

工學碩士 學位論文

강제가진에 의한 계류라인의 동적 거동해석

A Study on Dynamic Analysis of Mooring Line
by Forced Oscillation

指導教授 朴 漢 一

2004년 2월

韓國海洋大學校 大學院

海洋開發工學科

尹 鍾 現

本 論 文 을 尹 鍾 現 의 工 學 碩 士 學 位 論 文 으 로 認 准 함

主 審 工 學 博 士 崔 慶 植 (印)

委 員 理 學 博 士 李 昊 珍 (印)

委 員 工 學 博 士 朴 漢 一 (印)

2004년 2월

韓 國 海 洋 大 學 校 大 學 院

海 洋 開 發 工 學 科

尹 鍾 現

A Study on Dynamic Analysis of Mooring Line by Forced Oscillation

By

Chong-Hyun Yun

Department of Ocean Development Engineering
Graduate School of Korea Maritime University

ABSTRACT

It is very important to control *the* location and movement of *ships*, structures, and equipments in *the* sea. Mooring is an important *method* to keep location of structures against wind, wave and current. *This* study deals with *the* dynamic analysis of immerced mooring line, and *the* tension variation of mooring line by forced oscillation.

In *this* study, governing equations are set up for *the* dynamic behavior analysis of mooring line and an implicit finite difference algorithm is employed for three-dimensional equation. Non-linear effect is considered and solved by Newton-Raphson iteration. *The* tension of mooring line by forced oscillation is compared with calculation by MOSES (Multi-Operational Structural Engineering Simulator), *which* is used as a commercial business program. A case study is carried out for a typical buoy system and a floating breakwater.

In *the* buoy system, it is found that tension variation is *changed* non-linearly and vertical oscillation *has* more non-linearity than horizontal oscillation. And tension is increased in proportion to forced amplitude and frequency. Especially, tension is increased in proportion to a square of frequency.

For *the* floating breakwater case, it is found that tension at *the* anchor point *has* more non-linearity than *the* top point.

목 차

Abstract	i
목차	ii
표 목차	iii
그림 목차	iii
기호 목차	iv
1. 서 론	1
2. 계류라인의 3차원 지배방정식	5
2.1 좌표계의 정의	5
2.2 계류라인에 작용하는 하중성분	7
2.3 지배방정식 유도	10
3. 수치해석을 이용한 지배방정식의 풀이	16
3.1 음해법을 이용한 지배방정식의 차별화	16
3.2 비선형 방정식을 풀기 위한 Newton-Raphson 방법	19
4. 프로그램 검증 및 해석	23
4.1 프로그램 소개	23
4.2 부이시스템 강제가진 해석	25
4.3 부소과제 계류라인 해석	34
5. 결 론	37
참고문헌	38

표 목차

Table 4-1 Input Data of Cable Characteristics and Ocean Conditions	25
Table 4-2 Comparison of Output	28
Table 4-3 Cable Characteristics and Environment Conditions of Floating Breakwater Installation Area	35

그림 목차

Fig. 2-1 Coordinate Systems and Euler Rotation Sequence	5
Fig. 2-2 Free Body Diagram	10
Fig. 4-1 Tension Variation at Top Point	26
Fig. 4-2 Maximum Tension of Mooring Line by MOSES	26
Fig. 4-3 Configuration of Mooring Line	27
Fig. 4-4 Configuration of Mooring Line by MOSES	27
Fig. 4-5 Tension Variation of Vertical Forced Oscillation	29
Fig. 4-6 Tension Variation of Horizontal Forced Oscillation	29
Fig. 4-7 Tension Variation at Top Point by Different Vertical Forced Periods and Amplitudes	31
Fig. 4-8 Nondimensional Tension Variation(Height) with Excitation Frequency	32
Fig. 4-9 Tension of Mooring Line by Different Cable Diameter	33
Fig. 4-10 Floating Breakwater Installation Area	35
Fig. 4-11 Tension Variation at Top Point	36
Fig. 4-12 Tension Variation at Anchor Point	36

기호 목차

A	: 계류라인의 단면적
$C_{\hat{d}i}$: j 번째 방향의 항력계수
d	: 계류라인의 직경
F_B	: 단위길이당 작용하는 부력
g	: 중력가속도
G, E	: 전단탄성계수, 탄성계수
I	: 단면 2차모멘트
I_p	: 단면 2차극모멘트
L	: 변환행렬
m	: 계류라인의 질량
\vec{M}	: 내부모멘트 벡터
\vec{Q}	: 외부모멘트 벡터
\vec{R}	: 외력벡터
\vec{R}_w	: 계류라인의 self-weight 벡터
$R_{\hat{d}i}$: 항력
S	: 전단력
s, s'	: 계류라인의 변형 전, 변형 후 길이
T	: 장력
\vec{T}	: 내력벡터
t	: 시간
t, n, b	: 국부좌표계
$\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$: 국부좌표계의 단위벡터
$u_{t, n, b}$: 국부좌표계상의 유체입자의 각 방향 속도성분
$v_{t, n, b}$: 국부좌표계상의 계류라인의 각 방향 속도성분
$v_{1r, 2r, 3r}$: 국부좌표계상의 상대속도
\vec{V}	: 속도 벡터
w_0, w	: 계류라인의 단위길이당 유효중량, 중량
X, Y, Z	: 전체 좌표계

δ_s', δ_s	: 늘어났을 때와 늘어나지 않았을 때의 계류라인의 미소 길이
ϵ	: 신장률 ($e = \epsilon + 1$)
Ω	: 곡률
$\bar{\Omega}$: 국부 곡률벡터
ρ_m	: 계류라인의 밀도
ρ_w	: 물의 밀도
ϕ, θ, ψ	: 오일러 각
ω	: 국부좌표계의 각속도

1. 서 론

최근 들어 해상에 다양한 구조물이나 시설을 설치하여 이용하고 있다. 그러나 이러한 구조물이나 시설들은 육상구조물과는 달라 거친 자연환경 속에서도 안전성을 유지하고, 각종 작업의 능률 및 관리운영이 편리하도록 설계되어야 한다. 특히, 부유식 해양구조물은 위치유지와 운동제어가 구조물의 가동률이나 작업능률에 큰 영향을 미치기 때문에 계류시스템은 매우 중요한 요소라고 할 수 있다.

계류시스템은 바람, 파랑, 조류 등 다양한 해양환경하중을 받는데, 이 계류시스템을 설계할 때에는 이러한 복잡한 하중 인자들을 모두 고려하여야만 실제 환경에서도 안정성을 유지할 수 있다. 여기서, 계류시스템의 구조적 설계는 조류 등에 의한 정적하중뿐 만 아니라 파랑 등에 의한 동적하중을 모두 고려해야 한다.

부유식 해양구조물을 일정한 위치에 유지하기 위한 계류방식에는 다점 및 일점 계류방식이 있다. 다점 계류방식은 여러개의 계류라인에 앵커를 설치하여 해양 구조물을 정점에 정확히 유지시키는 것으로 수산시설의 계류에 가장 많이 이용되고 있으나, 계류시 소요면적과 비용이 많이 든다는 단점이 있다. 일점 계류방식은 바람, 파랑, 조류에 대하여 저항이 가장 작은 곳을 선택하여 1개의 계류라인에 의해 해양 구조물을 계류하는 것으로 계류시 소요 면적과 비용이 다점 계류방식보다 작다는 장점이 있지만, 해양구조물의 정확한 위치 유지 유지가 힘들고, 계류라인의 장력도 증가하여 파손의 위험이 커진다는 단점이 있다.

본 논문의 목적은 개발된 프로그램을 이용해서 일점 계류방식에 의한 계류라인의 동적 거동해석을 수행하여 다양한 조건에서의 장력변화를 살펴봄으로써, 가장 적절한 계류시스템을 설계하는 데 있다.

