽으로 한 방향으로의 굽힘 형태의 보이고 있다. 이것은 프로펠러의 날개는 하나의 외팔보로 볼 수 있고 외팔보는 굽힘에 약하므로 날개의 고유진동해석 1차 모드에 그 경향이 나타남을 볼 수 있다.

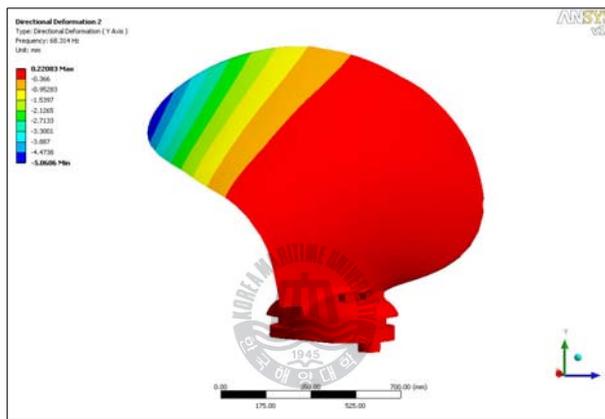
Fig. 3.17 에서는 1차 모드의 각 축방향의 변형 형태를 보여주고 있고 각 축방향에서의 변형 형태도 한 방향으로의 굽힘 형태를 보이고 있다. 그 변형량은 Table 3.2 와 같다.



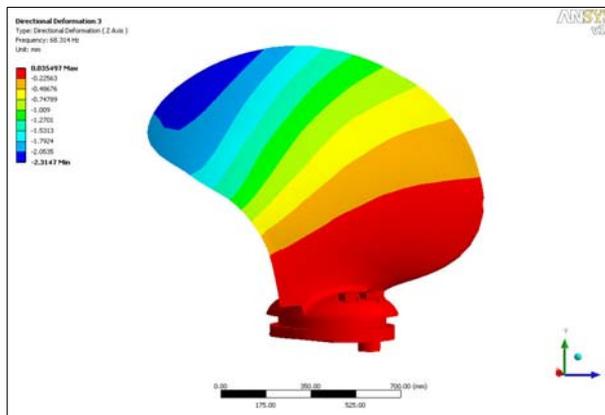
Fig. 3.16 Vibration mode shape of 1st order



(a) x axis direction



(b) y axis direction



(c) z axis direction

Fig. 3.17 1st vibration mode shapes for each axis direction

1st mode (68.31 Hz)	Displacement [mm]		
	<i>x</i> axis	<i>y</i> axis	<i>z</i> axis
Min	-0.05	-5.06	-2.31
Max	7.88	0.22	0.04

Table 3.2 Displacements for 1st mode

Fig. 3.18 은 2차 모드를 나타내고 있으며 2차 모드에서는 1차 모드의 날개 끝단의 변형과 더불어 반대 방향의 끝단으로의 굽힘도 보여지고 있다. 이것은 날개의 끝부분이 타원형의 형태로 되기 때문에 날개의 중심축을 기준으로 양쪽으로의 굽힘 형태를 나타낸다.

Fig. 3.19 에서는 2차 모드의 각 축방향의 변형 형태를 보여주고 있으며 *x*, *z* 축에서는 2방향으로의 굽힘 형태를 보이고, *y* 축에서는 3방향으로의 변형 형태를 보이며 부위별 변형량을 보면 비틀림의 경향을 보이고 있다. 그리고 각 축방향의 변형량은 Table 3.3 과 같다.

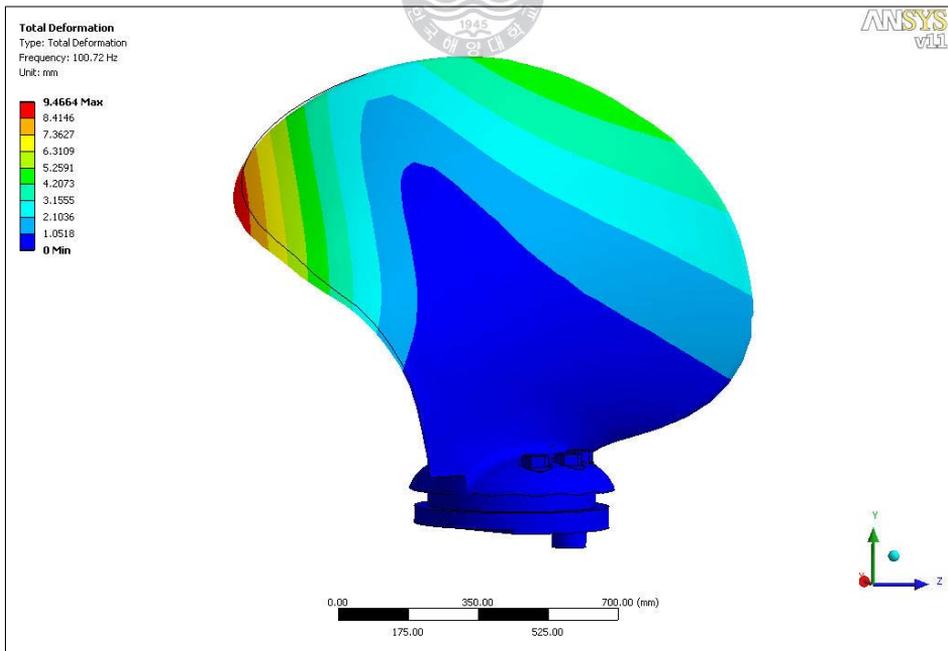
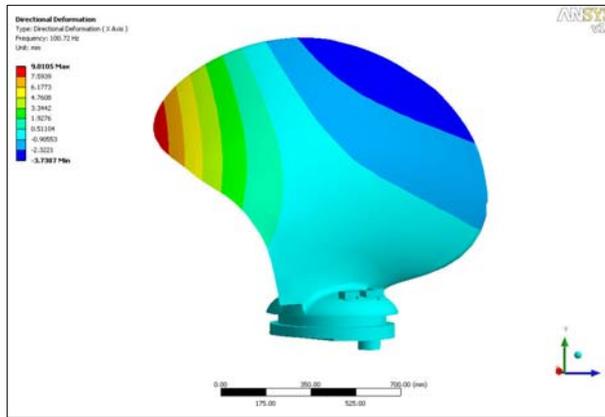
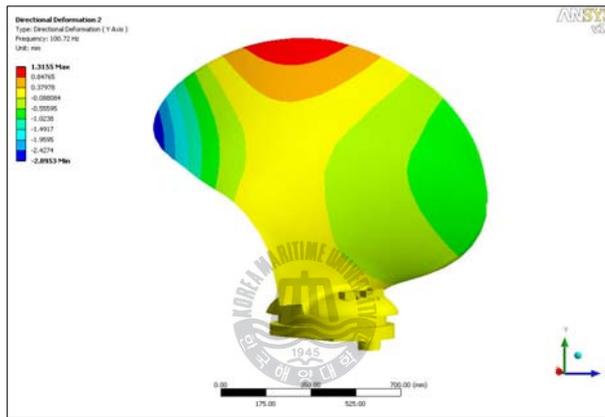


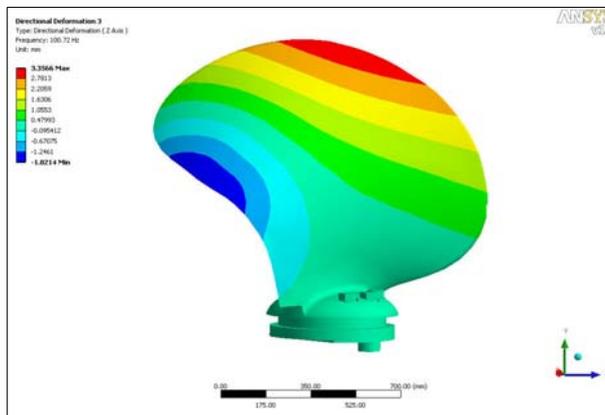
Fig. 3.18 Vibration mode shape of 2nd order



(a) x axis direction



(b) y axis direction



(c) z axis direction

Fig. 3.19 2nd vibration mode shapes for each axis direction

2nd mode (100.72 Hz)	Displacement [mm]		
	<i>x</i> axis	<i>y</i> axis	<i>z</i> axis
Min	-3.74	-2.90	-1.82
Max	9.01	1.32	3.36

Table 3.3 Displacements for 2nd mode

Fig. 3.20 은 3차 모드를 나타내고 있으며 3차 모드에서는 강성이 약한 굽힘의 부위와 2차의 *y* 축에서 보인 3방향으로의 변형 형태가 발생하는 것을 볼 수 있다. 이것은 1, 2차 모드에서 굽힘의 경향을 보였다면 3차 모드에서는 1, 2차 모드에 비해 비틀림의 경향이 나타난다고 볼 수 있다.

