

공학석사 학위논문

다단계 최적화기법을 이용한 비비례 감쇠 구조물의  
진동특성 변경에 관한 연구

A Study on Modification of Vibration Characteristics for  
Nonproportional Damping Structure Using Multi-level  
Optimization Technique

지도교수 박한일

2008년 2월

한국해양대학교 대학원

해양개발공학과

민 천 홍

本 論文을 閔天鴻의 工學碩士 學位論文으로 認准함.

위원장 공학박사 최 경 식 (인)

위 원 공학박사 김 재 수 (인)

위 원 공학박사 박 한 일 (인)

2008年 2月

한국해양대학교 대학원

해양개발공학과

민 천 홍

A Study on Modification of Vibration Characteristics for Nonproportional  
Damping Structure Using Multi-level Optimization Technique

by

Cheon Hong Min

Graduate School of Korea Maritime University

**Abstract**

It is a recent trend for advanced ships and submarines to apply composite structure with damped material. Many researches on optimization technique for vibration characteristics have carried out in order to reduce vibrations and noises.

There are two methods on vibration analysis for structural dynamic. One is a finite element analysis, the other is experimental vibration analysis.

First, the finite element analysis can accurately analyze vibration parameters but it has a defect, that is, the computational time rapidly increases when structures get bigger and bigger.

Second, the experimental vibration analysis is the process to identify structural dynamic characteristics such as natural frequencies, modal damping ratios and mode shapes.

In this study, optimum analysis for nonproportional damping system is conducted using the multi-level optimization technique, where finite element analysis and experimental vibration analysis are combined.

The results obtained in this research are accurate and computational time is decreased. The results show that this technique is useful for the optimum modification of vibration characteristics for nonproportional damping structures.

# 목 차

Abstract .....	i
목차 .....	ii
표 목차 .....	iii
그림 목차 .....	iv
1. 서 론 .....	1
2. 다단계 최적화 방법 .....	2
2.1 일반점성 감쇠 시스템 .....	2
2.2 곡선 맞춤법(Curve fitting method) .....	7
2.2.1 선형직접법 .....	7
2.2.2 Newton-Raphson법 .....	8
2.3 부분구조합성법 .....	11
2.4 감도해석법 .....	13
2.5 DSIM(Direct System Identification Method) .....	18
2.6 최적구조변경법 .....	21
2.7 해석순서 .....	22
3. 실험검증 .....	24
3.1 감쇠평판의 실험진동 해석 .....	24
3.1.1 실험장치 구성 및 실험방법 .....	24
3.1.2 곡선맞춤 순서 .....	24
3.1.3 곡선맞춤 .....	26
3.2 4자유도 시스템의 다단계 최적설계 .....	30
4. 결론 .....	34
5. 참고문헌 .....	35

## 표 목차

Table. 1 Voluntary resonance frequency and modal damping ratio .....	25
Table. 2 Natural frequency and modal damping ratio .....	29
Table. 3 Mass, damping, stiffness of the initial system .....	30
Table. 4 Natural frequencies and modal damping ratios of the initial system .....	31
Table. 5 Compared Substructure synthesis results with exact solutions .....	31
Table. 6 eigenvalues .....	32
Table. 7 Results by Multi-level Optimization Technic .....	33

## 그림 목차

Fig. 1 Flowchart of present optimization process .....	23
Fig. 2 Plate attached damping material .....	25
Fig. 3 Plot of accelerance FRF .....	25
Fig. 4 Measured and curve-fitted accelerance by liner-direct method .....	27
Fig. 5 Measured and curve-fitted accelerance by Newton-Raphson method .....	27
Fig. 6 Mode shapes of plate attached damping material .....	29
Fig. 7 Four degree of freedom system .....	30
Fig. 8 Plot of the accelerance transfer function .....	32
Fig. 9 Plot of the accelerance transfer function by Multi-level Optimization Technique .....	33

# 1. 서론

현재 선박이나 해양구조물은 더욱 복잡하고 정교해지고 있다. 더욱이 이용자들은 예전에 비해 소음이나 진동에 관해 더욱 쾌적한 환경을 원하고 있다. 때문에 정교한 구조해석을 필요로 한다. 그 대표적인 해석방법으로 유한요소법이 사용되고 있다. 일반적으로 구조물이 복잡해지면 해석 결과의 정확성을 높이기 위해 요소수를 증가시켜야 한다. 결국 자유도가 매우 커지게 되고 계산시간이 증가하게 된다. 이러한 문제점을 개선하기 위해서 구조물 전체를 여러 개의 단순한 부분구조로 나누어 해석하는 부분구조합성법이 실용적인 방법으로 사용되고 있다.

부분구조합성법은 구조물의 일부분을 변경할 경우 변경할 부분의 데이터만 새로 작성하고 나머지 부분의 데이터는 그대로 이용함으로써 모델링의 효율성과 결합부의 특성을 고려할 수 있고 결합부의 특성을 비교적 자유롭게 설정할 수 있는 장점이 있다.

그러나 유한요소법이나 부분구조합성법은 구조물에 대한 정확한 해석 결과를 제시하는 반면 보다 좋은 특성의 구조물의 설계를 제시하여 주는 것은 아니다. 해석결과만으로는 최적의 구조물을 제작하기 위한 설계변경 문제와 구조변경에 문제에 대한 명확한 해결책을 제시할 수 없다. 결국 해석결과를 토대로 설계자의 경험이나 직관 등에 의해 설계를 변경한 후 재해석하여 설계조건을 확인하는 시행착오적인 방법에 의존할 수밖에 없다. 이렇듯 목적인 동특성을 실현하기 위한 최적설계 시 설계변경을 지나치게 반복하는 것은 효율적인 방법이 아니다. 이러한 점을 극복하기 위한 방법의 하나로서 감도해석법이 있다.

감도란 어떤 특정한 부분의 형상이나 치수 등의 설계변수를 바꾸었을 때 해석 결과 값에 미치는 영향의 크기를 나타낸 것이다. 설계변경이 동특성에 미치는 영향을 계산할 수 있다면 효율적인 설계를 할 수 있다. 최적설계를 행하기 위한 설계변수는 감도해석법을 이용하면 한 번의 계산으로 결정할 수 있다.

기존의 연구로써 박석주 등은 부분구조합성법과 감도해석을 이용한 질량 최소화 문제 및 구조변경 문제를 해석하였다[1][2],[3],[4],[5]. 그리고 유성근 등은 유한차분 감도해석을 이용하여 구조 동특성 변경 문제를 해석 하였다[6]. 그러나 앞서의 연구들은 비 감쇠 시스템 혹은 비례점성 감쇠 시스템에 관한 연구로써 비교적 감쇠가 큰 시스템, 일반점성 감쇠 시스템의 적용에는 한계가 있다.

본 연구에서는 다자유도 곡선맞춤법, 부분구조합성법, 감도해석법을 이용한 다단계 최적화 방법을 고 감쇠 구조물의 동특성 최적 설계에 적용한다. 간단한 4자유도 시스템의 동특성 최적설계를 실시하고 그 방법의 유효성에 대하여 검토한다.

## 2. 다단계 최적화 방법

### 2.1 일반점성 감쇠 시스템

감쇠가 큰 시스템의 경우 감쇠행렬은 일반적으로 비례감쇠로 가정하여 이용할 수 없다. 일반점성 감쇠의 경우에는 비 감쇠 고유모드에 의한 운동 방정식을 모드 좌표로써 이용할 수 없다. 이와 같은 경우의 모드 좌표는 아래의 방법으로 정의하는 것이 일반적으로 행해지고 있다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

$[M]$ 은 질량행렬,  $[C]$ 는 감쇠행렬,  $[K]$ 는 강성행렬이며,  $\{x\}$ 는 변위벡터,  $\{f\}$ 는 힘 벡터이다.

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\} \quad (2)$$



식 (1)과 식 (2)를 조합하면,

$$\begin{bmatrix} CM \\ M0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$[D]\{\dot{y}\} + [E]\{y\} = \{p\} \quad (4)$$

고유치 해석을 위해  $\{p\}=0$ 으로 생각하고 식 (5)를 식 (4)에 대입하여 정리한다.

$$\{y\} = \{Y\}e^{\lambda t}, \quad \{\dot{y}\} = \lambda\{Y\}e^{\lambda t} \quad (5)$$

$$[D]\lambda\{Y\}e^{\lambda t} + [E]\{Y\}e^{\lambda t} = \{0\} \quad (6)$$

$$(\lambda[D] + [E])\{Y\} = \{0\} \quad (7)$$

여기서  $\{Y\} \neq \{0\}$ 이기 때문에 다음과 같은 일반 고유치 해석이 된다.

$$\det(\lambda[D] + [E]) = 0 \quad (8)$$

식 (8)을 고유치 해석 하면 고유치 행렬  $[A]$ 과 고유치 벡터 행렬  $[\Psi]$ 을 구할 수 있다.