계류시스템에 대한 연구는 오래전부터 이루어져 왔다. 계류시스템에 대한 연구는 케이블 연구와 함께 시작되어 왔는데, 케이블 연구중에서도 고장력 케이블에 대한 연구는 거의 완성된 상태이고, 현재는 저장력 케이블에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 본 논문과 관련된 케이블의 국외 연구내용은 정동호(2002)에 잘 정리되어 있다. 계류시스템에 대한 국내 연구를 살펴보면 다음과 같이 정리할 수 있다.

신현경, 김덕수(1995)는 3차원 비선형 상미분 방정식으로 표현되는 케이블의 다점

지지 계류시스템(a multi-leg mooring system)의 정적해석을 수행하였다. 다점지지 계류시스템의 정적해석을 위하여 스프링 상수(spring constants)와 Taylor's series를 적용하는 새 알고리즘을 개발했다. 또, 부유식 해양구조물의 다점지지 계류시스템에 해류(current)와 외력(external force)이 작용했을 때, 계류된 구조물의 새로운 위치와 각 계류선의 정적 장력을 구하였다.

김덕수, 신현경(1995)은 해류가 작용하는 케이블의 3차원 비선형 상미분 정적방정식을 유도하고, Runge-Kutta 4차식을 이용하여 정적해석을 함으로써, 케이블-부이-중량물 시스템의 정적 모양을 표현하고, 또한 케이블 양 끝단의 닛 위치와 케이블과 부이 접촉점에서의 정적 장력을 구하였다.

조규남, 이우섭(1997)은 부이시스템 예상 설치해역에 대한 기본적인 해상 상태의 설정을 통하여 시스템의 구성 요소간의 관련성을 재고하고 환경 조건하에서의 시스템의 거동을 재파악하여 결과적으로 부이시스템의 구성요소 선정 및 최적 시스템의 개념 설계를 수행하였다. 선정된 해양에서의 관측시스템 및 체인 케이블에 대한 동적해석을 수행하였고, 개념설계를 제한적이기는 하나 성공적으로 수행하였다.

류창혁(1999)은 계류삭에 대한 3차원 정적해석 프로그램을 개발하였다. 특히 해양에 적용되는 여러 가지 형태의 계류시스템에 대한 해석을 한 프로그램 내에서 해석할 수 있는 통합 프로그램을 개발하였다. 해석방법으로는 유한차분법을 사용하여 계류시스템에 나타나는 유체력에 의한 비선형 효과를 근사적인 방법으로 해를 구하였다. 얻어진 결과는 계류삭 각 요소에 작용하는 장력 및 계류삭의 수중형상과 함께 계류삭이 늘어난 길이와 수중부이의 위치 등을 구할 수 있도록 하였다.

조철희, 홍충유, 정택선(1999)은 SPM(Single Point Mooring) 계류시스템의 계류라인 정적해석 소프트웨어 프로그램 개발을 위한 기초연구로 바지와 실린더 모형에 대한 기본적인 계류모델 시험을 수행하였다. 시험의 결과는 개발 추진 중인 프로그램과 평가, 비교할 계획에 있다.

김현조, 홍사영, 홍섭, 조석규(2002)는 모형 계류삭에 대한 강제동요 시험을 통하여 모형 계류시스템의 동적 특성 데이터를 확보하였다. 또, 해양공학수조의 수심의 한계를 극복하기 위한 하나의 방법으로 모형 계류삭의 무게를 수심비로 증가해 주는 방법에 대하여 7.0m, 3.5m 수심에 대한 강제동요 시험을 수행하여 그 유용성에 대

하여 검토하였다. 전반적으로 시뮬레이션 결과와 실험치의 일치도가 양호한 것으로 나타났다.

국내 연구에서 현재, 계류라인의 정적해석을 위한 프로그램은 많이 연구되었지만 동적해석을 위한 프로그램은 미흡한 편이다. 본 논문에서는 정동호(2002)의 검증된 프로그램을 계류시스템에 맞게 수정하여, 계류라인의 동적거동해석을 살펴보고자 한다. 부이시스템에 있어서 파랑, 조류에 의한 부이의 운동을 계류라인 끝단의 움직임으로 생각하고 해석을 한다. 먼저, 계류라인에 대한 동적방정식을 유도한 후, 이에 대한 해를 구하는데, 이 해는 이론적으로 풀 수 없기 때문에 수치적인 방법으로 해를 구한다.

본 논문에서는 유한차분법(FDM, finite difference method)을 적용하며, 조건에 상관없이 안정적인 음해법(implicit method)을 사용한다. 비선형 방정식을 풀이하기 위해서는 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson) 반복법을 적용한다.

계류라인의 동적해석 과정을 살펴보면, 먼저 Berteaux.(1976)을 참고로 하여 계류라인에 작용하는 조류의 영향, 즉 정적하중에 의한 계류라인의 정적해석을 한다. 그 다음 계류라인 상부끝단에 수직가진(Heave Oscillation)과 수평가진(Surge Oscillation)을 가해 계류라인에 작용하는 장력의 동적변화를 시간영역 해석(time domain analysis)으로 살펴본다. 시간영역 해석은 주파수영역 해석(frequency domain analysis)에 비해 비선형 성분을 고려할 수 있다는 장점이 있다. Fortran 프로그램으로 얻어진 결과값은 검증이 필요한데, 본 논문에서는 해양구조물 전용 해석프로그램인 MOSES를 이용하여 검증한다. 검증이 끝나면, 부이시스템과 부소과제에 대한 예제해석을 수행하여 계류라인에 걸리는 장력변화를 살펴본다. 그리고, 가진주기와 주파수를 달리하였을 경우 장력변화에 어떤 영향을 미치는가에 대해 살펴 보도록 한다.

본 논문의 연구범위는 다음과 같다. 먼저 2장에서는 계류라인의 지배방정식을 유도한다. 지배방정식은 3차원 동적, 비선형 방정식이며, 연성되는(coupled) 방정식이다. 지배방정식 상에서 국부좌표계와 전체좌표계의 관계는 오일러 각(Eulerian angle)을 이용하여 정의되며, 지배방정식은 행렬 형태로 표현된다. 3장에서는 유도된 지배방정식을 수치해석적 방법을 적용하여 풀이하는 과정에 대해서 다룬다. 선형 행렬식 풀이는 일반적인 가우스-조르단(Gauss-Jordan) 방법을 사용하였고, 뉴턴

-랩슨 방법의 자코비안 행렬은 블록 삼중대각행렬(block-tridiagonal matrix)을 이룬다. 4장에서는 본 논문 프로그램의 결과를 MOSES 프로그램으로 검증하고, 예제 해석을 한다. 마지막으로 5장에서는 본 연구에 대한 결론을 맺는다.

2. 계류라인의 3차원 지배방정식

여기에선 강제가진에 의한 계류라인의 동적거동해석을 위해 계류라인에 대한 3차원 지배방정식을 유도하기로 한다. 먼저 지배방정식을 유도하기에 앞서 좌표계에 대해 살펴보고, 다음으로 계류라인에 작용하는 하중성분에 대하여 알아보며, 마지막으로 최종 지배방정식을 유도하기로 한다.

2.1 좌표계의 정의

본 논문에서는 Fig. 2-1과 같은 Euler 3차원 좌표계를 사용하였다.

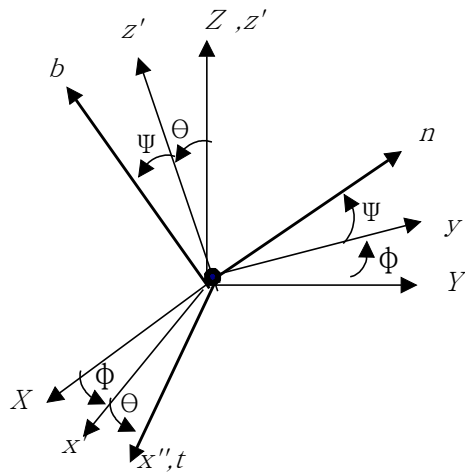


Fig. 2-1 Coordinate systems and Euler rotation sequence

- ϕ : Z 축을 중심으로 회전한 각도
- θ : Y' 축을 중심으로 회전한 각도
- ψ : t 축을 중심으로 회전한 각도

Lagrangian 좌표계 x, y, z 와 전체 좌표계 X, Y, Z 사이의 변환은 오일러 각(Euler angle)을 통하여 수행된다. Fig. 2-1에서 보듯이 먼저 Z 축에 대하여 ϕ 만큼 회전하면 $X'Y'Z'$ 좌표계로 변환된다. 그 후에 Y' 축을 중심으로 θ 만큼 회전하면 $tY'Z'$ 좌표계로 변환되고 마지막으로 t 축을 중심으로 ψ 만큼 회전하면 tnb 좌표계로 변환된다.