Fig. 3.21 은 3차 모드의 각 축방향의 변형 형태를 보여주고 있으며 *z* 축에서는 X형의 변형을 보이고 있다. 또한 *z* 방향으로의 날개가 비틀리고 있음이 나타나며 각 축방향의 변형량은 Table 3.4 와 같다.

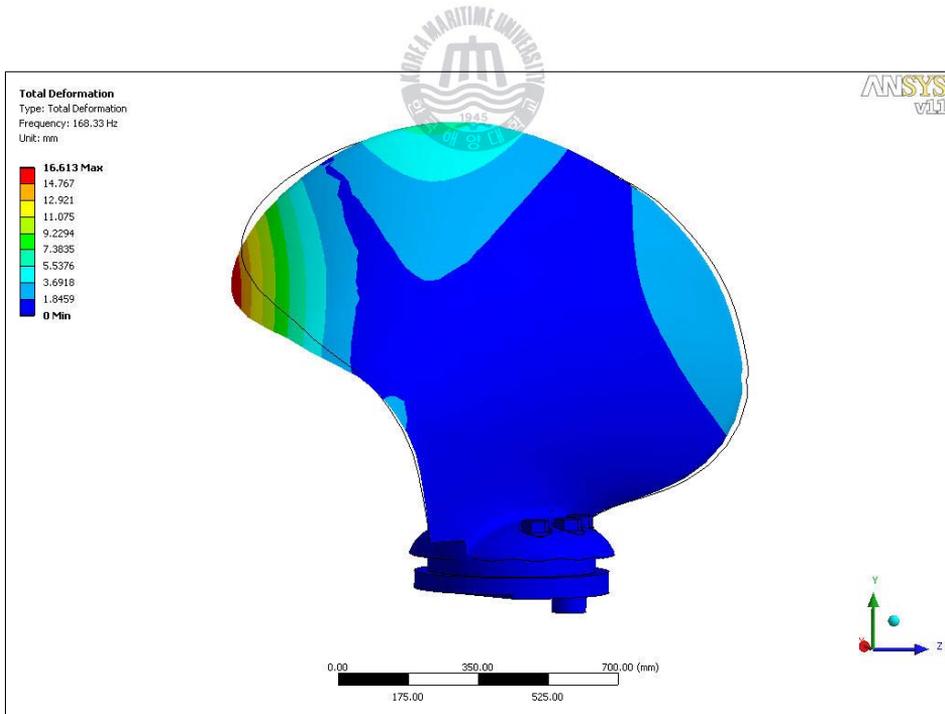
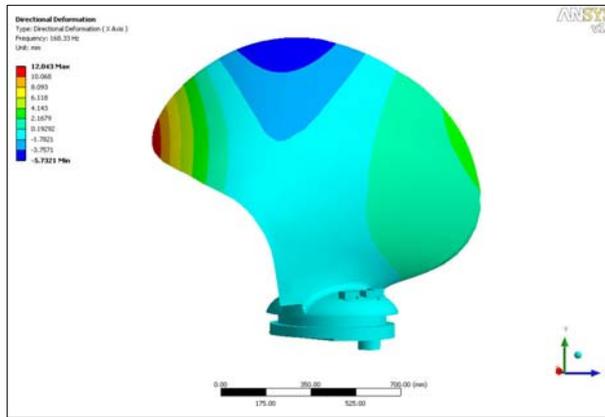
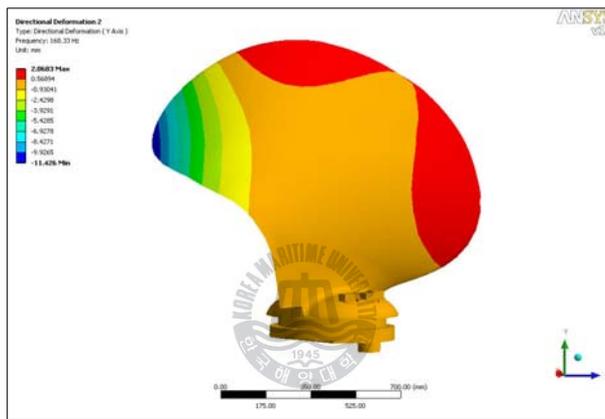


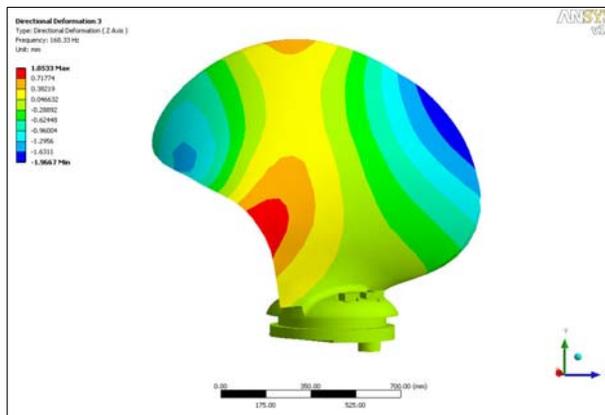
Fig. 3.20 Vibration mode shape of 3rd order



(a) x axis direction



(b) y axis direction



(c) z axis direction

Fig. 3.21 3rd vibration mode shapes for each axis direction

3rd mode (168.33 Hz)	Displacement [mm]		
	<i>x</i> axis	<i>y</i> axis	<i>z</i> axis
Min	-5.73	-11.43	-1.97
Max	12.04	2.07	1.05

Table 3.4 Displacements for 3rd mode

Fig. 3.22 는 4차 모드를 나타내고 있고 4차 모드에서 원형과 비교하여 보면 날개의 상반부에 비틀림이 발생하였으며 Fig. 3.23 에 보이는 것과 같이 날개의 중심축 방향인 *y* 축에서는 인장력이 발생하였고 *x*, *z* 축에서는 S자형의 비틀림 변형이 발생함으로서 벡터적으로 합산된 전체 변형형태인 Fig. 3.22 도 비틀림 변형이 발생하였음을 알 수 있다. 또한 각 축방향의 변형량은 Table 3.5 와 같다.

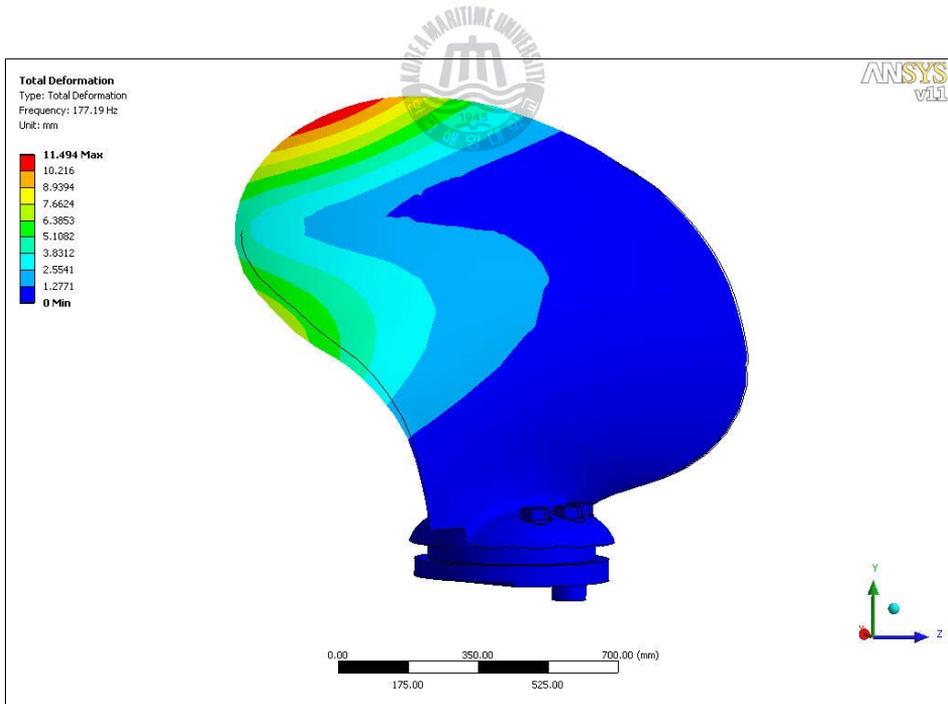
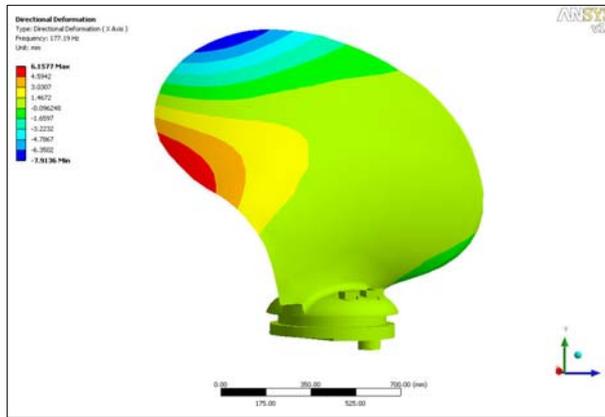
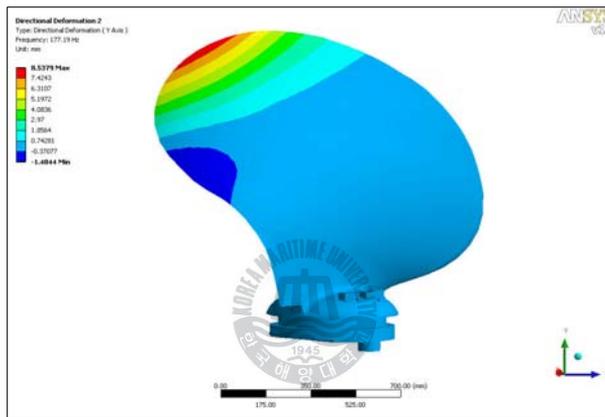