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix}, \quad [\Psi] = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_{2n}] \quad (9)$$

$$[E][\Psi] = [D][\Psi][\Lambda] \quad (10)$$

식 (10)의 양변에  $[\Psi]^T$ 를 곱해주고 전치하여 비교하면 식 (11), 식 (12)와 같다.

$$[\Psi]^T[E][\Psi] = [\Psi]^T[D][\Psi][\Lambda] \quad (11)$$

$$[\Psi]^T[E][\Psi] = [\Lambda][\Psi]^T[D][\Psi] \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)의 좌변이 같기 때문에 우변 역시 같아야 한다. 그러므로 식 (13)과 식 (14)가 성립한다.

$$[\Psi]^T[E][\Psi] = [\Lambda] \quad (13)$$

$$[\Psi]^T[D][\Psi] = [I] \quad (14)$$

식 (13)과 식 (14)에 의해 넓은 의미의 직교성이 성립함을 알 수 있다.

좌표변환 행렬을  $[\Psi]$ 를 사용하여 식 (4)를 모드좌표로 변환한다.

$$\{y\} = [\Psi]\{\eta\}, \quad \{\dot{y}\} = [\Psi]\{\dot{\eta}\} \quad (15)$$

$$[D][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [E][\Psi]\{\eta\} = \{p\} \quad (16)$$

식 (16)의 양쪽 앞쪽에  $[\Psi]^T$ 를 곱하면 식 (17)과 같다.

$$[\Psi]^T[D][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [\Psi]^T[E][\Psi]\{\eta\} = [\Psi]^T\{p\} \quad (17)$$

식 (13)과 식 (14)를 식 (17)에 대입하면 식 (18)로 정리된다.

$$\{\dot{\eta}\} + [A]\{\eta\} = [\Psi]^T\{p\} \quad (18)$$

식 (18)을 계산하자.

$$\{\eta\} = \{N\}e^{\lambda t} \quad (19)$$

$$\{p\} = \{P\}e^{\lambda t} \quad (20)$$

식 (19)와 식 (20)을 식 (18)에 대입하면 다음과 같다.

$$\lambda\{N\}e^{\lambda t} + [A]\{N\}e^{\lambda t} = [\Psi]^T\{P\}e^{\lambda t} \quad (21)$$

$e^{\lambda t} \neq 0$  이므로 식 (21)을  $e^{\lambda t}$ 으로 나누고 정리하면 식 (22)가 된다.

$$(\lambda[I] + [A])\{N\} = [\Psi]^T\{P\} \quad (22)$$

여기서 식 (22)의 좌변 괄호안은 식 (23)으로 정의된다.

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1^* & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda + \lambda_1^* & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (23)$$

식 (23)을 식 (22)에 대입하여  $\{N\}$ 을 구하면 식 (24)와 같다.

$$\{N\} = [B]^{-1}[\Psi]^T\{P\} \quad (24)$$

식 (5), 식 (15), 식 (19) 및 식 (24)에 의하여 식 (25)가 정의된다.

$$[Y] = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x \end{pmatrix} = [\Psi][B]^{-1}[\Psi]^T\{P\} \quad (25)$$

식 (25)에서 우변 앞쪽 세 개의 항이 전달함수를 나타낸다. 또  $\omega$ 에 관한 함수로 나타내면 식 (26)과 같다.

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{U_r + jV_r}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{U_r - jV_r}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} \quad (26)$$

여기서  $\sigma_r = \omega_{nr}\zeta_r$ ,  $\omega_{nr}$ 은 고유진동수,  $\zeta_r$ 은 모드 감쇠비,  $U_r + jV_r = \frac{\psi_{ir}\psi_{lr}}{d_r}$ ,  $\psi$ 는 고유벡터이다.

대상주파수를 한정하여 잉여질량(residual mass) S와 잉여강성(residual stiffness) Z를 고려한 진폭응답 전달함수(compliance transfer function)는 식 (27)로 표현된다[11].

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{U_r + jV_r}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{U_r - jV_r}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} - \frac{C + jD}{\omega^2} + E + jF \quad (27)$$

일반적으로 잉여질량과 잉여강성은 복소수로 표현된다. 그리고 가속도응답 전달함수(accelerance transfer function)는 식 (28)과 같다.

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{-\omega^2(U_r + jV_r)}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2(U_r - jV_r)}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} + \frac{1}{S} - \frac{\omega^2}{Z} \quad (28)$$

## 2.2 곡선 맞춤법(Curve fitting method)

### 2.2.1 선형 직접법

앞에서 설명한 식 (27)의 미지수는 두 종류로 크게 나눌 수 있다. 우선 감쇠 고유진동수  $\omega_{dr}$ 과 모드 감쇠율  $\sigma_r$ 은 진동계 전체를 지배하는 전체량이 되고 원리적으로는 변화하지 않는 상수 값이 된다. 이것에 비해  $U_r, V_r, C, D, E, F$ 는 고유모드에 의해 결정되며 가진점이나 응답점의 이동에 의해 변화하는 국부치가 된다. 만약  $\omega_{dr}$ 과  $\sigma_r$ 이 어떤 방법으로 이미 구해져 있는 경우에는 초기치를 필요로 하지 않고, 또 반복하지 않는 1회의 계산에 의해 나머지 미지수를 결정할 수 있다.

실수부와 허수부를 분리하면,

$$G_i = A_{Rei} + jA_{Imi}$$

$$a_r = \sigma_r^2 + (\omega_i + \omega_{dr})^2$$

$$A_{Rei} = -\frac{c}{\omega_i^2} + E + \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{U_r \sigma_r + V_r (\omega_i - \omega_{dr})}{a_r} + \frac{U_r \sigma_r - V_r (\omega_i + \omega_{dr})}{b_r} \right\}$$

$$A_{Imi} = -\frac{D}{\omega_i^2} + F + \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{V_r \sigma_r - U_r (\omega_i - \omega_{dr})}{a_r} - \frac{V_r \sigma_r + U_r (\omega_i + \omega_{dr})}{b_r} \right\} \quad (29)$$

값들이 데이터로 얻어지면 그 전달 함수를 식 (29)에 표현한 경우 최소제곱법을 이용하여 오차를 표현하면 식 (30)과 같다.

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \left\{ (G_{Rei} - A_{Rei})^2 + (G_{Imi} - A_{Imi})^2 \right\} \quad (30)$$

식 (30)을 선형미지수로 미분하여 0으로 두면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial c} &= \sum_{i=1}^m \frac{2(G_{Rei} - A_{Rei})}{\omega_i^2} = 0, & \frac{\partial \lambda}{\partial D} &= \sum_{i=1}^m \frac{2(G_{Imi} - A_{Imi})}{\omega_i^2} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial E} &= \sum_{i=1}^m -2(G_{Rei} - A_{Rei}) = 0, & \frac{\partial \lambda}{\partial F} &= \sum_{i=1}^m -2(G_{Imi} - A_{Imi}) = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial U_r} &= \sum_{i=1}^m -2 \left\{ \left( \frac{\sigma_r}{a_r} + \frac{\sigma_r}{b_r} \right) (G_{Rei} - A_{Rei}) - \left( \frac{\omega_i - \omega_{dr}}{a_r} + \frac{\omega_i + \omega_{dr}}{b_r} \right) (G_{Imi} - A_{Imi}) \right\} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial V_r} &= \sum_{i=1}^m -2 \left\{ \left( \frac{\omega_i - \omega_{dr}}{a_r} - \frac{\omega_i + \omega_{dr}}{b_r} \right) (G_{Rei} - A_{Rei}) + \left( \frac{\sigma_r}{a_r} - \frac{\sigma_r}{b_r} \right) (G_{Imi} - A_{Imi}) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

이것이 2n+4개의 1차 방정식이 되고 실험 데이터  $G_{Rei}$ 와  $G_{Imi}$ 가 주어지면 풀이가 가능하게 된다.

### 2.2.2 Newton-Raphson법

식 (28)에서 S와 Z는 일반적으로 복소수가 되므로 이것을 아래와 같이 표현한다.