이 좌표계에 대한 변환은 다음 공식을 통하여 수행된다.

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ m \\ \theta \end{pmatrix} = L_{\Psi} L_{\Theta} L_{\Phi} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

여기서 3개의 변환 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L_{\Phi} &= \begin{bmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ L_{\Theta} &= \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \\ L_{\Psi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Psi & \sin\Psi \\ 0 & -\sin\Psi & \cos\Psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-2)$$

위의 3개의 행렬을 곱하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} L &= L_{\Psi} L_{\Theta} L_{\Phi} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\Theta \cdot \cos\Phi & \cos\Theta \cdot \sin\Phi & -\sin\Theta \\ -\sin\Phi \cdot \cos\Psi + \sin\Theta \cdot \cos\Phi \cdot \sin\Psi & \cos\Phi \cdot \cos\Psi + \sin\Theta \cdot \sin\Phi \cdot \sin\Psi & \cos\Theta \cdot \sin\Psi \\ \cos\Phi \cdot \sin\Psi + \sin\Theta \cdot \cos\Phi \cdot \cos\Psi & -\cos\Phi \cdot \sin\Psi + \sin\Theta \cdot \sin\Phi \cdot \cos\Psi & \cos\Theta \cdot \cos\Psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-3)$$

만약 계류라인의 접선방향(t 방향)의 비틀을 무시한다면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L &= L_{\Psi} L_{\Theta} L_{\Phi} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\Theta \cdot \cos\Phi & \cos\Theta \cdot \sin\Phi & -\sin\Theta \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ \cos\Phi \cdot \sin\Theta & \sin\Theta \cdot \sin\Phi & \cos\Theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-4)$$

그리고, 국부적 곡률 성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\Omega_t &= -\frac{\partial\Phi}{\partial s} \sin\theta \\ \Omega_n &= \frac{\partial\theta}{\partial s} \\ \Omega_b &= \frac{\partial\Phi}{\partial s} \cos\theta\end{aligned}\tag{2-5}$$

여기서 Ω_t 은 Ω_b 과 θ 의 항으로 표현되므로, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\Omega_t = -\Omega_b \tan\theta\tag{2-6}$$

위와 유사하게 국부좌표계에서 각속도 벡터성분도 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}\omega_t &= -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \sin\theta \\ \omega_n &= \frac{\partial\theta}{\partial t} \\ \omega_b &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} \cos\theta\end{aligned}\tag{2-7}$$

2.2 계류라인에 작용하는 하중성분

계류라인이 물 속에 있을 때는 계류라인 자체의 자중과 부력, 그리고 해양환경에 의한 동수력학적 하중을 받게 된다. 동수력학적 하중은 다시 항력(drag force)과 부가질량력(added mass force)으로 나눌 수 있다.

1) 자중과 부력

계류라인의 변형도(e)를 다음과 같이 정의한다.

$$e = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta s' - \delta s}{\delta s} = \frac{ds'}{ds} - 1\tag{2-8}$$

여기서, s = 계류라인의 길이

s' = 늘어난 후의 계류라인의 길이

이 때 계류라인이 탄성재료라면 *Hook*의 법칙을 만족하므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e = \frac{T}{AE} \quad (2-9)$$

여기서, T : 인장력 (Tension)

E : 탄성계수 (Modulus of elasticity)

A : 계류라인의 단면적 (Area of mooring line)

물 속에 있는 모든 물체는 물체표면에 중력 반대방향(연직방향)의 수압, 즉 부력을 받게 되는데, 이 힘은 물에 잠겨 있는 부분의 물체와 같은 부피의 물의 무게와 같고, 그 작용선은 물체의 물 속 부분의 중심을 지나며 위쪽으로 작용한다. 부력을 단위길이당 힘으로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_B(1 + e) = \rho_w g A \quad (2-10)$$

여기서, F_B = 단위길이당 작용하는 부력

ρ_w = 물의 밀도

g = 중력 가속도

A = 계류라인의 단면적

위와 같은 부력의 영향으로 계류라인의 수중중량은 자체중량에서 부력을 뺀 값이 된다. 공기중에서 계류라인의 중량을

$$w = mg \quad (2-11)$$

라고 하면, 계류라인의 유효중량 w_0 는 다음과 같다.

$$w_0 = (m - \rho_w A)g \quad (2-12)$$

계류라인에 작용하는 유효중량의 성분을 오일러각을 이용해 국부좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{R_w}(1+e) = -w_0\vec{k} = w_0(n_1\vec{t} + n_2\vec{n} + n_3\vec{b}) \quad (2-13)$$

여기서, $n_1 = -\cos\phi\cos\theta$

$$n_2 = \sin\phi$$

$$n_3 = -\cos\phi\sin\theta$$

2) 동수력학적 하중성분

해양구조물에 작용하는 동수력학적 하중을 산정하는 방법에는 모리슨 방정식 (Morison equation), 프루드-크릴로프 이론 (Froude-Krylov theory), 회절이론 (Diffraction theory) 등이 있다. 이 중, 본 논문에서 다루는 계류라인의 직경은 파장에 비해 매우 작은 영역 ($D/L < 0.2$)에 속하므로 모리슨 방정식을 사용한다.

모리슨 방정식을 사용하기 위해선 먼저, 유체의 속도성분을 각 방향으로 나누어야 한다. 본 논문에선 상대속도 개념을 적용했는데, 국부좌표계에서의 계류라인의 각 방향 속도성분을 각각 v_t, v_n, v_b 라 하고, 유체입자의 각 방향 속도성분을 각각 u_t, u_n, u_b 라고 표시하면 각 방향의 상대속도는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$v_{1r} = v_t - u_t$$

$$v_{2r} = v_n - u_n \quad (2-14)$$

$$v_{3r} = v_b - u_b$$

각 방향으로 작용하는 항력을 벡터로 나타내면 아래와 같이 나타낸다.

$$\overrightarrow{R_d}(1+e) = R_{d1}\hat{t} + R_{d2}\hat{n} + R_{d3}\hat{b} \quad (2-15)$$

여기서, $R_{d1} = -\frac{1}{2}\rho_w d\pi C_{d1}v_{1r} |v_{1r}| (1+e)^{\frac{1}{2}}$

$$R_{d2} = -\frac{1}{2}\rho_w d\pi C_{d2} v_{2r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} (1+e)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_{d3} = -\frac{1}{2}\rho_w d\pi C_{d3} v_{3r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} (1+e)^{\frac{1}{2}}$$

위 식에서 C_{d1}, C_{d2}, C_{d3} 는 각 방향 항력계수를 나타내는데, 양 법선 방향의 항력은 연성효과를 고려하였다. 모리슨 방정식을 적용할 때 유체력계수를 적절히 선정해야 하는데, 유체력계수는 보통 구조물의 직경, Re, KC 등의 영향을 받는다.

2.3 지배방정식 유도

계류라인 미소요소에 대한 자유물체도는 Fig. 2-2와 같이 나타낼 수 있다. 여기서, 우리가 알고자 하는 미지수는 총 10개가 된다. Fig. 2-2에 나타나 있는 $T, S_n, S_b, v_t, v_n, v_b, \Omega_n, \Omega_b$ 와 Fig. 2-1에 나타나 있는 ϕ, θ 이다. 본 논문에선 비틀림의 영향을 무시하였기 때문에 ψ, Ω_t 성분은 고려하지 않았다.