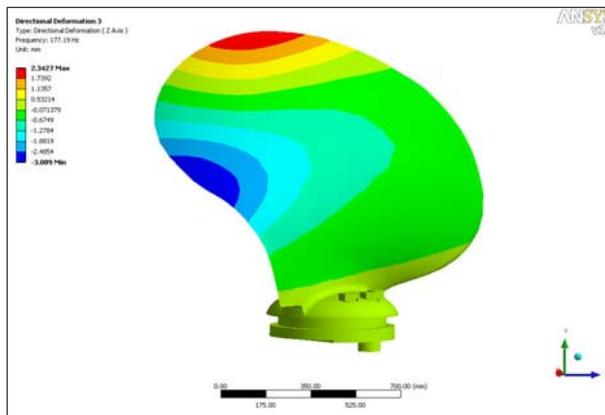
Fig. 3.22 Vibration mode shape of 4th order



(a) x axis direction



(b) y axis direction



(c) z axis direction

Fig. 3.23 4th vibration mode shapes for each axis direction

4th mode (177.19 Hz)	Displacement [mm]		
	<i>x</i> axis	<i>y</i> axis	<i>z</i> axis
Min	-7.91	-1.48	-3.09
Max	6.16	8.54	2.34

Table 3.5 Displacements for 4th mode

Fig. 3.24 는 5차 모드를 나타내고 있으며 1차 모드부터 4차 모드를 통한 굽힘과 비틀림을 통해 날개 둘레의 각 부위에서 인장력이 발생하였다. 그리고 Fig. 3.25 에서 보이는 것과 같이 각 축의 변형 형태는 전체 변형 형태와 유사한 형태를 나타내고 있으며 각 축방향의 변형량은 Table 3.6 과 같다.

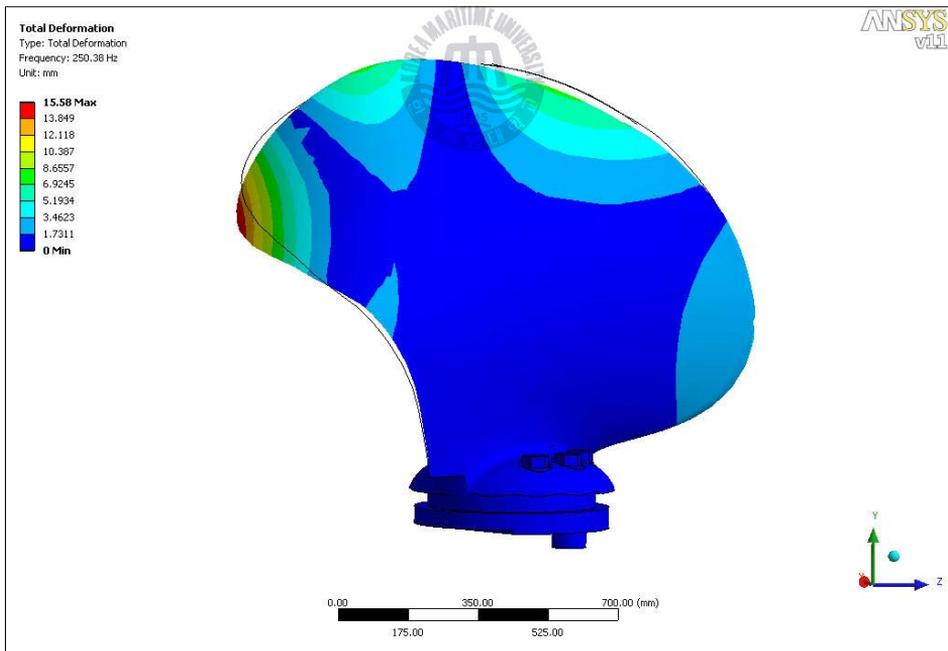
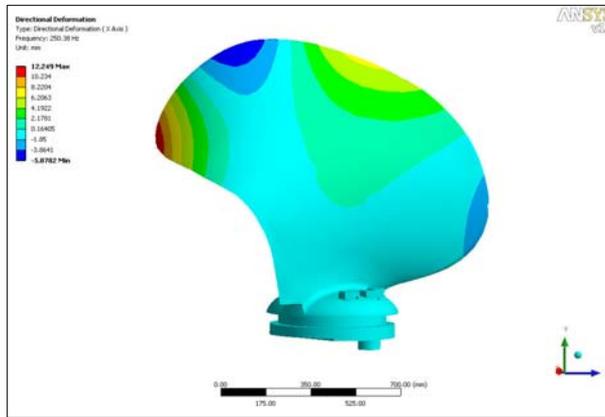
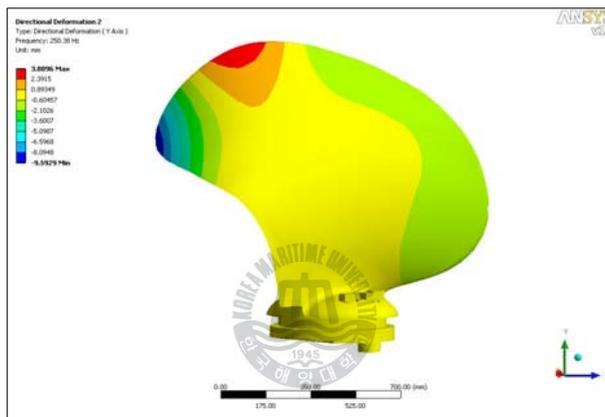


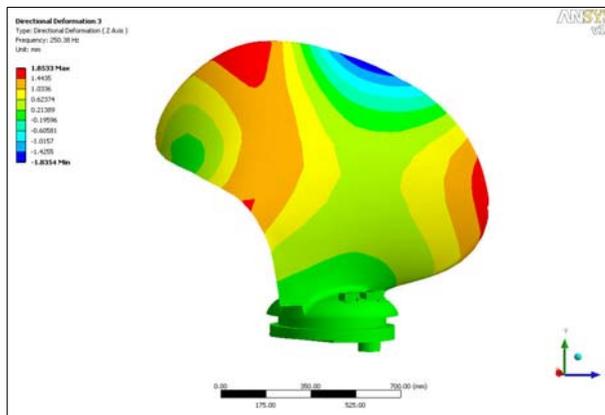
Fig. 3.24 Vibration mode shape of 5th order



(a) x axis direction



(b) y axis direction



(c) z axis direction

Fig. 3.25 5th vibration mode shapes for each axis direction

5th mode (250.38 Hz)	Displacement [mm]		
	<i>x</i> axis	<i>y</i> axis	<i>z</i> axis
Min	-5.88	-9.59	-1.84
Max	12.25	3.89	1.85

Table 3.6 Displacements for 5th mode

Fig. 3.26 은 6차 모드를 나타내고 있고 6차 모드에서는 1차에서 5차 모드를 통한 인장 모드를 보여주고 있으며 Fig. 3.27 에서 보이는 것과 같이 각 축방향으로 날개의 만곡부위에서 굽힘과 비틀림이 작용하여 변형이 다양하게 나타났다. 또한 각 축방향의 변형이 합성적으로도 전체 변형형태를 통해서 나타나며 각 축방향의 변형량은 Table 3.7 과 같다.