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{-\omega^2(U_r + jV_r)}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2(U_r - jV_r)}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} + C + jD - \omega^2 E - j\omega^2 F \quad (32)$$

진동실험에 의해 주어지는 전달함수의 실험데이터를 식 (32)의 형태로 표현하기 위해서는 식 (32)중의  $4n+4$ 개의 미지수 즉,  $\omega_{dr}, \sigma_r, U_r, V_r, C, D, E, F$ 가 필요하다. 이것들을 통합하여  $\gamma_h (h=1 \sim 4n+4)$ 로 하고 이들의 초기치를  $\gamma_{hs}$ 라 하면 식 (33) 같이 표현 가능하다.

$$\gamma_h = \gamma_{hs} + \Delta\gamma_h \quad (33)$$

식 (33)을  $\Delta\gamma_h$ 에 관해 테일러급수 전개하고 근사적으로 1차 항까지 취하면 식 (34)가 된다.

$$L(\omega, \gamma_h) \approx L(\omega, \gamma_{hs}) + \sum_{h=1}^{4n+4} \frac{\partial L}{\partial \gamma_h}(\omega, \gamma_{hs}) \cdot \Delta\gamma_h = A_{Re} + jA_{Im} \quad (34)$$

여기서  $\frac{\partial L}{\partial \gamma_h}$ 는 식 (35)로 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega_{dr}} &= \frac{-j\omega^2(U_r + jV_r)}{\{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} + \frac{j\omega^2(U_r - V_r)}{\{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_r} &= \frac{\omega^2(U_r + jV_r)}{\{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} + \frac{\omega^2(U_r - jV_r)}{\{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial U_r} &= \frac{-\omega^2}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial V_r} &= \frac{-j\omega^2}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{j\omega^2}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial C} &= 1, \quad \frac{\partial L}{\partial D} = j, \quad \frac{\partial L}{\partial E} = -\omega^2, \quad \frac{\partial L}{\partial F} = -j\omega^2 \end{aligned} \quad (35)$$

m개의 각진동수  $\omega$ 에 대해, 실험에 의해 accelerance의 실부  $L_{Rei} = L_{Re}$  ( $\omega = \omega_i$ ), 허수부  $L_{Imi} = L_{Im}$  ( $\omega = \omega_i$ )가 데이터로서 얻어지고 또 근사식의 실수부와 허수부가 각각  $A_{Rei}$ ,  $A_{Imi}$ 로 얻어지면 실험데이터와 근사식데이터의 오차를 최소제곱법으로 표현하면 식 (36)과 같다.

$$\lambda = \sum_{i=1}^m (L_{Rei} - A_{Rei})^2 + (L_{Imi} - A_{Imi})^2 \quad (36)$$

$\lambda$ 를  $\Delta\gamma_h$ 로 미분하고 0으로 두면 식 (37)로 정리된다.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\Delta\gamma_h} = 2 \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial A_{Rei}}{\partial\Delta\gamma_h} (A_{Rei} - L_{Rei}) + \frac{\partial A_{Imi}}{\partial\Delta\gamma_h} (A_{Imi} - L_{Imi}) \right] = 0 \quad (37)$$

각 변수에 대해 실수부만 고려하자. 먼저  $\Delta\omega_{dr}$ 에 대해 미분하면 식 (38)과 같다.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\Delta\omega_{dr}} = 2 \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial A_{Rei}}{\partial\Delta\omega_{dr}} (A_{Rei} - L_{Rei}) + \frac{\partial A_{Imi}}{\partial\Delta\omega_{dr}} (A_{Imi} - L_{Imi}) \right] = 0 \quad (38)$$

여기서,  $\frac{\partial A_{Rei}}{\partial\Delta\omega_{dr}} = \frac{\partial L_{Rei}}{\partial\omega_{dr}}$

$$A_{Re} = Re \left[ \frac{\partial L}{\partial\omega_{dr}} \frac{\partial L}{\partial\sigma_r} \frac{\partial L}{\partial U_r} \frac{\partial L}{\partial V_r} \right] \begin{Bmatrix} \Delta\omega_{dr} \\ \Delta\sigma_r \\ \Delta U_r \\ \Delta V_r \end{Bmatrix} \quad (39)$$



$i = 1$  일때,

$$Re\left(\frac{\partial L}{\partial \omega_{dr}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \omega_{dr}} \cdot \Delta \omega_{dr} + \frac{\partial L}{\partial \sigma_r} \cdot \Delta \sigma_r + \frac{\partial L}{\partial U_r} \cdot \Delta U_r + \frac{\partial L}{\partial V_r} \cdot \Delta V_r - G\right) \quad (40)$$

최종적으로 식 (41)로 정리 된다.

$$\sum_{i=1}^m A_i \Delta \omega_{dr} + \sum_{i=1}^m B_i \Delta \sigma_r + \sum_{i=1}^m C_i \Delta U_r + \sum_{i=1}^m D_i \Delta V_r - \sum_{i=1}^m E_i G_i = 0 \quad (41)$$

여기서,

$$A = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}}\right)^2, \quad B = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}}\right)\left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \sigma_r}\right), \quad C = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}}\right)\left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial U_r}\right), \quad (42)$$

$$D = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}}\right)\left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial V_r}\right), \quad E = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}}\right)$$

각각의 변수들은 위와 같이 간단히 정리된다. 허수부 역시 위와 같이 정리된다. 최종적으로 변수와 같은 개수의 연립 일차방정식이 된다. 이 방정식을 풀면 초기치 값에 대한 변수의 값을 구할 수 있다. 이를 반복적으로 구하면 원하는 값에 수렴하게 된다.

### 2.3 부분구조합성법

변경전의 구조물의 특성이 미리 진동시험이나 유한요소법으로 얻어져 있다면, 그 전달함수 행렬은 각진동수  $\omega$ 의 함수로서 용이하게 구성할 수 있다[7],[9]. 일 반점성 감쇠계의 가속도응답 전달함수(accelerance transfer function)는 식 (43)과

같다.

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{-\omega^2(U_r + jV_r)}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2(U_r - jV_r)}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} + \frac{1}{S} - \frac{\omega^2}{Z} \quad (43)$$

식 (43)은 각 점마다의 accelerance를 각요소로 하는 n행 n열인 accelerance 행렬인  $[L_0(\omega)]$ 의 성분이 된다. 걸보기 질량  $[B_0(\omega)]$ 는  $[L_0(\omega)]$ 의 역행렬이므로 식 (44)와 같다.

$$[B_0(\omega)] = [L_0(\omega)]^{-1} \quad (44)$$

다음으로 이 구조물을 변경하는 것을 고려한다. 점  $i$ 에 질량  $\Delta m$ 을 부가할 때에 변화한 걸보기 질량  $[\Delta B(\omega)]$ 는 식 (45)와 같다.

$$[\Delta B(\omega)] = [\Delta M] \quad (45)$$

여기서  $[\Delta M]$ 은  $i$ 행  $i$ 열만의 성분만이  $\Delta m$ 이고 다른 모든 성분은 0인 행렬이다. 점  $i$ 와 점  $j$ 사이에 감쇠  $\Delta c$  또는  $\Delta k$ 를 부가할 때에 변화한 걸보기 질량  $[\Delta B(\omega)]$ 는 각각 식 (46), 식 (47)이 된다.

$$[\Delta B(\omega)] = \frac{1}{j\omega} [\Delta C] \quad (46)$$

$$[\Delta B(\omega)] = \frac{1}{-\omega^2} [\Delta K] \quad (47)$$

여기서  $[\Delta C]$ 와  $[\Delta K]$ 는  $i$ 행  $i$ 열과  $j$ 행  $j$ 열이  $\Delta c$ 와  $\Delta k$ 이다. 그리고  $i$ 행

$j$ 열과  $j$ 행  $i$ 열의 성분이  $-\Delta c$ 와  $-\Delta k$ 이고 다른 모든 성분은 0인 행렬이다.

이것에서 알 수 있는 것과 같이  $[\Delta M]$ ,  $[\Delta K]$  및  $[\Delta C]$ 는 변경하는 부분에 대응하는 성분만이 0이 아니고 다른 모든 성분은 0이 되는 행렬이다. 이 경우의 겉보기 질량의 변경량은 식 (45), 식(46)과 식(47)의 합으로 표현된다. 이와 같이 겉보기 질량의 변화량이 얻어지면 변경후의 겉보기 질량  $[B(\omega)]$ 는 식 (48)과 같다.

$$[B(\omega)] = [B_0(\omega)] + [\Delta B(\omega)] \quad (48)$$

변경후의 acceleranc행렬인  $[L(\omega)]$ 는 식 (49)와 같이 표현된다.

$$[L(\omega)] = [B(\omega)]^{-1} \quad (49)$$

식 (49)에 곡선맞춤법(Curve fitting method)을 적용하면 변경 후의 모드특성을 구할 수 있다.

본 방법의 특징은 다음과 같다.

- 1) 해석하는 주파수 영역을 자유로이 선택할 수 있다.
- 2) 실험모드해석에 있어서 곡선접합 프로그램과 연결하여 사용하기 편하다.
- 3) 비례점성 감쇠에서부터 일반점성 감쇠나 히스테리시스 감쇠의 전달함수도 이용할 수 있기 때문에 고 감쇠 모델의 해석이 가능 하다.
- 4) 잉여질량과 잉여강성을 고려하기 때문에 대상 주파수 범위외의 고유 모드 의 영향을 고려할 수 있다.

## 2.4 감도해석법

고유진동수와 고유진동형의 감도를 구하는 많은 방법들이 제안되어 있으나

여기에서는 Fox의 방법을 이용하기로 하고 다음과 같은 운동방정식을 고려하기로 한다[1],[11].

설계변수  $\gamma$ 가  $\gamma_0$ 에서 미소량  $\Delta\gamma$ 만큼 변하면 식 (50)과 같다.