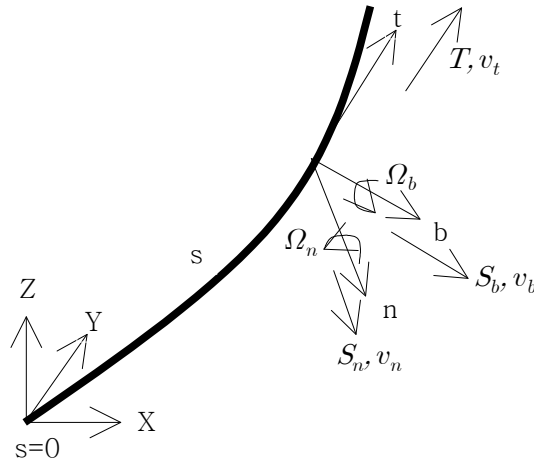


Fig. 2-2 Free body diagram

10개의 미지수 $T, S_n, S_b, v_t, v_n, v_b, \phi, \theta, \Omega_n, \Omega_b$ 에 대한 지배방정식을 얻기 위해선 10개의 방정식이 필요하다. 본 절에서는 운동방정식, 모멘트 평형방정식, 적합조건식, 곡률 관계를 이용하여 지배방정식을 유도한다. 운동방정식을 통해 T, S_n, S_b 에 대한 식을 얻을 수 있고, 모멘트 평형방정식을 통해 Ω_n, Ω_b 를 얻을 수 있다. 또, 적

합조건식을 통해서 v_t, v_n, v_b 를 얻을 수 있고, 마지막으로 곡률 관계를 통해서 ϕ, θ 를 얻을 수 있다.

1) 운동방정식

지배방정식은 늘어나지 않은 미소요소 ds 와 늘어난 미소요소 ds' 에 대하여 고려한다. 먼저 속도벡터와 내력벡터를 각각 \vec{V}, \vec{T} 로 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\vec{V} &= v_t \hat{t} + v_n \hat{n} + v_b \hat{b} \\ \vec{T} &= T \hat{t} + S_n \hat{n} + S_b \hat{b}\end{aligned}\tag{2-16}$$

계류라인의 미소길이에 대하여 뉴턴의 제2법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$m \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{D\vec{T}}{Ds} + \Sigma \vec{R}(1+e)\tag{2-17}$$

위 식을 material derivative로 전개하면 아래 식과 같이 전개된다.

$$m \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{V} \right) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{T} + \Sigma \vec{R}(1+e)\tag{2-18}$$

비틀림을 무시하고, 위 식을 전개하여 3방향 성분으로 분해하여 나타내면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}m \left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + v_b \frac{\partial \theta}{\partial t} - v_n \frac{\partial \phi}{\partial t} \cos \theta \right) &= \frac{\partial T}{\partial s} + S_b \Omega_n - S_n \Omega_b + w_0 n_1 + R_{d1} \\ m \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} (v_t \cos \theta + v_b \sin \theta) \right) + m_a \frac{\partial v_{2r}}{\partial t} &= \frac{\partial S_n}{\partial s} - \Omega_b (T + S_b \tan \theta) + w_0 n_2 + R_{d2} \\ m \left(\frac{\partial v_b}{\partial t} - v_n \frac{\partial \phi}{\partial t} \sin \theta - v_t \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + m_a \frac{\partial v_{3r}}{\partial t} &= \frac{\partial S_b}{\partial s} - S_n \Omega_b \tan \theta - T \Omega_n + w_0 n_3 + R_{d3}\end{aligned}\tag{2-19}$$

2) 모멘트 평형방정식

다음은 내력 모멘트(internal moment (\vec{M}))와 외부 분포 모멘트(distributed moment (\vec{Q})) 벡터 사이의 평형을 고려한다.

탄성계수(Young modulus)를 E, 전단탄성계수(shear modulus)를 G, 계류라인의 밀도를 ρ_m , 단면 2차 모멘트(sectional second moment)를 I, 단면 2차 극 모멘트(polar moment)를 I_p 라 정의한다. 늘어나지 않은 내력 모멘트 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{M} = M_1 \hat{t} + M_2 \hat{n} + M_3 \hat{b} \quad (2-20)$$

케이블이 원형이고 동질한(homogeneous) 실린더라 가정하면,

$$\begin{aligned} M_1 &= GI_p \Omega_t \\ M_2 &= EI \Omega_n \\ M_3 &= EI \Omega_b \end{aligned} \quad (2-21)$$

여기서, Ω_i 은 재료의 비틀림에 의한 곡률을 나타낸다.

동일한 원형단면의 실린더에 대한 관성 모멘트 행렬 $\rho_m I$ 는 다음과 같다.

$$\rho_m I = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

늘어난 양과 늘어나지 않은 양 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_s (1 + e)^2 \\ \rho_m I &= \rho_m I_s (1 + e)^2 \end{aligned} \quad (2-23)$$

계류라인의 왼쪽점에 대하여 모멘트를 취하고 늘어나지 않은 양으로 표현하면 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{\rho_m \vec{\omega}}{(1+e)} \right] = \frac{D}{Ds} \left[\frac{\vec{M}}{(1+e)^2} \right] + \vec{Q}(1+e) + \vec{dr} \times \vec{R}(1+e) + \frac{\vec{dr}}{ds} \times \vec{T} \quad (2-24)$$

이 문제에 대해서는 외부에서 작용하는 모멘트는 0이다. 또한 극한에서 $\vec{dr} \rightarrow 0$ 으로 취함으로서 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{dr} \times \vec{R} &\rightarrow 0 \\ \frac{1}{(1+e)} \frac{\vec{dr}}{ds} &\rightarrow \hat{t} \end{aligned} \quad (2-25)$$

따라서 모멘트 평형 방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{\rho_m \vec{\omega}}{(1+e)} \right] = \frac{D}{Ds} \left[\frac{\vec{M}}{(1+e)^2} \right] + \hat{t} \times \vec{T}(1+e) \quad (2-26)$$

위 식은 외력 뿐만 아니라 장력과 전단력과 같은 내력도 포함한다.

위 식은 벡터 방정식이다. 따라서 비틀림을 무시하기 때문에 접선방향 모멘트식은 무시하고 정리하면 다음 식과 같이 재정리된다.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial \Omega_n}{\partial s} &= \Omega_b^2 EI \tan \theta - S_b (1+e)^3 \\ EI \frac{\partial \Omega_b}{\partial s} &= -\Omega_n \Omega_b EI \tan \theta - S_n (1+e)^3 \end{aligned} \quad (2-27)$$

3) 적합조건식

마지막으로 적합조건을 적용시킨다. 계류라인의 속도, 방향, 변형율에 관계하는 적

합관계는 인접하는 계류라인 요소 사이에서 적합성을 만족해야 한다. 그러나, 변형율이 0인 경우의 적합조건이란 계류라인 길이가 보존된다는 것이다.

계류라인 형상에서 불연속성이 없는 경우는 두개의 변수에 대하여 연속함수의 특성을 이용할 수 있다. 그리고, 그 특성은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{Dr}{Ds}\right) = \frac{D}{Ds}\left(\frac{Dr}{Dt}\right) \quad (2-28)$$

접선벡터와 속도벡터의 정의에 의해서

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{D\vec{r}}{Dt} \\ \hat{t} &= \frac{D\vec{r}}{Ds'} = \frac{1}{(1+e)} \frac{D\vec{r}}{Ds} \end{aligned} \quad (2-29)$$

여기서, $s' =$ 늘어난 상태의 계류라인 길이

두 벡터를 적합관계식에 대입하면 다음과 같은 관계식이 유도된다.

$$\frac{D}{Dt}[(1+e)\hat{t}] = \frac{D\vec{V}}{Ds} \quad (2-30)$$

위 식을 다시 전개하면 다시 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial e}{\partial t} \hat{t} + (1+e)\vec{\omega} \times \hat{t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{V} \quad (2-31)$$

다시 방향별로 구분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_t}{\partial s} + \Omega_n v_b - \Omega_b v_n &= \frac{1}{EA} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial v_n}{\partial s} - \Omega_b (v_t + v_b \tan\theta) &= -\left(1 + \frac{1}{EA}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t} \cos\theta \\ \frac{\partial v_b}{\partial s} - \Omega_b v_n \tan\theta - \Omega_n v_t &= -\left(1 + \frac{1}{EA}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned} \quad (2-32)$$