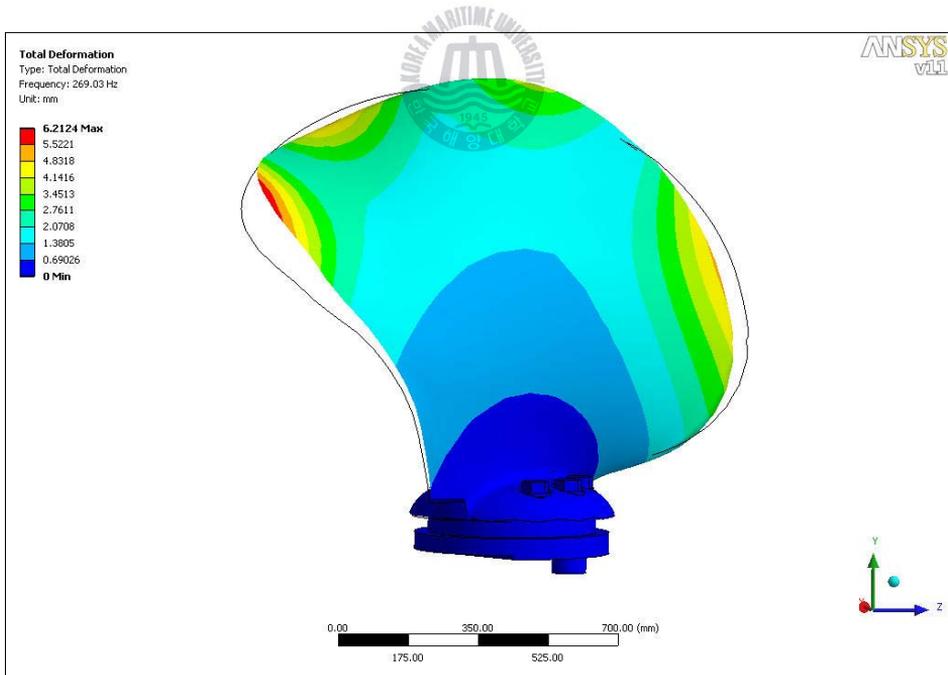
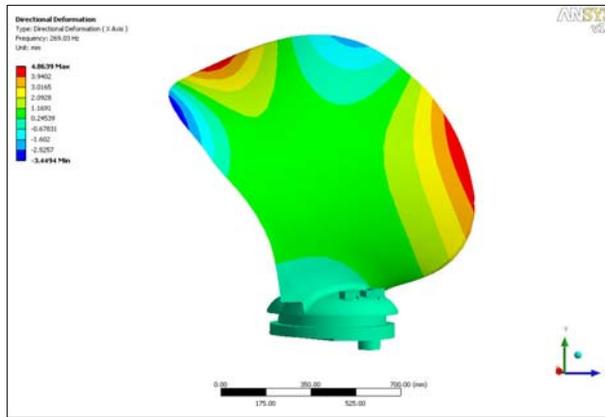
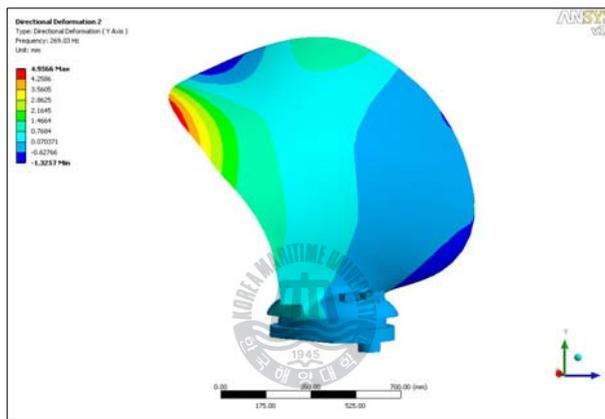


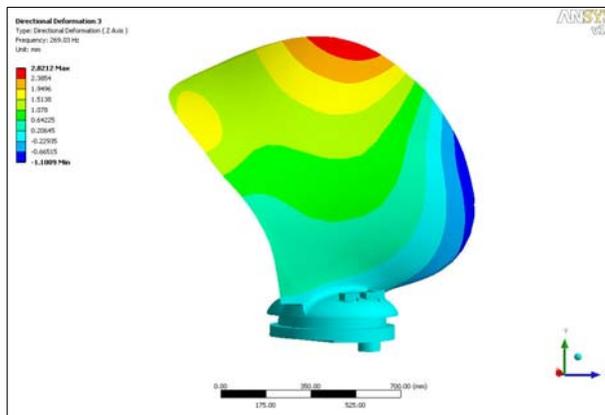
Fig. 3.26 Vibration mode shape of 6th order



(a) x axis direction



(b) y axis direction



(c) z axis direction

Fig. 3.27 6th vibration mode shapes for each axis direction

6th mode (269.03 Hz)	Displacement [mm]		
	<i>x</i> axis	<i>y</i> axis	<i>z</i> axis
Min	-3.45	-1.33	-1.10
Max	4.86	4.96	2.82

Table 3.7 Displacements for 6th mode

위의 각 모드별 변형량을 고유진동수와 함께 Fig. 3.28 과 같이 나타냈으며 고유진동수 대역에 나타나는 모드별 특성을 정리하면 다음과 같다.

100 Hz 이하에서 나타나는 1, 2차 모드에서는 주로 굽힘으로 인한 변형이 발생하였으며 변형이 쉬운 *x* 축 방향으로의 변형이 크게 나타났다.

150 ~ 250 Hz 사이의 주파수 대역대에서는 3, 4, 5차 모드가 나타난다. 여기에서는 1, 2차 모드에서 보였던 굽힘 변형에서 비틀림의 모드로의 경향을 보인다. 그리고 3차 모드에서 각 방향의 편차가 커졌다가 4차 모드에서 다시 작아진 후 5차 모드에서 커진 것은 4차 모드에서 각 방향으로의 인장과 압축이 발생하여 비틀림이 발생한 것으로 볼 수 있다.

6차 모드로 되면서 진동으로 인한 반복된 굽힘과 비틀림으로 강성이 약화된 날개 끝단의 각 부위에서 인장력이 발생하여 변형이 일어났다.

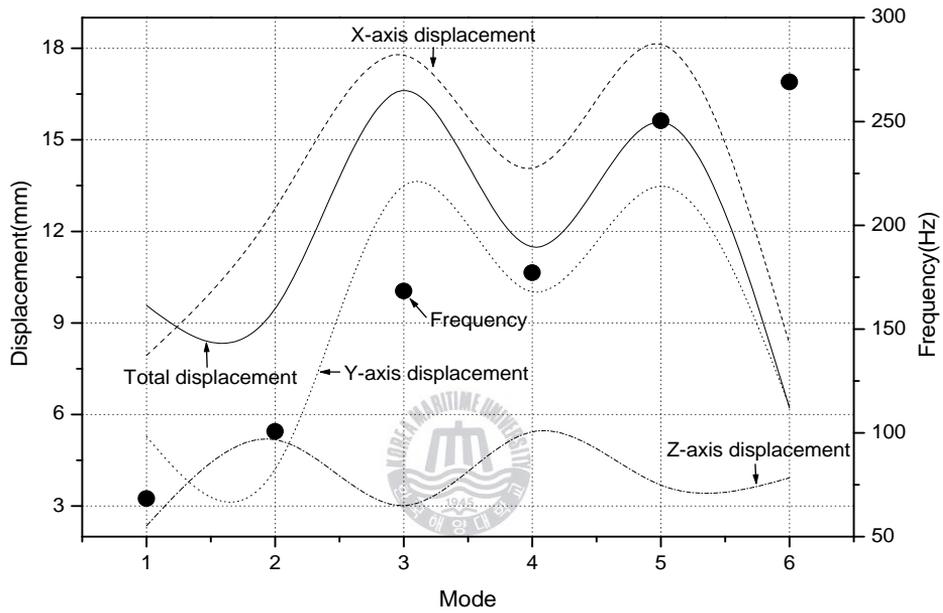


Fig. 3.28 Displacement and frequency at each mode

제 4 장 결 론

본 논문에서는 가변피치 프로펠러에 대해 범용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS™ Code를 이용하여 전·후진시 날개에 발생하는 응력을 해석하였고, 고유진동해석을 수행하여 각 모드별 특성을 파악하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 가변피치 프로펠러는 전·후진상태에서 동일하게 날개 하부에 큰 응력이 발생하였으나 전·후진 피치각에 따라 응력발생 형태는 각기 다르게 나타났다. 또한 응력이 가장 크게 발생하는 하부에 있어서, 전진상태에서의 최대 응력점들은 날개 두께식에서 살펴본 바와 같이 그 분포가 전 단면에 걸쳐 비슷하게 나타났으나, 후진상태에서의 최대 응력점들은 날개하부 단면 중 가장 두꺼운 부분에서 발생하였다.
- (2) 고유진동해석을 수행하여 날개의 각 모드별로 1차 모드의 굽힘 발생으로부터 비틀림을 통해 6차 모드까지 그 변형 특성을 확인하였고, 모드별 고유진동수 대역을 함께 파악하여 공진 발생시 변형가능성이 높은 위험주파수를 알 수 있었다.