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma \quad (50)$$

이 변화에 의해서 질량행렬이  $[M_0]$ 에서  $[M]$ 으로 강성행렬이  $[K_0]$ 에서  $[K]$ 로 감쇠행렬이  $[C_0]$ 에서  $[C]$ 로 변화하게 된다. 설계변수  $\gamma$ 에 관해 테일러급수 전개하고 1차 미분항만을 고려하여 근사적으로 표현하면 식 (51)과 같이 각각 표현된다.

$$[M] = [M_0] + \frac{\partial[M]}{\partial\gamma} \Delta\gamma = [M_0] + [M'] \Delta\gamma \quad (51)$$

$$[K] = [K_0] + \frac{\partial[K]}{\partial\gamma} \Delta\gamma = [K_0] + [K'] \Delta\gamma$$

$$[C] = [C_0] + \frac{\partial[C]}{\partial\gamma} \Delta\gamma = [C_0] + [C'] \Delta\gamma$$

또 고유진동수가  $\Omega_{0r}$ 에서  $\Omega_r$ 로 고유모드가  $\{\psi_{0r}\}$ 에서  $\{\psi_r\}$ 로 변했다고 하면 설계변수  $\gamma$ 에 관해 테일러 전개하고 1차 미분항만을 고려하여 근사적으로 표현하면 식 (52)와 같이 각각 표현된다.

$$\lambda_r = \lambda_{0r} + \frac{\partial\lambda_r}{\partial\gamma} \Delta\gamma = \lambda_{0r} + \lambda' \Delta\gamma \quad (52)$$

$$\{\psi_r\} = \{\psi_{0r}\} + \frac{\partial\{\psi_r\}}{\partial\gamma} \Delta\gamma = \{\psi_{0r}\} + \{\psi'\} \Delta\gamma$$

여기서

$$\lambda_r = \Omega_r^2, \quad \lambda'_r = 2\Omega_{0r} \frac{\partial \Omega_r}{\partial \gamma} \quad (53)$$

식 (53)을 통해 고유진동수의 감도를 구할 수 있다.

$$\Omega' = \frac{\lambda'}{2\Omega_{0r}} \quad (54)$$

일반점성 감쇠계에서 고유치문제는 식 (55)와 같이 표현된다.

$$(\lambda_r [D] + [E])\{\psi_r\} = \{0\} \quad (55)$$

여기서

$$[D] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & 0 \end{bmatrix}, \quad [E] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_r\} \\ \lambda_r \{\psi_r\} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

설계변수에 의해  $[D_0]$ 와  $[E_0]$ 가  $[D]$ 와  $[E]$ 로 변했다고 하면 설계변수  $\gamma$ 에 관해 테일러 전개하고 1차 미분항만을 고려하여 근사적으로 표현하면 식 (57)로 각각 표현된다.

$$[D] = [D_0] + \frac{\partial [D]}{\partial \gamma} \Delta \gamma = [D_0] + [D'] \Delta \gamma \quad (57)$$

$$[E] = [E_0] + \frac{\partial [E]}{\partial \gamma} \Delta \gamma = [E_0] + [E'] \Delta \gamma$$

$[D']$ 와  $[E']$ 는 식 (51)과 식 (56)에 의해 식 (58)과 같이 된다.

$$[D'] = \begin{bmatrix} [C'] & [M'] \\ [M'] & [0] \end{bmatrix}, [E'] = \begin{bmatrix} [K'] & [0] \\ [0] & -[M'] \end{bmatrix} \quad (58)$$

설계변수에 의해 고유벡터가  $\{\Psi_{0r}\}$ 에서  $\Psi_r$ 로 변했다고 하면 설계변수  $\gamma$ 에 관해 테일러급수 전개하고 1차 미분항만을 고려하여 근사적으로 표현하면 식 (59)가 된다.

$$\{\Psi_r\} = \{\Psi_{0r}\} + (\lambda' \{v_{0r}\} + \{\Psi'_r\}) \Delta\gamma \quad (59)$$

여기서

$$\{v_{0r}\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\psi_{0r}\} \end{Bmatrix}, \{\Psi'_r\} = \begin{Bmatrix} \{\psi'_r\} \\ \lambda_{0r} \{\psi'_r\} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

식 (55)에 식 (57), 식 (52) 및 식 (59)를 대입하고  $\Delta\gamma$ 에 관해서 전개한 후에  $\Delta\gamma$ 의 2차 이상의 항은 생략한다.

그 중에  $\Delta\gamma$ 의 0차항은 식 (55)에 의해 0이므로, 임의의  $\Delta\gamma$ 에 대해서 나머지 식이 0이되기 위해서는  $\Delta\gamma$ 의 계수가 0이어야 한다. 정리하면 식 (61)이 된다.

$$(\lambda_{0r} [D_0] + [E_0]) (\lambda' \{v_{0r}\}) + (\lambda_{0r} [D_0] + [E_0]) \{\Psi'_r\} + \lambda'_r [D_0] \{\Psi_{0r}\} = (\lambda_{0r} [D'] + [E']) \{\Psi_{0r}\} \quad (61)$$

식 (61)에 앞에서부터  $\{\Psi_{0r}\}^T$ 를 곱하면  $[D_0]$ 와  $[E_0]$ 는 대칭행렬이므로 좌변의 두항은 식 (55)를 전치한 것과 같이 된다. 따라서 고유치의 감도는 식 (62)와 같다.

$$\lambda_r' = \frac{-\{\Psi_{0r}\}^T(\lambda_{0r}[D'] + [E'])\{\Psi_{0r}\}}{\{\Psi_{0r}\}^T[D_0]\{\Psi_{0r}\}} \quad (62)$$

식 (62)를  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[C]$ 에 의한 표현으로 고치면 식 (63)이 된다.

$$\begin{aligned} \lambda_r' &= \frac{-\left(\{\psi_{0r}\}^T \lambda_{0r} \{\psi_{0r}\}^T\right) \left( \lambda_{0r} \begin{bmatrix} [C'] & [M'] \\ [M'] & [0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K'] & [0] \\ [0] & -[M'] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\psi_{0r}\} \\ \lambda_{0r} \{\psi_{0r}\}^T \end{Bmatrix}}{\left(\{\psi_{0r}\}^T \lambda_{0r} \{\psi_{0r}\}^T\right) \begin{bmatrix} [C_0] & [M_0] \\ [M_0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\psi_{0r}\} \\ \lambda_{0r} \{\psi_{0r}\}^T \end{Bmatrix}} \\ &= \frac{-\{\psi_{0r}\}^T (\lambda_{0r}^2 [M'] + \lambda_{0r} [C'] + [K']) \{\psi_{0r}\}}{\{\psi_{0r}\}^T (2\lambda_{0r} [M_0] + [C_0]) \{\psi_{0r}\}} \end{aligned} \quad (63)$$

이 식은  $r$ 차의 고유치 감도가 강성행렬의 감도  $[K']$ , 질량행렬의 감도  $[M']$ , 감쇠행렬의 감도  $[C']$  그리고  $r$ 차의 고유모드  $\{\psi_{0r}\}$ 에 의하여 표시됨을 보이고 있다. 위 식들은 1차 미분만을 고려하였으므로 식 (52)에서 얻어진 값들은 근사 값이 된다. 따라서 원하는 목표값을 얻기 위해서는 구해진 변경량을 가지고 고유치 해석을 반복하여 계산하여야 한다.

한편, 직접미분법을 이용한 감도해석법은 대상계가 복잡하거나 유한요소 입력 정보를 이용한 수식화가 복잡한 경우에 적용이 쉽지 않다. 따라서 이러한 경우는 유한요소의 종류나 인자에 관계없이 일반적으로 수식화가 가능한 수치해석적 미분방법이 감도해석에 사용되어야 한다.

함수  $y=f(x)$ 의 점  $Q$ 에서 미분은  $\Delta x \rightarrow 0$ 으로 수렴할 때, 다음과 같이 근사되어 진다.

$$f'(x)_Q = \left(\frac{dy}{dx}\right)_Q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_Q \simeq \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_Q \quad (64)$$

즉 설계변수  $\gamma$ 에 대한 질량행렬, 강성행렬 그리고 감쇠행렬의 미분  $\frac{\partial[M]}{\partial\gamma}$ ,  $\frac{\partial[K]}{\partial\gamma}$  그리고  $\frac{\partial[C]}{\partial\gamma}$ 는 각각  $\frac{[\Delta M]}{\Delta\gamma}$ ,  $\frac{[\Delta K]}{\Delta\gamma}$  그리고  $\frac{[\Delta C]}{\Delta\gamma}$ 로 근사시킬 수 있다. 설계변수의 미소 변화량  $\Delta\gamma$ 는 일반적으로 설계변수 변경량의  $10^{-2} \sim 10^{-6}$ 배로 사용한다. 여기서  $\Delta\gamma$ 의 값이 너무 크면 근사의 가정이 위배되고 너무 작으면 반복 계산 시 오차가 발생한다.