곡률의 정의에 의하여 다음의 두 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\Omega_n &= \frac{\partial\theta}{\partial s} \\ \Omega_b &= \frac{\partial\phi}{\partial s}\cos\theta\end{aligned}\tag{2-33}$$

이상과 같이 운동방정식(뉴턴의 제 2법칙), 모멘트 평형방정식, 적합조건식, 곡률 관계를 이용하여 10개의 지배방정식을 구하였다. 이 10개의 지배방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}m\left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + v_b\frac{\partial\theta}{\partial t} - v_n\frac{\partial\phi}{\partial t}\cos\theta\right) &= \frac{\partial T}{\partial s} + S_b\Omega_n - S_n\Omega_b + w_0n_1 + R_{d1} \\ m\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t}(v_t\cos\theta + v_b\sin\theta)\right) + m_a\frac{\partial v_{2r}}{\partial t} &= \frac{\partial S_n}{\partial s} - \Omega_b(T + S_b\tan\theta) + w_0n_2 + R_{d2} \\ m\left(\frac{\partial v_b}{\partial t} - v_n\frac{\partial\phi}{\partial t}\sin\theta - v_t\frac{\partial\theta}{\partial t}\right) + m_a\frac{\partial v_{3r}}{\partial t} &= \frac{\partial S_b}{\partial s} - S_n\Omega_b\tan\theta - T\Omega_n + w_0n_3 + R_{d3} \\ \frac{\partial v_t}{\partial s} + \Omega_nv_b - \Omega_bv_n &= \frac{1}{EA}\frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial v_n}{\partial s} - \Omega_b(v_t + v_b\tan\theta) &= -\left(1 + \frac{1}{EA}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}\cos\theta \\ \frac{\partial v_b}{\partial s} - \Omega_bv_n\tan\theta - \Omega_nv_t &= -\left(1 + \frac{1}{EA}\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} \\ \Omega_b &= \frac{\partial\phi}{\partial s}\cos\theta \\ \Omega_n &= \frac{\partial\theta}{\partial s} \\ EI\frac{\partial\Omega_n}{\partial s} &= \Omega_b^2EI\tan\theta - S_b(1+e)^3 \\ EI\frac{\partial\Omega_b}{\partial s} &= -\Omega_n\Omega_bEI\tan\theta - S_n(1+e)^3\end{aligned}$$

3. 수치해석을 이용한 지배방정식의 풀이

본장에서는, 앞 장에서 얻은 지배방정식을 풀어보도록 한다. 지배방정식을 푸는 방법에는 크게 이론적인 방법과 수치해석적인 방법이 있다. 이론적인 방법은 일반해를 얻을 수 있지만 복잡한 해석을 하는데는 한계가 뒤따른다. 반면 수치해석적인 방법은 일반해를 얻을 수 없지만 복잡하고 좀 더 현실적인 문제에 접근할 수 있다. 지배방정식을 수치해석으로 푸는 방법은 여러 가지가 있지만, 본 논문에서는 유한차분법(Finite Difference Method)을 이용하기로 한다. 보통 구조해석 분야엔 유한차분법과 유한요소법(Finite Element Method)을 많이 사용하고 있다.

유한요소법은 해석 대상을 유한개의 특정 유한요소로 나눈 후 특정 등가의 식을 에너지 최소화 원리에 의해서 풀이하는 방법이다. 이 방법은 비틀강성, 굽힘강성 등 여러 요소들을 모두 고려할 수 있고 정확한 해석 결과를 얻을 수 있으나 긴 계산시간이 필요하다. 반면 유한차분법은 유한개의 정방격자를 이용해서 특정 미분방정식을 유한차분 근사식에 의해 대수방정식으로 변환 후 풀이하는 방법이다. 이 방법은 모델내의 변수 및 하중처리가 쉽고, 계산시간이 유한요소법에 비해 짧다. 유한차분법에서 시간적분법은 양해법(Explicit Method)과 음해법(Implicit Method)으로 나눌 수 있다. 양해법은 시간과 공간의 조건에 따라서 안정하기도 하고 불안정하기도 하지만 음해법은 조건에 상관없이 항상 안정하기 때문에 본 논문에서는 음해법을 사용하였다. 유한차분법에는 전진, 중앙 및 후진 차분법이 있다. 각각의 방법에는 서로 장단점이 있지만 여기에서는 중앙차분법을 선택하였다.

3.1 음해법을 이용한 지배방정식의 차분화

2장에서 구한 지배방정식을 행렬로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$M \frac{\partial \vec{Y}}{\partial s} = N \frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} + \vec{Q} \quad (3-1)$$

여기서, \vec{Y} 가 계산에서 구해야 할 미지벡터 행렬이며 다음 식과 같다.

$$\vec{Y} = (T, S_n, S_b, v_t, v_n, v_b, \Phi, \Theta, \Omega_n, \Omega_b)^T$$

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} S_n \Omega_b - S_b \Omega_n + w_0 \cos \Phi \cos \Theta - R_d \\ \Omega_b (T + S_b \tan \Theta) - w_0 \sin \Phi - R_{d2} + m_a \partial v_{2r} / \partial t \\ S_n \Omega_b \tan \Theta + T \Omega_n + w_0 \cos \Phi \sin \Theta - R_{d3} + m_a \partial v_{3r} / \partial t \\ \Omega_b v_n - \Omega_n v_b \\ \Omega_b (v_t + v_b \tan \Theta) \\ \Omega_b v_n \tan \Theta + \Omega_n v_t \\ \Omega_b \\ \Omega_n \\ EI \Omega_b^2 \tan \Theta - S_b (1 + T/EI)^3 \\ - EI \Omega_b \Omega_n \tan \Theta - S_n (1 + T/EI)^3 \end{pmatrix}$$

한편 M, N 는 모두 10x10 크기의 사각행렬이 된다. M 의 경우에 대각선 성분은 다음과 같으며 그 외 성분은 모두 영이다.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & \cos \Theta & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & EI & \\ & & & & & & & & & EI \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & -mv_n \cos \Theta & mv_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m + m_a & 0 & mv_t \cos \Theta + mv_b \sin \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m + m_a & -mv_n \sin \Theta & -mv_t & 0 & 0 \\ 1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + T/EI) \cos \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + T/EI) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

위 식은 Δs 만큼 나누어져서 n 개의 노드(node)로 이산화 되고, 그 후에 Δt 만큼의 시간간격으로 나누어진다. 위 식은 노드 j 와 $j+1$ 사이, 그리고 시간 i 와 $i+1$ 사이의 중앙점에서 풀어진다. 하나의 벡터 \bar{Y} 에 대한 편미분을 중앙차분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{Y_j^{i+1} - Y_j^i}{\Delta t} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= \frac{Y_{j+1}^i - Y_j^i}{\Delta s}\end{aligned}\quad (3-2)$$

위와 같은 방법으로 식(3-1)을 전개하여 $j+1/2$ 와 $i+1/2$ 에서 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}& [M_{j+1}^{i+1} + M_j^{i+1}] \frac{Y_{j+1}^{i+1} - Y_j^{i+1}}{\Delta s} + [M_{j+1}^i + M_j^i] \frac{Y_{j+1}^i - Y_j^i}{\Delta s} = \\ & [N_{j+1}^{i+1} + N_{j+1}^i] \frac{Y_{j+1}^{i+1} - Y_{j+1}^i}{\Delta t} + [N_j^{i+1} + N_j^i] \frac{Y_j^{i+1} - Y_j^i}{\Delta t} + \\ & Q_{j+1}^{i+1} + Q_j^{i+1} + Q_{j+1}^i + Q_j^i\end{aligned}\quad (3-3)$$

위의 방정식은 $10(n-1)$ 개의 방정식이 된다. 하지만 미지수는 총 $10n$ 개 이므로 10개의 또 다른 방정식이 필요한데, 이것은 경계조건을 이용해서 구한다.