본 논문은 가변피치 프로펠러의 전·후진상태에서의 응력해석과 날개의 고유진동해석을 수행하였으며, 주요 가진력에 대한 공진 여부를 확인하기 위한 강제진동해석은 고려하지 못하였으나 독자적인 가변피치 프로펠러 설계기술 확보를 위해서는 필히 수행되어야 할 것으로 사료된다. 그리고 논문의 결과물은 제한적인 조건을 적용하여 산출한 결과이므로, 향후 가변피치 프로펠러 시스템의 칼라 베어링형과 트러니언 베어링형의 구조적 특성을 고려한 비교 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- [1] 김기인, "可變 推進器用 推進軸系 시스템 設計에 관한 研究", 한국해양대학교 대학원, 2002.
- [2] 김기인, "船舶用 可變피치 프로펠러 시스템 構造設計에 관한 研究", 한국해양대학교 대학원, 2007.
- [3] 전효중, 김정렬, 조권희, 이돈출, "축계장치와 프로펠러", 대진출판사, 2003.
- [4] K.E. Schoenherr, "Formulation of Propeller Blade Stregnth", SNAME Transaction, Vol.71, 1963.
- [5] 김영중, "船舶用 프로펠러의 振動特性에 관한 研究", 충남대학교 대학원, 2005.
- [6] K. E. Schoenherr, "Recent Developments in Propeller Design", Trans SNAME, Vol. 42, 1934.
- [7] J. W. Cohen, "On Stress Calculations in Helicoidal Shells and Propeller Blades", Netherlands Research Center T. N. O. for Shipbuilding and Navigation, Publication No. 21S.
- [8] L. Kretschmer, "Ein Beitrag zur Festigkeitsberechnung der Schraubenpropeller", Schiffstechnik, Vol. 3, No. 14/15, 1956.
- [9] Fuller and Johnston, "Applied Mechanics", Vol. 2, Sterngth of Materials, John Wiley and Sons, New York.
- [10] G. G. Biezeno, "De experimenteele bepaling van de in een sloopsschroef optretende spanningen", De Ingenieur, October 1945.

- [11] Kumai, T. and Sakurada, Y., "On the Natural Frequencies of Propeller Blade Vibration", Trans. West Japan Society of Naval Architects, 1972.
- [12] D. W. Taylor, "The Speed and Power of Ships", 3rd edition, 2nd revision, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1943.
- [13] Joseph Hecking, "Strength of Propellers", Marine Engineering and Shipping Age, October 1921.
- [14] American Bureau of Shipping, "Rules for Building and Classing Steel Vessels", 1952.
- [15] J. S. Carlton, "Marine Propellers and Propulsion", Butterworth Heinemann, 1994.
- [16] L. C. Burrill, "Underwater Propeller Vibration Tests", Trans. NECIES, 1949.
- [17] L. C. Burrill, "Marine Propeller Blade Vibrations : Full scale tests", Trans. NECIES, 1946.
- [18] W. L. Hughes, "Propeller Blade Vibrations", Trans. NECIES, 1949.
- [19] G. S. Baker, "Vibration Patterns of Propeller Blades", Trans. NECIES, 1949.
- [20] 한국선급, "선박진동 · 소음 제어지침", 1997

부 록

[A.1] Thrust moment function, Ω_t

$x = r/R$									
x_n	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
0.15	0.4708	0.4216	0.3733	0.2808	0.1966	0.1240	0.06639	0.02642	0.005108
0.16	0.4714	0.4222	0.3738	0.2812	0.1968	0.1242	0.06649	0.02646	0.005116
0.17	0.4722	0.4229	0.3744	0.2817	0.1972	0.1244	0.06660	0.02650	0.005124
0.18	0.4731	0.4237	0.3751	0.2822	0.1975	0.1246	0.06672	0.02655	0.005134
0.19	0.4741	0.4245	0.3759	0.2828	0.1979	0.1248	0.06686	0.02661	0.005144
0.20	0.4751	0.4255	0.3767	0.2834	0.1984	0.1251	0.06701	0.02667	0.005156
0.21	0.4763	0.4266	0.3777	0.2841	0.1989	0.1254	0.06718	0.02673	0.005169
0.22	0.4777	0.4277	0.3787	0.2849	0.1994	0.1258	0.06737	0.02681	0.005183
0.23	0.4791	0.4290	0.3799	0.2858	0.2000	0.1262	0.06757	0.02689	0.005199
0.24	0.4806	0.4304	0.3811	0.2867	0.2007	0.1266	0.06779	0.02697	0.005216
0.25	0.4823	0.4319	0.3824	0.2877	0.2014	0.1270	0.06803	0.02707	0.005234
0.26	0.4842	0.4336	0.3839	0.2888	0.2022	0.1275	0.06829	0.02717	0.005254
0.27	0.4862	0.4354	0.3855	0.2900	0.2030	0.1280	0.06857	0.02729	0.005276
0.28	0.4883	0.4373	0.3872	0.2913	0.2039	0.1286	0.06887	0.02741	0.005299
0.29	0.4906	0.4393	0.3890	0.2926	0.2048	0.1292	0.06920	0.02754	0.005324
0.30	0.4931	0.4416	0.3910	0.2941	0.2059	0.1299	0.06955	0.02767	0.005351
0.31	0.4958	0.4440	0.3931	0.2957	0.2070	0.1306	0.06992	0.02782	0.005380
0.32	0.4986	0.4465	0.3954	0.2974	0.2082	0.1313	0.07032	0.02798	0.005411
0.33	0.5017	0.4492	0.3978	0.2992	0.2095	0.1321	0.07075	0.02815	0.005444
0.34	0.5049	0.4521	0.4003	0.3012	0.2108	0.1330	0.07121	0.02834	0.005479
0.35	0.5084	0.4553	0.4031	0.3032	0.2123	0.1339	0.07170	0.02853	0.005517
0.36	0.5121	0.4586	0.4060	0.3055	0.2138	0.1349	0.07222	0.02874	0.005557
0.37	0.5160	0.4621	0.4092	0.3078	0.2154	0.1359	0.07278	0.02896	0.005599
0.38	0.5202	0.4658	0.4125	0.3103	0.2172	0.1370	0.07337	0.02920	0.005645
0.39	0.5247	0.4698	0.4160	0.3130	0.2191	0.1382	0.07400	0.02945	0.005693
0.40	0.5294	0.4741	0.4198	0.3158	0.2210	0.1394	0.07466	0.02971	0.005745