## 2.5 DSIM(Direct System Identification Method)

DSIM은 가진력과 응답 주파수를 이용하여 특성행렬을 직접 결정하는 모드 해석기법이다[8].

DSIM의 장점은 다음과 같다.

- 1) 유한요소법으로는 해석 곤란한 복잡한 구조물의 해석을 수행할 수 있다.
- 2) 유한요소법과 결합하기에 편리하다.
- 3) 진동해석과 정적해석을 편리하게 할 수 있다.
- 4) 실험에 의해 구해진 데이터를 이용하여 특성행렬을 작성하면 설계변경과 최적화를 수행하는 것이 용이하게 된다.

$n$ 자유도 시스템의 운동 방정식을 가속도에 관해 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\left( [M] - j\frac{1}{\omega_i} [C] - \frac{1}{\omega_i^2} [K] \right) \{\ddot{x}\} = \{F_i\} \quad (65)$$

시스템의 모든 가진 주파수  $\omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 에 대하여 식 (65)를 만족한다. 여기서,  $\{\ddot{x}_1\}, \{\ddot{x}_2\}, \dots, \{\ddot{x}_N\}$ 은 각각 가진력  $\{F_1\}, \{F_2\}, \dots, \{F_N\}$ 에 대한 시스템의 가속도 응답을 나타낸다. 식 (65)를 행렬로 표현하면 다음과 같다.



$$[M][\ddot{x}] - j[C][\ddot{x}][\Omega_1] - [K][\ddot{x}][\Omega_2] = [F] \quad (66)$$

여기서,

$$[\ddot{x}] = [\{\ddot{x}_1\}\{\ddot{x}_2\}\cdots\{\ddot{x}_N\}], \quad [F] = [\{F_1\}\{F_2\}\cdots\{F_N\}] \quad (67)$$

$$[\Omega_1] = \begin{bmatrix} \omega_1^{-1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \omega_N^{-1} \end{bmatrix}, \quad [\Omega_2] = \begin{bmatrix} \omega_1^{-2} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \omega_N^{-2} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$[M], [C], [K]$ 는 대칭행렬이므로 식 (66)은 다음과 같이 전치(Transpose)될 수 있다.

$$[\ddot{x}]^T [M] - j[\Omega_1][\ddot{x}]^T [C] - [\Omega_2][\ddot{x}]^T [K] = [F]^T \quad (69)$$

가진 주파수와 가진력은 가진 시험의 입력으로서 알고 있는 값이고, 응답 가속도는 가진 시험을 통하여 얻을 수 있는 값이기 때문에 식 (69)에서 특성행렬  $[M], [C], [K]$ 는 각각 미지수가 된다. 따라서, 식 (69)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$[\ddot{x}]^T - j[\Omega_1][\ddot{x}]^T - [\Omega_2][\ddot{x}]^T \cdot \begin{bmatrix} [M] \\ [C] \\ [K] \end{bmatrix} = [F]^T \quad (70)$$

식 (70)의  $[\ddot{x}], [\Omega_1], [\Omega_2], [F]$ 는 진동실험을 통해 측정된 값이다. 그러므로 미지수는 행렬  $[M], [C], [K]$ 의 성분이 되는  $k_{ji}, m_{ji}, c_{ji}$ 이다. 여기서 행렬  $[M], [C], [K]$ 의 대칭성을 고려해서 다음과 같이  $3n(n+1)/2$ 행 벡터로 변환할 수 있다.

$$\{S\}^T = \{m_{11} m_{21} m_{22} m_{31} m_{32} m_{33} \cdots m_{nn} c_{11} c_{21} c_{22} c_{31} c_{32} c_{33} \cdots c_{nn} k_{11} k_{21} k_{22} k_{31} k_{32} k_{33} \cdots k_{nn}\} \quad (71)$$

식 (71)의 좌변을 알고 있는 항과 미지항으로 분리하여 변환하면 다음과 같다.

$$[A_1]\{S\} = \{F_1\} \quad (72)$$

여기서  $[A_1]$ 는  $[\ddot{x}]$ ,  $[\Omega_1][\ddot{x}]$ ,  $[\Omega_2][\ddot{x}]$ 의 성분을  $\{S\}$ 의 구성에 맞게 변환하여 정리한 행렬이다.  $\{F_1\}$ 도  $\{S\}$ 의 구성에 맞게 변환하여 정리한 벡터이다. 시스템의 모든 자유도  $n$ 에 대하여 진동측정을 실시하면 각 주파수 마다 식 (72)가 성립하므로 측정 주파수  $N$ 을  $3n(n+1)/2$ 로 동일하게 측정하면 식 (72)를 풀 수 있다. 그러나 일반적으로  $N > 3n(n+1)/2$ 이므로 최소자승법으로 풀어야 한다. 그런데  $[A_1]$ ,  $\{F_1\}$ 는 복소수가 되고 자유도  $n$ 이 클때에는 복소방정식을 계산하여 정정치의 특성 행렬을 구하는 것이 곤란한 경우가 생긴다.

이러한 문제를 극복하기 위하여 다음과 같이 변환하여 계산한다[10].

$[\ddot{x}]$ ,  $[F]$ 는 복소수 행렬이므로 실수부와 허수부로 분리하여 나타낼 수 있다.

$$[\ddot{x}]^T = [x_{Re}^{\ddot{}}]^T + j[x_{Im}^{\ddot{}}]^T \quad (73)$$

$$[F]^T = [F_{Re}]^T + j[F_{Im}]^T$$

식 (73)을 식(70)에 대입하면 식 (74)가 된다.

$$\begin{bmatrix} [x_{Re}^{\ddot{}}]^T & [\Omega_1][x_{Im}^{\ddot{}}]^T - [\Omega_2][x_{Re}^{\ddot{}}]^T \\ [x_{Im}^{\ddot{}}]^T - [\Omega_1][x_{Re}^{\ddot{}}]^T & -[\Omega_2][x_{Im}^{\ddot{}}]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [M] \\ [C] \\ [K] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{Re}]^T \\ [F_{Im}]^T \end{bmatrix} \quad (74)$$

식 (74)의 모든 행렬의 원소는 실수이며, 좌변 두 행렬의 크기는 각각  $2N \times 3n$ ,  $3n \times n$ 이며 우변 행렬의 크기는  $2N \times n$ 이다.

좌변의 행렬을 벡터  $\{S\}$ 에 맞게 변환하여  $[A_2]$ 로 나타내고 우변의 행렬도  $\{S\}$ 에 맞게 변환하여 벡터  $\{F_2\}$ 로 나타내면 식 (75)와 같다.

$$[A_2]\{S\} = \{F_2\} \quad (75)$$

여기서,  $[A_2]$ 는  $2Nn \times 3n(n+1)/2$ 의 크기를 갖는 행렬,  $\{S\}$ 는  $3n(n+1)/2$ 행 벡터,  $\{F_2\}$ 는  $2Nn$ 행 벡터가 된다.

따라서 미지수  $[M], [C], [K]$ 의 원소는 식 (75)에서 최소제곱법을 이용하여 결정할 수 있다.

## 2.6 최적구조변경법

감도행렬을  $[A]$ , 설계변수의 변경량을  $\{x\}$ , 변경하려는 목적치와 초기치의 차이를  $\{y\}$ 로 하는 경우의 최적구조변경 문제는, 식 (76)과 같이 연립 1차방정식으로 나타낼 수 있다.

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (76)$$

여기서 감도행렬  $[A]$ 는 식 (77)과 같다.

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (77)$$

이때 감도행렬  $[A]$ 가 보통 정방행렬이 아니므로 최소제곱해를 구하는 문제가 된다.

만약 감도행렬  $[A]$ 의 행의 크기가 열의 크기보다 클 경우는 식 (78)로 계산한다.

$$\{x\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T\{y\} \quad (78)$$

한편 감도행렬  $[A]$ 의 열의 크기가 행의 크기보다 클 경우는 식 (79)로 계산한다.

$$\{x\} = [A]^T([A]^T[A])^{-1}\{y\} \quad (79)$$

설계변수 계산 및 구조변경 작업을 수렴할 때까지 반복 수행한다.

## 2.7 해석순서

설계대상 구조물이 많은 부재를 가지는 경우에, 설계변수와 제약조건의 증대, 구조해석과 감도해석에 따르는 계산량의 증대를 해결하기 위하여 몇 개의 단계로 나누어 최적화 하는 방법을 생각할 수 있다. 본 논문에서 이용하는 다단계 최적화 방법은 3개의 단계로 나누어진다.

첫 번째 단계에서 구조물에 포함되어 있는 여러 설계변수들의 관계를 조사하여 대표적인 변수를 설계변수로 설정한다. 그리고 감도해석법을 통해 감도행렬을 계산한다. 그 후 감도행렬을 사용하여 설계 변형량을 계산한다.