계류라인의 하부 끝단($s=0$)은 앵커로 고정되어 있기 때문에 3방향 속도성분이 0이 된다. 그리고, 국부곡률 역시 0이 된다. 따라서 다음의 5개 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}v_t(t, 0) &= 0 \\ v_n(t, 0) &= 0 \\ v_b(t, 0) &= 0 \\ EI\Omega_n(t, 0) &= 0 \\ EI\Omega_b(t, 0) &= 0\end{aligned}\quad (3-4)$$

반면에 상부끝단($s=L$)에서는 계류라인이 부채와 연결되어 있으므로, 계류라인의

속도는 부체의 속도로 알 수 있다. 또, 하부끝단과 마찬가지로 모멘트가 0이다. 그래서 상부끝단도 다음의 5개 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 v_t(t, L) &= V_t \\
 v_n(t, L) &= V_n \\
 v_b(t, L) &= V_b \\
 EI\Omega_n(t, L) &= 0 \\
 EI\Omega_b(t, L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3-5}$$

따라서, 지배방정식에서 구한 $10(n-1)$ 개의 방정식과 10개의 경계조건을 이용해서 총 $10n$ 개의 미지수를 구하게 된다.

3.2 비선형 방정식을 풀기 위한 Newton-Raphson 방법

Newton-Raphson 방법은 $f(x) = 0$ 방정식에서 $f(x)$ 의 미분을 이용하여 빠르게 x 를 계산할 수 있는 방법이다.

어떤 실수 r 이 함수 f 를 0이 되도록 하는 값이라고 하면, r 는 f 의 근사화라고 할 수 있다. 만약 f' 이 존재하고 연속이라면 테일러 급수(Taylor's series)에 의해서 다음과 같이 표현된다.

$$f(r) = f(x+h) = f(x) + hf'(x) = 0 \tag{3-6}$$

여기서, $h = r - x$

위 식에서 2차 Order항 이하를 무시하였다. 여기서, $h = -f(x)/f'(x)$ 로 된다. x 가 r 로 근사화한다면, $x - f(x)/f'(x)$ 는 r 로 더 가까이 간다. Newton-Raphson 방법은 r 의 x_0 를 추정함으로써 시작하고, 다음과 같이 정의한다.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3-7}$$

방정식이 2개이고, 미지수도 2개인 경우를 생각해 보자. 각각의 미지수를 x_1, x_2 라고 두면 다음과 같은 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (3-8)$$

두 변수에 대하여 Taylor Series를 통해서 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \approx f_1(x_1, x_2) + h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \\ f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \approx f_2(x_1, x_2) + h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

위 식에서 h_1 과 h_2 는 f_1, f_2 의 편미분 계수가 되는데, 여기서 아래 식과 같은 자코비안 행렬을 도입한다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

(3-9)식에서 계수 h_1, h_2 의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

따라서 두 개의 변수가 있는 두 개의 비선형 방정식을 풀기 위한 Newton-Raphson 방법은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{(k)} \\ h_2^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

본 논문에선 미지수를 10개로 잡고 지배방정식도 10개로 유도하였기 때문에 다변

수-다방정식 Newton-Raphson 방법을 채택해야 하는데, 이 경우도 앞에서 살펴본 경우와 같이 풀면 된다. 이 때 한 절점에 대한 자코비안 방정식은 아래와 같이 10×10행렬로 이루어 진다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{10}} \\ & & \dots & \\ & & & \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_{10}} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

여기서, f_i ($i = 1 \sim 10$)는 지배방정식 10개를 의미하며, x_i ($i = 1 \sim 10$)는 각 변수 $T, S_n, S_b, v_t, v_n, v_b, \phi, \theta, \Omega_n, \Omega_b$ 를 의미한다.

f_i 는 최종지배방정식을 다음과 같이 $f(x) = 0$ 의 함수 형태로 나타낸 것이다.

$$\frac{\partial T}{\partial s} - m \left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + v_b \frac{\partial \theta}{\partial t} - v_n \frac{\partial \phi}{\partial t} \cos \theta \right) + (S_b \Omega_n - S_n \Omega_b + w_0 n_1 + R_{d1}) = 0$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial s} - m \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} (v_t \cos \theta + v_b \sin \theta) \right) - m_a \frac{\partial v_{2r}}{\partial t} + \Omega_b (T + S_b \tan \theta) + w_0 n_2 + R_{d2} = 0$$

$$\frac{\partial S_b}{\partial s} - m \left(\frac{\partial v_b}{\partial t} - v_n \frac{\partial \phi}{\partial t} \sin \theta - v_t \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + m_a \frac{\partial v_{3r}}{\partial t} - S_n \Omega_b \tan \theta - T \Omega_n + w_0 n_3 + R_{d3} = 0$$

$$\frac{\partial v_t}{\partial s} - \frac{1}{EA} \frac{\partial T}{\partial t} + \Omega_n v_b - \Omega_b v_n = 0$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + \left(1 + \frac{1}{EA} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} \cos \theta - \Omega_b (v_t + v_b \tan \theta) = 0$$

$$\frac{\partial v_b}{\partial s} + \left(1 + \frac{1}{EA} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Omega_b v_n \tan \theta - \Omega_n v_t = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} \cos \theta - \Omega_b = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} - \Omega_n = 0$$

$$EI \frac{\partial \Omega_n}{\partial s} - \Omega_b^2 EI \tan \theta + S_b (1 + e)^3 = 0$$

$$EI \frac{\partial \Omega_b}{\partial s} + \Omega_n \Omega_b EI \tan \theta + S_n (1 + e)^3 = 0$$

한 절점에 대한 자코비안을 구한 뒤 전체 절점에 대한 자코비안으로 조합을 한다. 그리고, 식(3-11)과 같이 풀면 된다. 즉, 증분치는 자코비안과 함수($f(x) = 0$)와의 곱으로서 표현된다. 여기서 함수($f(x) = 0$)는 시간과 공간에 대한 중앙차분법으로 변환해서 풀이한다.

전체 자코비안은 블록 대각(block diagonal)형태로 이루어지는데, 행렬의 처음 5×10 행렬과 마지막 5×10 행렬은 경계조건을 이용해서 풀이하게 된다.

각 시간에서의 프로그램의 알고리즘을 살펴보면, 먼저 Y^{i-1} , Y^i 를 외삽(extrapolating)하여 Y^{i+1} 값을 추정한다. 다음으로, 식(3-11)에 의거해 선형방정식에서 증분치를 찾아 처음 가정한 수렴 범위내에 들어오면 다음 시간으로 넘어가고, 아니면 $Y^{i+1} + \Delta Y \rightarrow Y^{i+1}$ 를 취하고 계속 반복한다. 이 때, 수렴치 판별은 노름(Norm)값을 이용하였다. 노름의 종류로는 l_2 노름과 l_∞ 노름이 있는데, 본 논문에서는 l_2 노름을 이용하였다.

4. 프로그램 검증 및 해석

수치해석 프로그램의 해석을 위해서는 먼저 프로그램이 올바르게 만들어졌는지 검증할 필요가 있다. 본장에서는, MOSES 프로그램에 대해 간단히 살펴보고, 이 프로그램을 이용해서 결과를 비교·검증해 보기로 한다. 아울러, 검증이 끝나면 계류라인의 동적해석을 각 조건별로 알아보고 그 결과값을 가지고 토의해 보도록 한다.

4.1 프로그램 소개

MOSES (Multi-Operational Structural Engineering Simulator)는 미국 Ultramarine사의 Trade Mark로서 지난 20여년간 전 세계적으로 모든 형태의 부유 해양 구조물의 분석과 설계과정에서 가장 널리 사용되고 있는 해석시스템으로 해양환경에서 일어나는 해양 구조물들의 모델링, 시뮬레이션, 응력해석을 할 수 있는 새로운 프로그래밍 언어 형태의 해양 범용 프로그램으로 폭 넓은 융통성을 발휘하도록 되어 있다.