[A.2] Torque moment function, Ω_q

$x = r/R$									
x_n	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
0.15	0.2110	0.1854	0.1609	0.1162	0.07791	0.04703	0.02409	0.009175	0.001697
0.16	0.2113	0.1857	0.1612	0.1164	0.07803	0.04710	0.02413	0.009188	0.001700
0.17	0.2117	0.1860	0.1615	0.1166	0.07816	0.04718	0.02417	0.009203	0.001703
0.18	0.2121	0.1864	0.1618	0.1168	0.07830	0.04727	0.02422	0.009220	0.001706
0.19	0.2125	0.1868	0.1621	0.1170	0.07846	0.04736	0.02427	0.009239	0.001710
0.20	0.2130	0.1872	0.1625	0.1173	0.07864	0.04747	0.02432	0.009260	0.001714
0.21	0.2135	0.1876	0.1629	0.1176	0.07883	0.04759	0.02438	0.009283	0.001718
0.22	0.2141	0.1881	0.1633	0.1179	0.07905	0.04772	0.02445	0.009309	0.001723
0.23	0.2147	0.1887	0.1638	0.1182	0.07929	0.04786	0.02452	0.009337	0.001728
0.24	0.2154	0.1893	0.1644	0.1186	0.07955	0.04802	0.02460	0.009367	0.001734
0.25	0.2162	0.1900	0.1650	0.1190	0.07983	0.04819	0.02469	0.009400	0.001740
0.26	0.2170	0.1907	0.1656	0.1195	0.08013	0.04837	0.02478	0.009436	0.001746
0.27	0.2179	0.1915	0.1663	0.1200	0.08046	0.04857	0.02488	0.009475	0.001753
0.28	0.2189	0.1923	0.1670	0.1205	0.08082	0.04879	0.02500	0.009517	0.001761
0.29	0.2199	0.1932	0.1678	0.1211	0.08120	0.04902	0.02512	0.009562	0.001769
0.30	0.2210	0.1942	0.1686	0.1217	0.08161	0.04927	0.02524	0.009610	0.001772
0.31	0.2222	0.1953	0.1695	0.1224	0.08205	0.04944	0.02538	0.009662	0.001788
0.32	0.2235	0.1964	0.1705	0.1231	0.08252	0.04982	0.02552	0.009717	0.001798
0.33	0.2249	0.1976	0.1716	0.1238	0.08303	0.05012	0.02568	0.009776	0.001809
0.34	0.2263	0.1989	0.1727	0.1246	0.08357	0.05045	0.02585	0.009840	0.001821
0.35	0.2278	0.2003	0.1739	0.1255	0.08414	0.05079	0.02602	0.009908	0.001833
0.36	0.2295	0.2017	0.1751	0.1264	0.08475	0.05116	0.02621	0.009980	0.001847
0.37	0.2313	0.2033	0.1765	0.1274	0.08540	0.05155	0.02641	0.01006	0.001861
0.38	0.2332	0.2049	0.1779	0.1284	0.08610	0.05197	0.02663	0.01014	0.001876
0.39	0.2352	0.2067	0.1794	0.1295	0.08684	0.05241	0.02686	0.01023	0.001891
0.40	0.2373	0.2085	0.1810	0.1307	0.08762	0.05289	0.02710	0.01032	0.001909

[B] Σ -values for centrifugal force moment, $\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_4$

$x = 0.20$									
c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		
$m = 0.20$									
0	0.1698	0.08560	0.4001	0.1820	0.09307	0.4153	0.1942	0.1004	0.4281
0.10	0.2071	0.1018	0.3890	0.2212	0.1102	0.4040	0.2353	0.1185	0.4167
0.20	0.2444	0.1179	0.3809	0.2604	0.1274	0.3958	0.2764	0.1366	0.4084
0.30	0.2817	0.1341	0.3747	0.2995	0.1445	0.3895	0.3174	0.1548	0.4020
$m = 0.30$									
0	0.1592	0.07704	0.3893	0.1699	0.08323	0.4032	0.1806	0.08930	0.2450
0.10	0.1949	0.09186	0.3781	0.2072	0.09889	0.3919	0.2196	0.1058	0.4036
0.20	0.2305	0.1067	0.3700	0.2446	0.1145	0.3836	0.2586	0.1223	0.3953
0.30	0.2661	0.1215	0.3639	0.2819	0.1302	0.3774	0.2976	0.1387	0.3889
$m = 0.40$									
0	0.1498	0.06960	0.3790	0.1592	0.07478	0.3918	0.1687	0.07985	0.4028
0.10	0.1839	0.08323	0.3678	0.1949	0.08913	0.3804	0.2058	0.09490	0.3913
0.20	0.2180	0.09687	0.3597	0.2305	0.1035	0.3722	0.2430	0.1100	0.3830
0.30	0.2521	0.1105	0.3536	0.2661	0.1178	0.3660	0.2801	0.1250	0.3767
$m = 0.50$									
0	0.1413	0.06309	0.3692	0.1497	0.06746	0.3810	0.1581	0.07174	0.3912
0.10	0.1740	0.07567	0.3580	0.1838	0.08065	0.3696	0.1936	0.08553	0.3798
0.20	0.2067	0.08825	0.3499	0.2179	0.09384	0.3614	0.2290	0.09933	0.3715
0.30	0.2394	0.1008	0.3439	0.2520	0.1070	0.3553	0.2645	0.1131	0.3652
$m = 0.60$									
0	0.1337	0.05737	0.3599	0.1412	0.06108	0.3708	0.1487	0.06472	0.3803
0.10	0.1651	0.06901	0.3486	0.1738	0.07324	0.3594	0.1826	0.07740	0.3688
0.20	0.1965	0.08064	0.3406	0.2065	0.08543	0.3512	0.2165	0.09009	0.3606
0.30	0.2279	0.09227	0.3346	0.2392	0.09757	0.3451	0.2505	0.1028	0.3544
$x = 0.25$									
c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		
$m = 0.20$									
0	0.1717	0.08867	0.3606	0.1848	0.09360	0.3754	0.1979	0.1037	0.3877
0.10	0.2068	0.1048	0.3514	0.2218	0.1134	0.3660	0.2369	0.1218	0.3782
0.20	0.2418	0.1209	0.3446	0.2589	0.1305	0.3590	0.2759	0.1399	0.3712
0.30	0.2769	0.1370	0.3395	0.2959	0.1476	0.3537	0.3149	0.1580	0.3658
$m = 0.30$									
0	0.1614	0.07962	0.3503	0.1729	0.08592	0.3638	0.1844	0.09207	0.3752
0.10	0.1949	0.09432	0.3411	0.2081	0.1015	0.3545	0.2214	0.1084	0.3658
0.20	0.2284	0.1090	0.3344	0.2434	0.1170	0.3476	0.2585	0.1248	0.3588
0.30	0.2619	0.1237	0.3293	0.2787	0.1326	0.3423	0.2955	0.1412	0.3534
$m = 0.40$									
0	0.1522	0.07176	0.3406	0.1623	0.07701	0.3530	0.1725	0.08213	0.3636
0.10	0.1842	0.08523	0.3314	0.1960	0.09120	0.3437	0.2078	0.09701	0.3541
0.20	0.2163	0.09870	0.3248	0.2297	0.1054	0.3368	0.2432	0.1119	0.3472
0.30	0.2483	0.1122	0.3197	0.2633	0.1196	0.3316	0.2783	0.1268	0.3419
$m = 0.50$									
0	0.1438	0.06489	0.3314	0.1529	0.06930	0.3428	0.1620	0.07361	0.3536
0.10	0.1746	0.07726	0.3222	0.1851	0.08229	0.3335	0.1957	0.08719	0.3432
0.20	0.2053	0.08963	0.3156	0.2173	0.09527	0.3267	0.2294	0.1008	0.3363
0.30	0.2360	0.1020	0.3106	0.2495	0.1083	0.3516	0.2630	0.1143	0.3310
$m = 0.60$									
0	0.1363	0.05885	0.3226	0.1445	0.06259	0.3331	0.1526	0.06624	0.3423
0.10	0.1658	0.07025	0.3135	0.1753	0.07451	0.3239	0.1849	0.07867	0.3329
0.20	0.1953	0.08164	0.3069	0.2062	0.08643	0.3172	0.2171	0.09110	0.3261
0.30	0.2249	0.09303	0.3020	0.2371	0.09835	0.3121	0.2493	0.1035	0.3209

$x = 0.30$

c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		

$m = 0.20$

0	0.1721	0.09115	0.3240	0.1861	0.09894	0.3383	0.2001	0.1065	0.3501
0.10	0.2049	0.1070	0.3166	0.2210	0.1158	0.3306	0.2370	0.1243	0.3423
0.20	0.2378	0.1229	0.3111	0.2559	0.1327	0.3249	0.2740	0.1422	0.3365
0.30	0.2706	0.1388	0.3068	0.2908	0.1496	0.3205	0.3110	0.1601	0.3320

$m = 0.30$

0	0.1620	0.08159	0.3144	0.1744	0.08800	0.3274	0.1868	0.09420	0.3383
0.10	0.1934	0.09603	0.3070	0.2076	0.1013	0.3198	0.2218	0.1103	0.3306
0.20	0.2248	0.1105	0.3016	0.2409	0.1186	0.3142	0.2569	0.1264	0.3249
0.30	0.2561	0.1249	0.2974	0.2741	0.1338	0.3098	0.2920	0.1425	0.3204