두 번째 단계에서는 감도해석을 통해 구해진 설계 변형량을 부분구조합성법을 이용하여 전달함수 데이터를 계산한다.

세 번째 단계에서는 두 번째 단계에서 구해진 전달함수 데이터를 이용하여

곡선맞춤 한다. 곡선맞춤으로 구해진 동특성과 목표로 하는 동특성을 비교하여 최적화를 실행한다.

본 논문에서 이용하는 다단계 최적화 방법의 진행 순서는 Fig. 1과 같다.

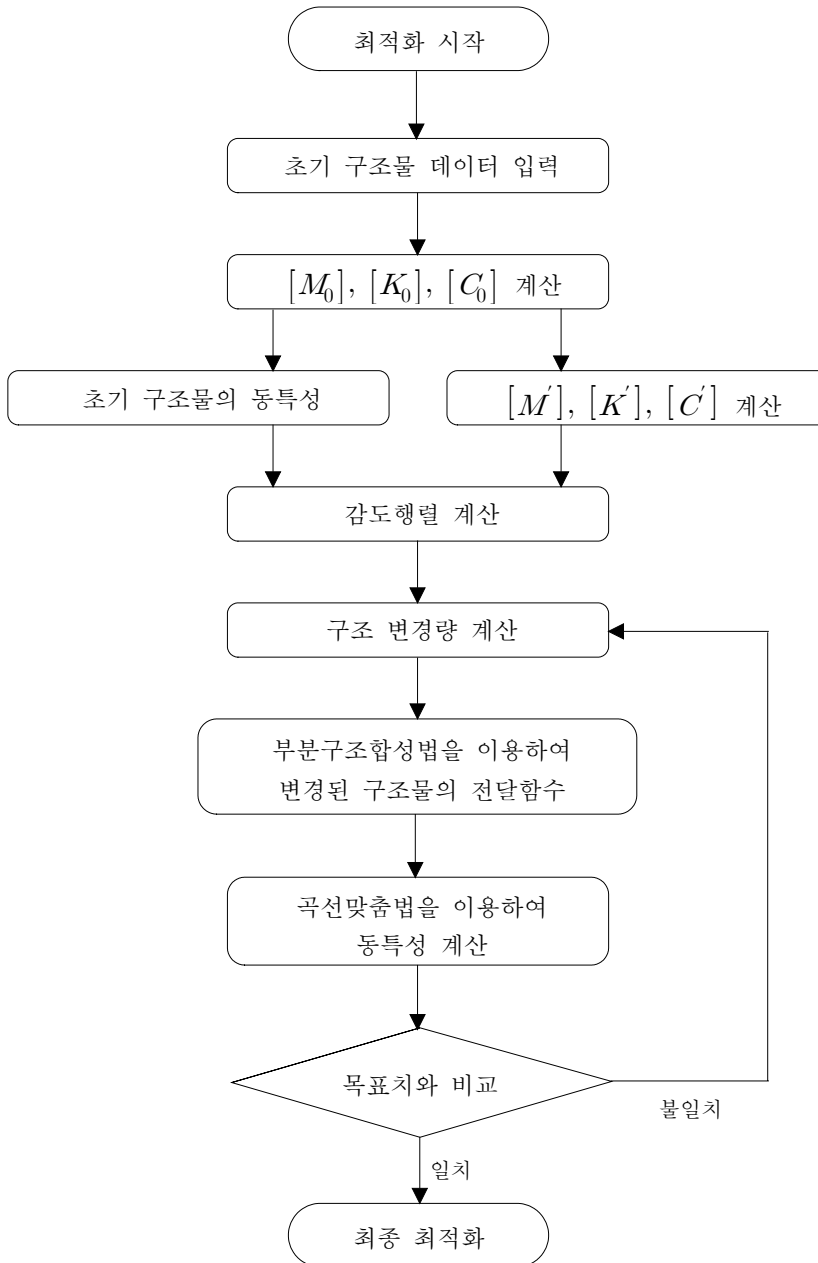


Fig. 1 Flowchart of present optimization process

### 3 실험검증

#### 3.1 감쇠평판의 실험진동 해석

##### 3.1.1 실험장치 구성 및 실험방법

Fig. 2는 실험에 사용된 평판이다. 재질은 철이고, 가로 300mm, 세로 400mm, 두께 3mm이다. 평판의 한쪽을 가로 300mm, 세로 100mm, 두께 50mm의 철재 보에 용접으로 고정하였다. 평판의 한쪽면에 (주)남양노비텍에서 생산된 두께 3mm의 감쇠재를 부착하였다.

실험 방법은 자유단 끝에 센서를 고정시키고 가진점을 1번 점부터 25번 점까지 이동 시켜가며 충격해머로 가진하여 실험을 수행하였다. 실험에 사용된 FFT 분석기는 B&K사의 2채널 3560B를 사용하였다.

##### 3.1.2 곡선맞춤 순서

곡선맞춤의 첫 단계는 실험에 의해 측정된 각 점들의 전달함수를 겹쳐 그린 후 채용 모드수를 결정하는 것이다. 채용 모드수에 따라 계산시간과 결과의 정도가 크게 달라지므로 채용 모드수의 결정은 중요하다.

모드수를 결정하면 각 차수의 공진주파수를 임의의 고유주파수로 설정하고 일자유도 곡선맞춤을 수행하여 임의의 모드 감쇠비를 구한다.

다음으로 임의로 선정한 고유주파수와 감쇠비를 사용하여 선형직접법으로 해석을 수행한다. 그 결과 임의의 변수들이 결정된다. 이 변수들은 다음 단계에서 Newton-Raphson법의 초기치로 사용된다.

마지막으로 Newton-Raphson법을 사용하여 곡선맞춤 한다. 이상이 곡선맞춤의 순서이다. Fig. 3은 각 점들의 가속도 전달함수를 겹쳐 그린 것이다.

이상의 과정을 거쳐 400Hz 내에서 7개의 모드를 선정하였다. Table. 1은 채용된 7개의 임의의 고유주파수와 임의의 감쇠비를 나타낸다.



Fig. 2 Plate attached damping material

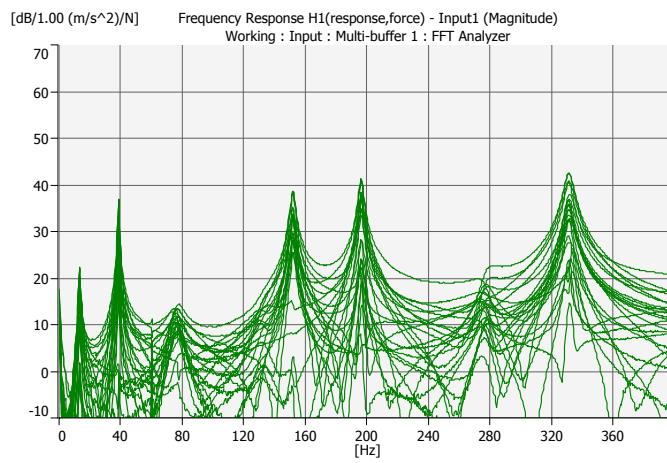


Fig. 3 Plot of accelerance FRF

Table. 1 Voluntary resonance frequency and modal damping ratio

Mode	Natural frequency( $rad/s$ )	Modal damping ratio
1	13	0.0098
2	38.5	0.0098
3	75	0.0587
4	152	0.0093
5	196	0.0077
6	274	0.02
7	331	0.0096

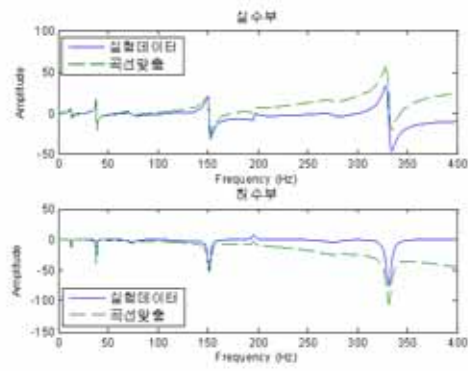
### 3.1.3 곡선맞춤

Fig. 4는 선형직접법에 의해 곡선맞춤된 그림이다. 오차가 있는 고유진동수와 감쇠비를 이용하였기 때문에 곡선맞춤의 결과에 오차가 크게 나타난다. 이와 같이 감쇠가 큰 구조물의 경우 일자유도 곡선맞춤법을 사용하여 진동 특성을 구하면 오차가 크게 생길 수 있다. 그래프의 위쪽은 전달함수의 실수부를 나타내고 아래쪽은 허수부를 나타낸다. 선형직접법으로 구해진 오차를 가지고 있는 진동 특성치들은 Newton-Raphson법의 초기치로 사용된다.