MOSES는 현재 국내에 보편화되어 있는 프로그램은 아니지만, 해양 부유식 구조물해석에 있어 타 프로그램에 비해 많은 장점을 가지고 있다. MOSES는 일반 프로그램과는 다소 환경이 다른 언어개념을 갖고 있는데, 이러한 특별한 언어개념은 MOSES의 다양한 작업수행 능력의 한계를 둘 수 없을 만큼 큰 융통성을 부여하나 프로그램의 이용 차원에서 약간의 어려움이 존재한다는 단점이 있다. MOSES 언어 안에 존재하는 많은 명령어들의 조합으로 새로운 매크로를 생성하고 또 기존의 매크로를 활용함으로써 일련의 작업들을 효율적으로 일괄 처리할 수 있다.

MOSES의 예전 버전은 ANSYS와 같은 그래픽 환경과는 반대인 프로그래밍 환경으로 이루어져 있지만, MOSES 6.0 버전부터는 사용자가 편리하게 사용할 수 있도록 GUI형식으로 많이 바뀌었고, 앞으로도 계속 변화할 것이다.

MOSES를 적용할 수 있는 주요 작업을 살펴보면 다음과 같다.

Vessel Modeling, Hydrostatics, Stability, Ballasting, Seakeeping, Jacket Launch, Transportation, Lift, Upending, Load Out, Mooring 등이다.

이 중, *Hydrostatics*에서는 흘수, 트림각과 배수량, 수선면적, 부심의 위치, 횡·종 방향 KM, 흘수변화를 위한 하중, 트림변화를 위한 모멘트 등, 이러한 것들의 조합에 대한 그래프를 생성한다. 또, 복원암(Arm) 곡선에 의해 비손상시와 손상시 안정성이 흘수와 트림각 내에서 계산되고, 선박의 종강도를 계산하고 굽힘 모멘트와 처짐을 보여준다.

Equilibrium 계산에서는 자동적으로 바람, 파도, 조류력을 포함하고, *Anchor*와 연결부분들은 처음에 입력된 장력값을 가지기 위해 자동적으로 옮겨진다. 또, 선으로서 연결된 여러 개 물체들은 평형을 이루는데 자동적으로 알맞은 위치로 재위치되며, 상대적 위치, 가해진 하중, *Connector Force* 등에 의한 상호적인 평형상태를 고려한다.

*MOSES*는 주파수 영역해석과 시간 영역해석을 자유롭게 할 수 있는데, 주파수 영역 해석은 주어진 주기와 방향에서의 파에 대한 구조물의 응답에 사용된다. 결과값에는 구조물의 부가질량, 감쇠력, *Hull*에 대한 압력, 결과로서 생기는 *Total Force*, 모멘트를 포함해서 나타낸다. *Morison* 방정식은 어떤 구조물을 형성하는데 필요한 튜브형식과 판형식의 조합을 위해 사용되거나 반잠수식, 자기부상(*Self-Floater*) 구조물을 시뮬레이션 하는데 사용되고, *Strip Theory*는 전형적인 선박형 구조물에 적용하며 계산이 빠르고 효과적이다. 일반적인 부유구조물에 적용되는 *3D Diffraction Theory*는 지반영향과 상부구조물과의 상호작용을 고려한다.

*Response Amplitude Operators (RAO)*는 구조물의 모든 지점에서의 운동을 계산한다. *Statistics*는 *RAO*를 사용하거나 다양한 스펙트럼(*ISSC*, *JONSWAP* 등)을 사용하여 생성한다. 결과는 통계적 *Multiplier*에 근거한 *RMS*, *Significant*, *Average of 1/10 and 1/100 Highest Response* 또는 *Maximum Response* 로 나타난다.

시간 영역해석 방법에선 시스템의 시간이력 응답을 시뮬레이션한다. 해상상태는 조류, 불규칙 파, 바람 또는 이들의 조합으로 구성되고, 주파수 영역 해석의 결과는 시간 영역으로 전환된다. 계류부이에 부착된 탱크와 같은 다물체 운동도 해석할 수 있고, 해양구조물의 도킹해석도 수행할 수 있다.

이 중 관심있는 계류라인 해석분야에서 *MOSES*는 라이저 부분의 해석, 일점 및 다점 계류라인의 정적 및 동적해석, 계류라인의 피로파괴 해석등 해양구조물 해석

프로그램으로서 매우 광범위하게 해석을 할 수 있다.

본 논문에서는, 강제가진에 의한 계류라인의 동적거동 해석을 알아보기 위해 앞장까지 살펴본 지배방정식을 바탕으로 Fortran으로 수치해석을 하고, MOSES 프로그램으로 검증하기로 한다.

4.2 부이시스템 강제가진 해석

본 절에서는, 부이시스템에 대한 계류라인의 동적거동을 알아보기로 한다. 먼저 Berteaux.(1976)의 계류라인 정적해석에 의해 계류시스템에 유체정역학적힘을 가한 뒤 수직가진과 수평가진을 시키기 위해 각 방향에 가진주파수와 가진진폭을 주었다. 따라서, 시간에 따른 부이의 운동을 체인 케이블 끝단에 강제 변위로 가하여 체인 케이블의 동적 거동을 수치적으로 해석하였다. 이 때, 체인 자체에 걸리는 유체력은 파도의 영향은 무시하였고 조류의 영향만을 고려하였다.

Table 4-1은 동적거동해석을 위한 입력값을 나타낸 것이다.

Table 4-1 Input Data of Cable Characteristics and Ocean Conditions

Cable Length	120 (m)
Cable Diameter	0.03 (m)
Cable Weight	300 (N/m)
Current	2 (m/s)
Excitation Period	5 (s)
Surging Excitation Amplitude	2.5 (m)
Heaving Excitation Amplitude	2 (m)
Young Modulus	6.5E8 (N/m ²)
Depth	70 (m)
Buoy Diameter	2 (m)
Buoy Draft	3 (m)