$m = 0.40$

0	0.1531	0.07330	0.3054	0.1640	0.07862	0.3173	0.1751	0.08377	0.3274
0.10	0.1831	0.08645	0.2980	0.1958	0.09249	0.3097	0.2084	0.09832	0.3197
0.20	0.2131	0.09961	0.2926	0.2275	0.1064	0.3042	0.2418	0.1129	0.3140
0.30	0.2431	0.1128	0.2885	0.2592	0.1202	0.2999	0.2752	0.1274	0.3096

$m = 0.50$

0	0.1449	0.06606	0.2968	0.1548	0.07052	0.3077	0.1647	0.07483	0.3171
0.10	0.1737	0.07808	0.2895	0.1851	0.08314	0.3003	0.1965	0.08804	0.3095
0.20	0.2025	0.09010	0.2841	0.2154	0.09577	0.2947	0.2284	0.1012	0.3039
0.30	0.2312	0.1021	0.2800	0.2458	0.1084	0.2905	0.2603	0.1145	0.2995

$m = 0.60$

0	0.1376	0.05971	0.2886	0.1465	0.06347	0.2987	0.1554	0.06711	0.3074
0.10	0.1652	0.07072	0.2814	0.1755	0.07500	0.2913	0.1859	0.07914	0.2999
0.20	0.1928	0.08174	0.2761	0.2046	0.08653	0.2859	0.2163	0.09116	0.2944
0.30	0.2205	0.09275	0.2721	0.2337	0.09806	0.2817	0.2468	0.1032	0.2901

$x = 0.40$

c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		

$m = 0.20$

0	0.1682	0.09372	0.2591	0.1843	0.1018	0.2721	0.2003	0.1094	0.2827
0.10	0.1966	0.1087	0.2544	0.2149	0.1178	0.2672	0.2331	0.1264	0.2777
0.20	0.2250	0.1237	0.2509	0.2455	0.1338	0.2635	0.2660	0.1435	0.2739
0.30	0.2534	0.1387	0.2481	0.2762	0.1498	0.2606	0.2989	0.1608	0.2709

$m = 0.30$

0	0.1589	0.08313	0.2509	0.1732	0.08970	0.2628	0.1874	0.09594	0.2725
0.10	0.1860	0.09659	0.2463	0.2023	0.1040	0.2580	0.2186	0.1110	0.2676
0.20	0.2131	0.1100	0.2429	0.2314	0.1183	0.2544	0.2498	0.1261	0.2639
0.30	0.2402	0.1235	0.2401	0.2606	0.1326	0.2515	0.2809	0.1412	0.2610

$m = 0.40$

0	0.1505	0.07400	0.2424	0.1633	0.07940	0.2541	0.1761	0.08453	0.2631
0.10	0.1765	0.08611	0.2387	0.1911	0.09220	0.2494	0.2058	0.09799	0.2583
0.20	0.2024	0.09822	0.2353	0.2189	0.1050	0.2458	0.2354	0.1115	0.2546
0.30	0.2283	0.1103	0.2327	0.2467	0.1178	0.2431	0.2651	0.1249	0.2518

$m = 0.50$

0	0.1429	0.06607	0.2630	0.1545	0.07055	0.2460	0.1661	0.07480	0.2543
0.10	0.1678	0.07699	0.2316	0.1811	0.08206	0.2414	0.1944	0.08687	0.2496
0.20	0.1926	0.08792	0.2282	0.2076	0.09356	0.2379	0.2226	0.09893	0.2460
0.30	0.2175	0.09885	0.2256	0.2342	0.1051	0.2351	0.2509	0.1110	0.2432

$m = 0.60$

0	0.1360	0.05915	0.2292	0.1466	0.06289	0.2384	0.1571	0.06648	0.2461
0.10	0.1599	0.06903	0.2248	0.1720	0.07327	0.2338	0.1841	0.07729	0.2415
0.20	0.1838	0.07892	0.2215	0.1975	0.08364	0.2304	0.2112	0.08813	0.2379
0.30	0.2076	0.08880	0.2190	0.2229	0.09401	0.2277	0.2382	0.09897	0.2352

$x = 0.50$

c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		

$m = 0.20$

0	0.1583	0.09210	0.2032	0.1766	0.1003	0.2149	0.1948	0.1079	0.2241
0.10	0.1822	0.1056	0.2005	0.2029	0.1148	0.2120	0.2236	0.1234	0.2211
0.20	0.2062	0.1191	0.1984	0.2293	0.1293	0.2097	0.2524	0.1388	0.2187
0.30	0.2301	0.1326	0.1967	0.2557	0.1438	0.2079	0.2812	0.1542	0.2169

$m = 0.30$

0	0.1498	0.08063	0.1966	0.1662	0.08725	0.2072	0.1827	0.09339	0.2156
0.10	0.1727	0.09256	0.1939	0.1913	0.09999	0.2043	0.2099	0.1069	0.2127
0.20	0.1955	0.1045	0.1918	0.2163	0.1127	0.2021	0.2372	0.1204	0.2104
0.30	0.2184	0.1164	0.1902	0.2414	0.1255	0.2004	0.2644	0.1339	0.2086

$m = 0.40$

0	0.1422	0.07082	0.1904	0.1571	0.07619	0.2000	0.1719	0.08118	0.2078
0.10	0.1641	0.08138	0.1877	0.1809	0.08742	0.1973	0.1978	0.09303	0.2050
0.20	0.1859	0.09195	0.1857	0.2048	0.09865	0.1951	0.2237	0.1049	0.2028
0.30	0.2078	0.1025	0.1841	0.2287	0.1099	0.1934	0.1496	0.1167	0.2010

$m = 0.50$

0	0.1353	0.06238	0.1845	0.1489	0.06678	0.1934	0.1624	0.07086	0.2006
0.10	0.1563	0.07176	0.1819	0.1717	0.07671	0.1907	0.1870	0.08130	0.1978
0.20	0.1772	0.08114	0.1800	0.1945	0.08664	0.1886	0.2117	0.09174	0.1957
0.30	0.1981	0.09053	0.1784	0.2173	0.09657	0.1869	0.2364	0.1022	0.1939

$m = 0.60$

0	0.1291	0.05509	0.1790	0.1415	0.05872	0.1871	0.1538	0.06209	0.1939
0.10	0.1492	0.06344	0.1765	0.1633	0.06753	0.1845	0.1774	0.07131	0.1911
0.20	0.1693	0.07179	0.1746	0.1851	0.07633	0.1825	0.2010	0.08054	0.1890
0.30	0.1893	0.08014	0.1730	0.2069	0.08513	0.1809	0.2245	0.08977	0.1874

$x = 0.60$

c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		

$m = 0.20$

0	0.1422	0.08528	0.1545	0.1630	0.09350	0.1647	0.1838	0.1009	0.1724
0.10	0.1617	0.09678	0.1530	0.1851	0.1060	0.1631	0.2085	0.1142	0.1707
0.20	0.1812	0.1083	0.1519	0.2072	0.1184	0.1618	0.2332	0.1275	0.1694
0.30	0.2007	0.1198	0.1509	0.2293	0.1309	0.1608	0.2579	0.1408	0.1683

$m = 0.30$

0	0.1348	0.07330	0.1493	0.1536	0.07981	0.1586	0.1724	0.08563	0.1657
0.10	0.1534	0.08325	0.1479	0.1746	0.09051	0.1570	0.1958	0.09702	0.1641
0.20	0.1720	0.09319	0.1467	0.1955	0.1012	0.1558	0.2191	0.1084	0.1628
0.30	0.1906	0.1031	0.1458	0.2165	0.1119	0.1548	0.2425	0.1198	0.1617

$m = 0.40$

0	0.1282	0.06320	0.1445	0.1453	0.06839	0.1529	0.1624	0.07304	0.1595
0.10	0.1459	0.07182	0.1431	0.1652	0.07763	0.1514	0.1846	0.08283	0.1579
0.20	0.1637	0.08045	0.1420	0.1852	0.08687	0.1502	0.2067	0.09262	0.1567
0.30	0.1815	0.08907	0.1411	0.2051	0.09611	0.1493	0.2288	0.1024	0.1557

$m = 0.50$

0	0.1221	0.05464	0.1399	0.1978	0.05882	0.1477	0.1535	0.06256	0.1538
0.10	0.1391	0.06214	0.1386	0.1569	0.06682	0.1462	0.1746	0.07100	0.1522
0.20	0.1562	0.06964	0.1375	0.1759	0.07481	0.1451	0.1957	0.07945	0.1510
0.30	0.1732	0.07714	0.1366	0.1949	0.08281	0.1441	0.2167	0.08789	0.1501