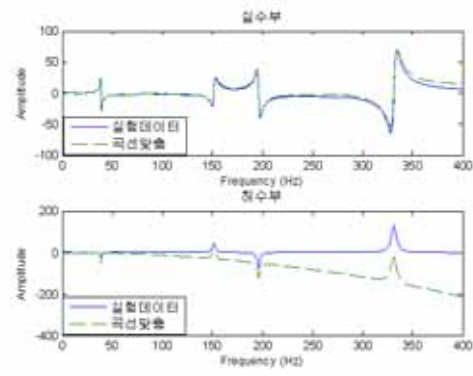
Fig. 5는 Newton-Raphson법을 이용하여 곡선맞춤한 그래프이다. 오차가 없어지고 실수부와 허수부에서 정확한 곡선맞춤이 되었음을 알 수 있다. Table. 2는 곡선맞춤된 진동 특성치 중 고유진동수와 감쇠비를 나타낸다.

Fig. 6은 Newton-Raphson법을 이용하여 구한 진동특성치를 이용하여 감쇠평판의 모드형상을 그린 것이다.



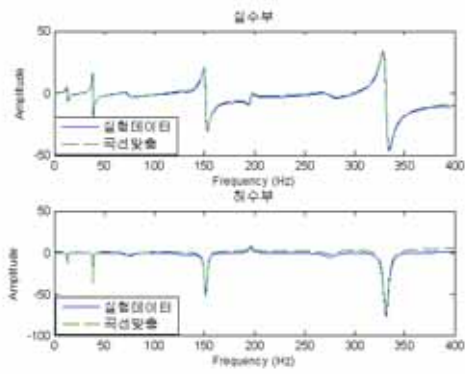


(a) The 1st point

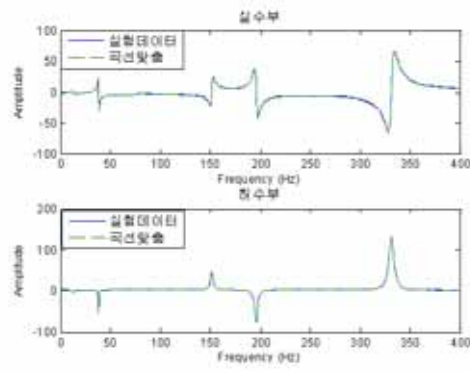


(b) The 10th point

Fig. 4 Measured and curve-fitted accelerance by liner-direct method

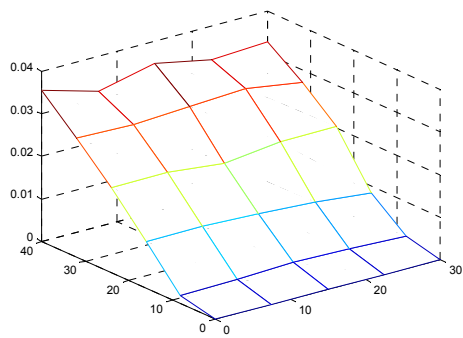


(a) The 1st point

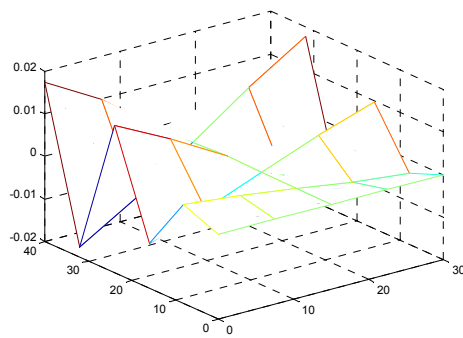


(b) The 10th point

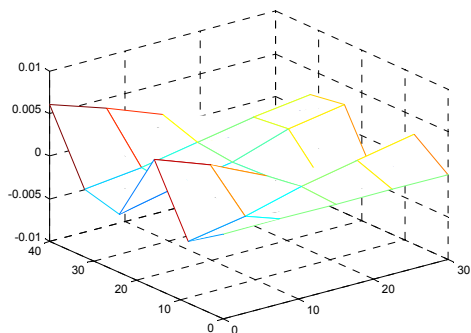
Fig. 5 Measured and curve-fitted accelerance by Newton-Raphson method



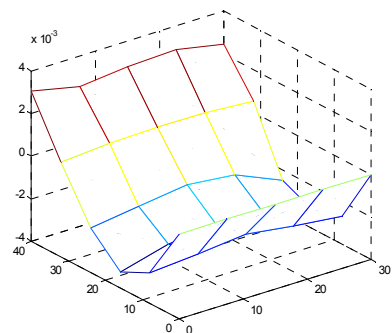
(a) The 1st mode shape



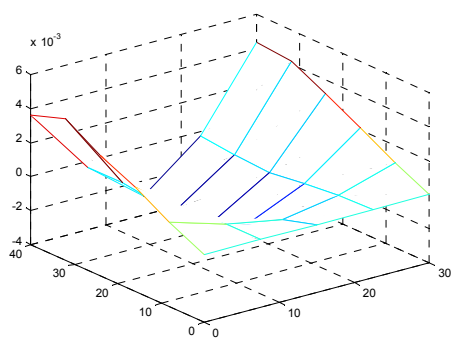
(b) The 2nd mode shape



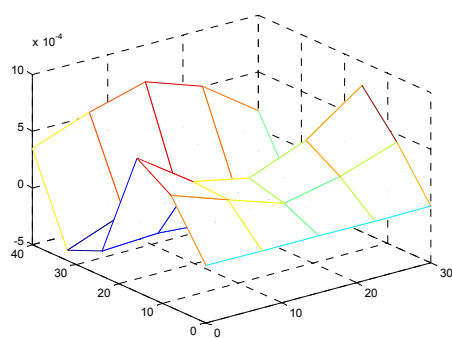
(c) The 3th mode shape



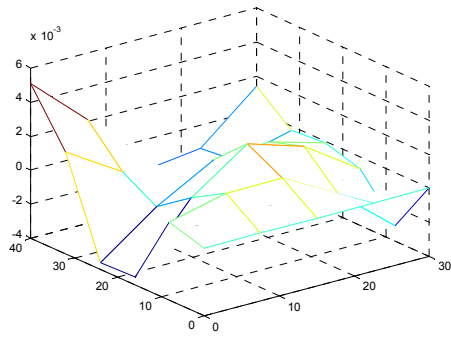
(d) The 4th mode shape



(e) The 5th mode shape



(f) The 6th mode shape



(g) The 7th mode shape

Fig. 6 Mode shapes of plate attached damping material

Table. 2 Natural frequency and modal damping ratio

Mode	Natural frequency( $rad/s$ )	Modal damping ratio
1	13.04	0.0337
2	38.51	0.0099
3	73.50	0.0488
4	151.49	0.0113
5	195.85	0.0081
6	276.98	0.0309
7	331.30	0.0089

### 3.2 4자유도 시스템의 다단계 최적설계

Fig. 7과 같은 비교적 간단한 비비례 감쇠 4자유도 시스템을 구성하여 두 가지 실험을 수행 하였다. 초기 질량, 강성, 감쇠는 Table. 3과 같다.

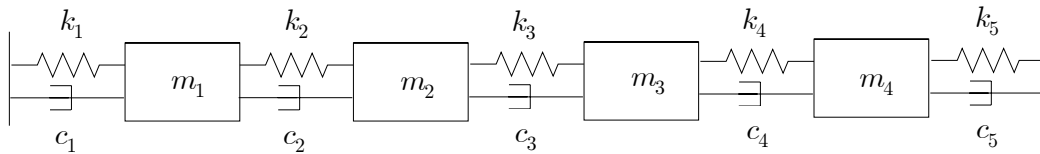


Fig. 7 Four degree of freedom system

Table. 3 Mass, damping, stiffness of the initial system

Mode	1	2	3	4	5
Unit					
$m(kg)$	10	15	5	20	
$c(Ns/m)$	50	45	60	55	40
$k(N/m)$	$6 \times 10^4$	$10 \times 10^4$	$7 \times 10^4$	$3 \times 10^4$	$4 \times 10^4$

실험 1에서는 질량  $m_1$ 을  $10kg$ 에서  $15kg$ 으로 변경할 때의 고유진동수, 모드 감쇠비를 부분구조합성법으로 계산해보고, 그 결과를 엄밀해와 비교하여 부분구조합성법의 정확도를 검증하였다.

Table. 4는 초기 시스템의 고유진동수와 모드 감쇠비를 나타내고 있다. 그리고 Table. 5는 부분구조합성법으로 해석한 결과와 엄밀해를 비교하고 있다. 비교 결과 부분구조합성법의 결과와 엄밀해가 정확히 일치하는 것을 알 수 있다. 그러므로 부분구조합성법의 적용이 유용함을 알 수 있다. Fig. 8-(a)는 부분구조합성법을 통해 계산한 전달함수 그래프와 곡선맞춤하여 계산한 전달함수 그래프 그리고 초기 시스템의 전달함수 그래프를 겹쳐 그린 것이다. Fig. 8-(b)는 엄밀

해 해석 결과를 토대로 그린 그래프와 그 것을 곡선맞춤한 그래프를 겹쳐 그린 것이다. Fig. 8-(a)와 Fig. 8-(b)를 비교해 보면 정확히 일치함을 알 수 있다.