$m = 0.60$

0	0.1166	0.04736	0.1357	0.1311	0.05074	0.1428	0.1456	0.05377	0.1484
0.10	0.1330	0.05389	0.1343	0.1493	0.05768	0.1414	0.1657	0.06108	0.1470
0.20	0.1493	0.06043	0.1333	0.1675	0.06462	0.1403	0.1858	0.06838	0.1458
0.30	0.1656	0.06696	0.1325	0.1857	0.07157	0.1394	0.2059	0.07569	0.1449

$x = 0.70$

c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		

$m = 0.20$

0	0.1200	0.07253	0.1114	0.1436	0.08044	0.1199	0.1671	0.08716	0.1260
0.10	0.1350	0.08154	0.1106	0.1614	0.09034	0.1191	0.1877	0.09781	0.1252
0.20	0.1501	0.09056	0.1101	0.1798	0.1002	0.1185	0.2083	0.1085	0.1245
0.30	0.1651	0.09957	0.1096	0.1970	0.1101	0.1180	0.2289	0.1191	0.1240

$m = 0.30$

0	0.1139	0.06074	0.1075	0.1353	0.06686	0.1153	0.1567	0.07205	0.1209
0.10	0.1282	0.06833	0.1068	0.1522	0.07513	0.1146	0.1762	0.08090	0.1201
0.20	0.1425	0.07591	0.1063	0.1691	0.08340	0.1140	0.1956	0.08976	0.1195
0.30	0.1568	0.08349	0.1058	0.1859	0.09167	0.1135	0.2150	0.09861	0.1190

$m = 0.40$

0	0.1083	0.05103	0.1040	0.1280	0.05579	0.1111	0.1476	0.05984	0.1153
0.10	0.1220	0.05742	0.1033	0.1440	0.06273	0.1104	0.1660	0.06723	0.1155
0.20	0.1357	0.06382	0.1027	0.1600	0.06966	0.1098	0.1844	0.07462	0.1149
0.30	0.1494	0.07021	0.1023	0.1761	0.07660	0.1093	0.2028	0.08202	0.1144

$m = 0.50$

0	0.1033	0.04298	0.1006	0.1214	0.04672	0.1072	0.1395	0.04990	0.1120
0.10	0.1164	0.04839	0.09997	0.1367	0.05255	0.1065	0.1570	0.05609	0.1112
0.20	0.1295	0.05379	0.09945	0.1520	0.05839	0.1059	0.1745	0.06229	0.1106
0.30	0.1426	0.05920	0.09902	0.1673	0.06422	0.1054	0.1919	0.06848	0.1101

$m = 0.60$

0	0.09877	0.03629	0.09750	0.1155	0.03924	0.1035	0.1323	0.04176	0.1080
0.10	0.1113	0.04087	0.09687	0.1301	0.04417	0.1029	0.1489	0.04696	0.1073
0.20	0.1239	0.04545	0.09637	0.1447	0.04909	0.1023	0.1656	0.05217	0.1067
0.30	0.1364	0.05003	0.09596	0.1593	0.05401	0.1019	0.1822	0.05738	0.1062

$x = 0.80$

c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		

$m = 0.20$

0	0.09169	0.05351	0.07240	0.1182	0.06055	0.07907	0.1448	0.06597	0.08324
0.10	0.1023	0.05966	0.07212	0.1318	0.06746	0.07875	0.1613	0.07349	0.08291
0.20	0.1128	0.06582	0.07189	0.1453	0.07437	0.07849	0.1778	0.08097	0.08264
0.30	0.1234	0.07197	0.07170	0.1589	0.08128	0.07828	0.1944	0.08846	0.08241

$m = 0.30$

0	0.08698	0.04310	0.06982	0.1113	0.04834	0.07591	0.1356	0.05239	0.07978
0.10	0.09704	0.04807	0.06955	0.1241	0.05388	0.07561	0.1511	0.05836	0.07946
0.20	0.1071	0.05304	0.06933	0.1369	0.05942	0.07537	0.1666	0.06434	0.07921
0.30	0.1172	0.05801	0.06915	0.1496	0.06495	0.07516	0.1821	0.07031	0.07899

$m = 0.40$

0	0.08276	0.03481	0.06744	0.1051	0.03876	0.07303	0.1275	0.04180	0.07662
0.10	0.09235	0.03884	0.06717	0.1173	0.04321	0.07274	0.1421	0.04658	0.07632
0.20	0.1019	0.04287	0.06696	0.1294	0.04766	0.07250	0.1568	0.05137	0.07607
0.30	0.1115	0.04689	0.06679	0.1415	0.05212	0.07231	0.1714	0.05615	0.07586

$m = 0.50$

0	0.07893	0.02820	0.06522	0.09966	0.03119	0.07037	0.1204	0.03349	0.07371
0.10	0.08811	0.03147	0.06497	0.1112	0.03478	0.07009	0.1342	0.03733	0.07342
0.20	0.09728	0.03474	0.06477	0.1227	0.03837	0.06987	0.1481	0.04118	0.07319
0.30	0.1065	0.03801	0.06460	0.1342	0.04197	0.06968	0.1620	0.04503	0.07299

$m = 0.60$

0	0.07546	0.02290	0.06315	0.09475	0.02517	0.06791	0.1140	0.02693	0.07103
0.10	0.08425	0.02556	0.06291	0.1057	0.02808	0.06765	0.1272	0.03003	0.07075
0.20	0.09303	0.02822	0.06272	0.1167	0.03099	0.06743	0.1404	0.03313	0.07052
0.30	0.1018	0.03088	0.06256	0.1277	0.03390	0.06725	0.1536	0.03623	0.07034

$$x = 0.90$$

c	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4	Σ_1	Σ_3	Σ_4
	$\epsilon = 0.02$			$\epsilon = 0.06$			$\epsilon = 0.08$		

$$m = 0.20$$

0	0.05724	0.02864	0.03646	0.08706	0.03352	0.04042	0.1169	0.03655	0.04234
0.10	0.06336	0.03170	0.03639	0.09634	0.03709	0.04034	0.1293	0.04043	0.04227
0.20	0.06948	0.03476	0.03634	0.1056	0.04065	0.04028	0.1417	0.04431	0.04220
0.30	0.07560	0.03782	0.03630	0.1149	0.04422	0.04023	0.1542	0.04819	0.04215

$$m = 0.30$$

0	0.05415	0.02149	0.03508	0.08157	0.02490	0.03873	0.1090	0.02702	0.04053
0.10	0.05995	0.02379	0.03501	0.09027	0.02755	0.03866	0.1206	0.02989	0.04046
0.20	0.06575	0.02609	0.03496	0.09897	0.03021	0.03860	0.1322	0.03276	0.04040
0.30	0.07155	0.02839	0.03492	0.1077	0.03286	0.03855	0.1438	0.03564	0.04035

$$m = 0.40$$

0	0.05140	0.01618	0.03381	0.07676	0.01858	0.03718	0.1021	0.02007	0.03887
0.10	0.05692	0.01792	0.03375	0.08496	0.02057	0.03712	0.1130	0.02221	0.03881
0.20	0.06243	0.01965	0.03370	0.09316	0.02255	0.03706	0.1239	0.02435	0.03875
0.30	0.06794	0.02139	0.03366	0.1014	0.02454	0.03702	0.1348	0.02649	0.03870

$$m = 0.50$$

0	0.04893	0.01222	0.03263	0.07251	0.01392	0.03577	0.09610	0.01498	0.03736
0.10	0.05419	0.01353	0.03258	0.08027	0.01541	0.03570	0.1064	0.01658	0.03729
0.20	0.05944	0.01485	0.03253	0.08803	0.01690	0.03565	0.1166	0.01818	0.03724
0.30	0.06469	0.01616	0.03249	0.09579	0.01839	0.03561	0.1269	0.01978	0.03719

$$m = 0.60$$

0	0.04670	0.00923	0.03155	0.06874	0.01047	0.03446	0.09077	0.01122	0.03596
0.10	0.05172	0.01025	0.03149	0.07610	0.01159	0.03440	0.1005	0.01242	0.03589
0.20	0.05674	0.01124	0.03145	0.08347	0.01271	0.03435	0.1102	0.01362	0.03584
0.30	0.06176	0.01224	0.03141	0.09083	0.01383	0.03431	0.1199	0.01482	0.03580