Table. 4 Natural frequencies and modal damping ratios of the initial system

Mode	Natural frequency( $rad/s$ )	Modal damping ratio
1	41.49	0.0181
2	62.95	0.0398
3	134.68	0.0542
4	164.20	0.0704

Table. 5 Compared Substructure synthesis results with exact solutions

Substructure synthesis		
mode	Natural frequency( $rad/s$ )	Modal damping ratio
1	40.20	0.0174
2	61.05	0.0371
3	118.95	0.0413
4	161.76	0.0614
Exact solution		
mode	Natural frequency( $rad/s$ )	Modal damping ratio
1	40.22	0.0177
2	61.11	0.0379
3	119.20	0.0429
4	160.94	0.0771

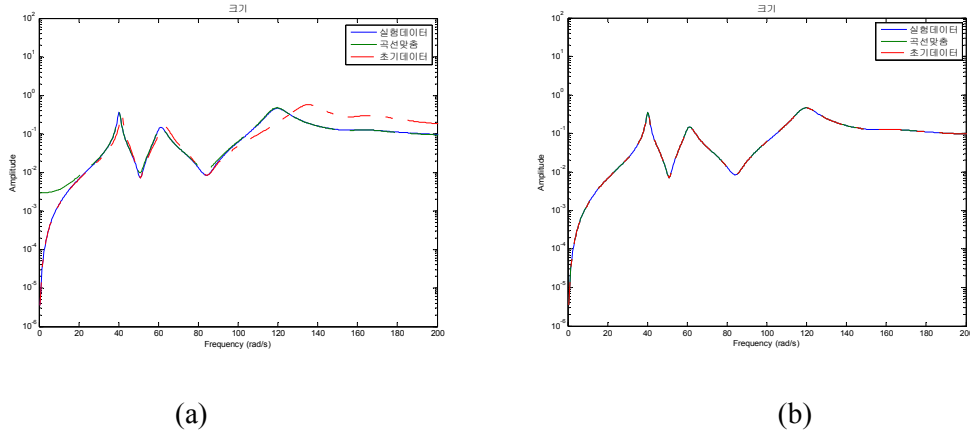


Fig. 8 Plot of the accelerance transfer function

실험 2에서는 실험 1에서 질량  $m_1$ 을  $5kg$  변화 시킨 시스템을 초기 모델로 선택한다. 그리고 실험 1의 초기 시스템의 고유치를 목적 고유치  $\lambda_t$ 로 선정한다. 그리고 설계변수를 질량  $m_1, m_2, m_3, m_4$ 로 선택하여 다단계 최적화 해석을 수행하였다. 그리고 해석결과가 실험 1의 초기 시스템으로 돌아가는지에 대하여 검토하였다. Table. 6은 목적 고유치  $\lambda_t$ , 초기 고유치  $\lambda_0$ 와 고유치 변형량  $\Delta\lambda$ 를 나타낸다. Table. 7은 다단계 최적화 해석을 수행한 결과 변화된 질량과 고유치이다. 실험 1의 초기시스템으로 정확히 돌아감을 알 수 있다. Fig. 9는 변화된 전달함수 그래프이다. 비록 설계변수를 질량으로 한정시킨 실험이기는 하였으나, 다단계 최적화 해석의 정확성을 입증할 수 있었다.

Table. 6 eigenvalues

	1	2	3	4
$\lambda_t$	$-0.75 + 41.49i$	$-2.50 + 62.90i$	$-7.30 + 134.48i$	$-11.5 + 163.79i$
$\lambda_0$	$-0.71 + 40.22i$	$-2.32 + 61.07i$	$-5.11 + 119.10i$	$-12.4 + 160.46i$
$\Delta\lambda$	$-0.04 + 1.27i$	$-0.18 + 1.83i$	$-2.19 + 15.38i$	$0.9 + 3.33i$

Table. 7 Results by Multi-level Optimization Technic

	1	2	3	4
$m$	10	14.97	5.01	20.02
$\lambda$	$-0.75 + 41.49i$	$-2.50 + 62.90i$	$-7.32 + 134.48i$	$-11.5 + 163.78i$

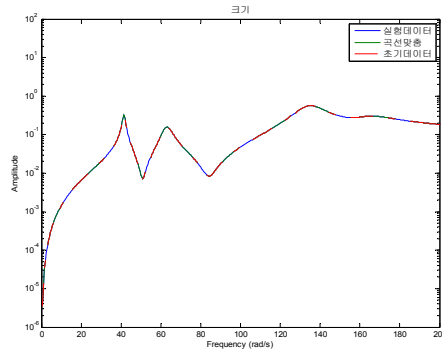


Fig. 9 Plot of the accelerance transfer function  
by Multi-level OptimizationTechnique

## 4. 결론

본 연구에서는 비비례 감쇠 구조물에 적용할 수 있는 다단계 최적화 방법을 4자유도 시스템에 적용하여 유효성을 검증하였다.

우선 일반감쇠 모델의 경우 일자유도 곡선맞춤으로 구해진 고유주파수와 모드 감쇠비를 이용하여 선형직접법으로 곡선맞춤할 경우 오차가 크게 나타났다. 다자유도 곡선맞춤 방법인 Newton-Raphson법의 경우 오차가 있는 선형직접법의 해석 결과를 초기치로 사용한다면 적은 횟수의 반복만으로도 정확한 곡선맞춤을 수행할 수 있었다. 일자유도 곡선맞춤의 결과와 다자유도 곡선맞춤의 결과를 비교하면 전 주파수 대역에서 고유진동수의 오차보다 감쇠비의 오차가 크게 나타남을 알 수 있었다.

다음으로 부분구조합성법을 이용하여 질량 변화에 따른 동특성 변화를 정확히 예측할 수 있었다. 복잡한 구조물의 동특성 해석 시 일부분의 변형 때문에 특성행렬을 전체적으로 다시 계산하는 경우가 생긴다. 이때 부분구조합성법을 이용하면 변형된 부분만을 따로 계산한 후 변형전의 특성행렬과 합하면 변형후의 특성행렬을 계산할 수 있다. 그러므로 계산에 걸리는 시간을 급격히 줄일 수 있었다.

감도해석을 이용하여 설계변수에 관한 한 번의 미분만으로 변경량을 도출하였다. 그렇기 때문에 시스템의 설계 변경을 효율적으로 수행할 수 있었다.

위의 단계를 거치는 다단계 최적화 방법을 이용하여 4자유도 시스템의 질량 최적화 문제를 정확히 수행하였다.

추후의 연구에서는 설계변수를 질량, 강성, 감쇠 뿐 아니라 두께, 재질, 구조형상 등으로 확장하여 최적화 설계를 수행할 것이다. 그리고 실험해석 및 유한요소 해석과 연결하여 복잡한 구조물의 최적화 설계를 수행할 것이다.



## 5. 참고문헌

- [1] 박석주, 왕지석 (1992), “감도해석법에 의한 구조물의 결합부 강성 산출에 관한 연구”, 한국마린엔지니어링학회지 제16권 5호, pp. 372 ~ 378.
- [2] 박석주, 왕지석, 박성현, 오창근, 박영철 (2000), “부분구조합성법에 의한 동력전달 변환기의 진동해석에 관한 연구”, 한국마린엔지니어링학회지 제 24권 3호, pp. 312 ~ 317.
- [3] 박성현, 박석주, 고재용, 남정길 (1999), “다단계최적화방법에 의한 선박구조물의 동특성의 최적변경법에 관한 연구”, 한국마린엔지니어링학회지 제 23권 4호, pp. 574 ~ 582.
- [4] 오창근, 박석주, 박영범 (1997), “엔진 블록의 중량 최소화에 관한 연구”, 한국자동차공학회논문집 제5권 3호, pp. 182 ~ 190.
- [5] 오창근, 박석주 (1995), “형상변경에 의한 최적구조변경법”, 한국마린엔지니어링학회지 제19권 3호, 1995. 8, pp. 220 ~ 227.
- [6] 유성근, 장경진, 박영필 (1996), “유한차분 감도해석을 이용한 판의 구조동특성 변경”, 한국소음진동공학회 춘계학술대회논문집, pp. 335 ~ 341.
- [7] 정재훈, 지태한, 박영필 (1994), “부분구조합성법을 이용한 판의 모우드해석”, 한국정밀공학회지 제11권 6호, pp. 65 ~ 74.
- [8] D. J. Ewins (2000), "Modal Testing 2", RESEARCH STUDIES PRESS LTD.
- [9] N. M. M. Maia and J. M. M. Silva (1997), "Theoretical and Experimental Modal Analysis", RESEARCH STUDIES PRESS LTD.
- [10] T. Butsuen, A. Nagmatsu and M. Ookuma (1987), "Application of direct system identification method for engine rigid body mount system", SAE Paper No.860551.
- [11] 長松昭男 (1985), “モード解析”, 培風館.