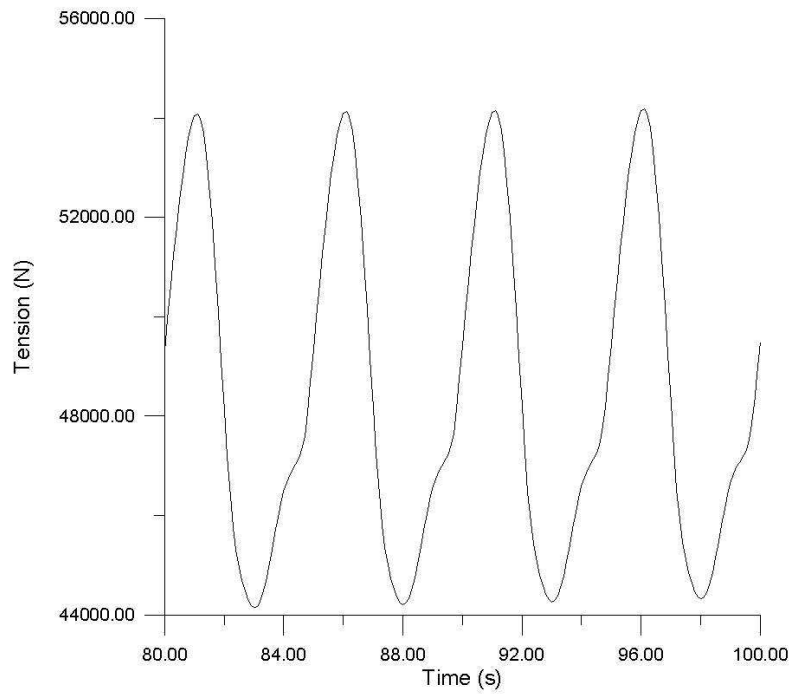


Fig. 4-1 Tension Variation at Top Point

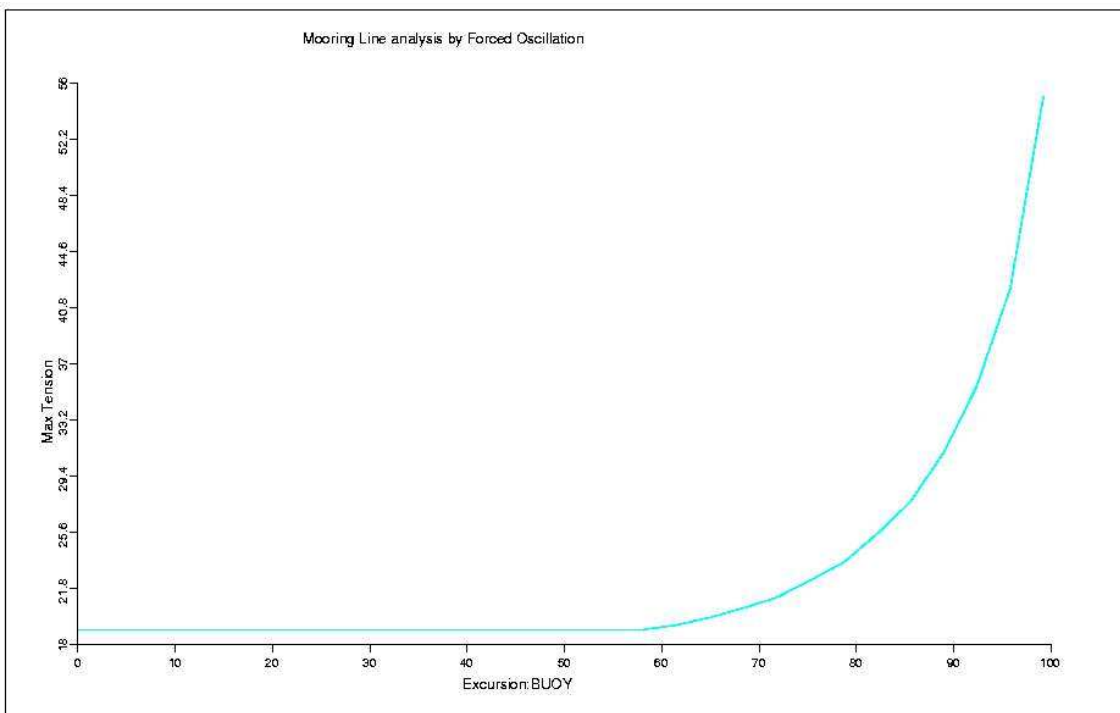


Fig. 4-2 Maximum Tension of Mooring Line by MOSES

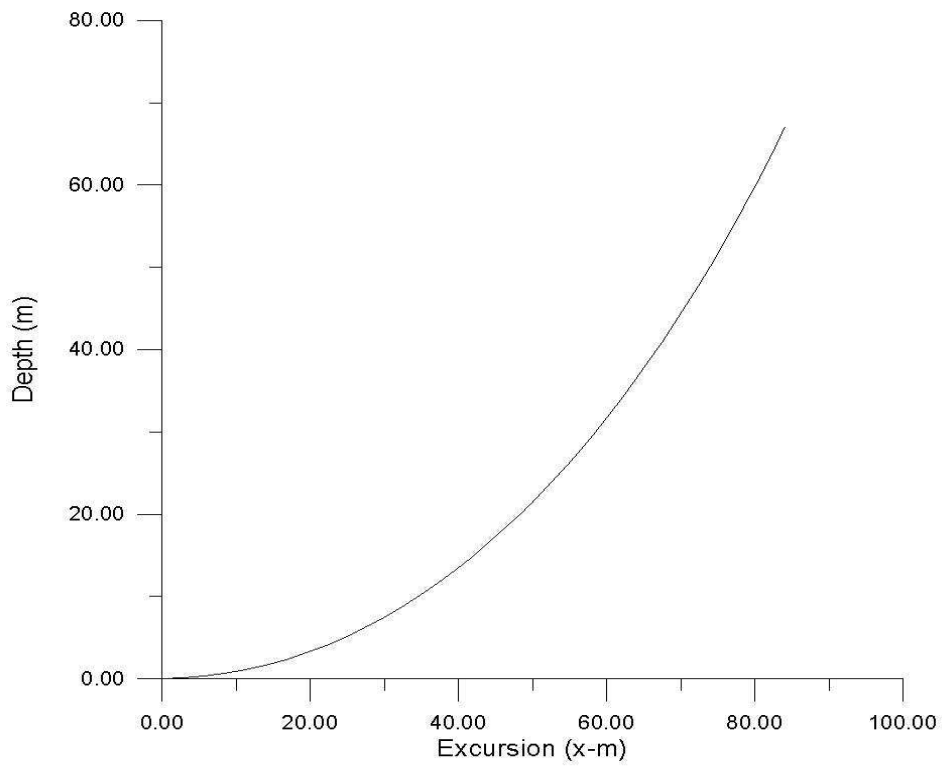


Fig. 4-3 Configuration of Mooring Line

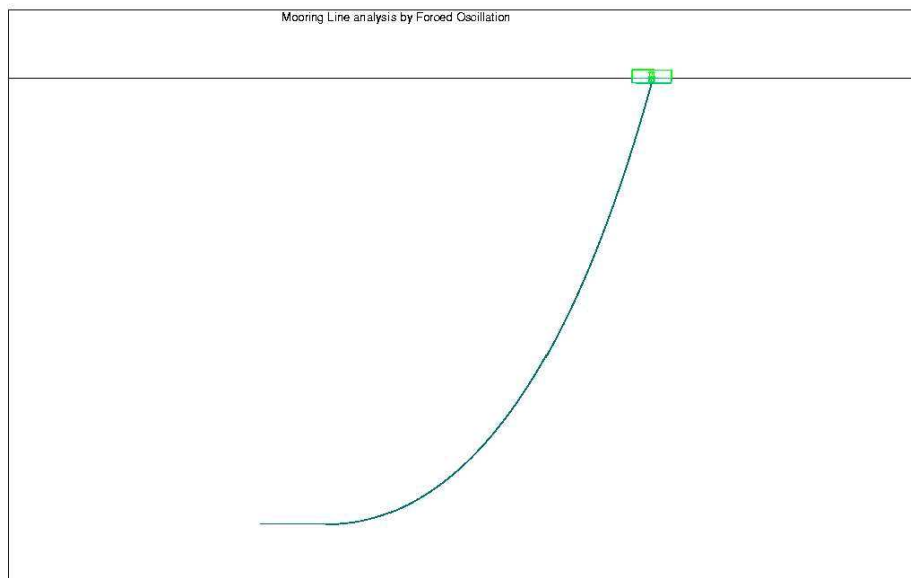


Fig. 4-4 Configuration of Mooring Line by MOSES

Table 4-2 Comparison of Output

Object	Maximum Tension (N)
MOSES	55,100
개발된 프로그램	54,600

Fig. 4-1은 본 논문 프로그램의 장력변화값을 그래프로 나타낸 것인데, 그림에서 보듯이 장력이 비선형적으로 나타난다는 것을 알 수 있다. Fig. 4-2는 MOSES 프로그램으로 해석했을 때 최대 장력값의 수평 이동거리에 대한 변화를 나타낸 것이다. MOSES 프로그램은 Fortran 프로그램과 시뮬레이션의 차이를 보이고 있지만, 관심있는 최대 장력값을 알아보는 데는 별 무리가 없다.

각각의 최대장력값을 Table 4-2에 정리하였다. 표에서 보는 바와 같이 MOSES 프로그램의 값에 비해 약간 작은 값을 보이지만, 각 프로그램의 특성을 고려한다면 비교적 만족스럽다고 할 수 있다.

다음은 수직가진과 수평가진만 각각 가했을 경우 장력에 어떠한 영향을 미치는가에 대하여 살펴보도록 한다. Fig. 4-5는 수직가진만 가했을 경우 시간이력에 따른 부이점(Top Point)에서의 장력의 변화를 나타낸 것이고, Fig. 4-6은 수평가진만 가했을 경우의 장력의 변화를 나타낸 것이다. 입력값은 Table 4-1과 같다.

그림에서 알 수 있듯이 수직가진과 수평가진 모두 비선형적으로 나타남을 확인할 수 있다. 특히 수직가진이 좀더 비선형성을 띄고 있고, 실제 장력의 변화도 더 큰 것으로 나타났다.

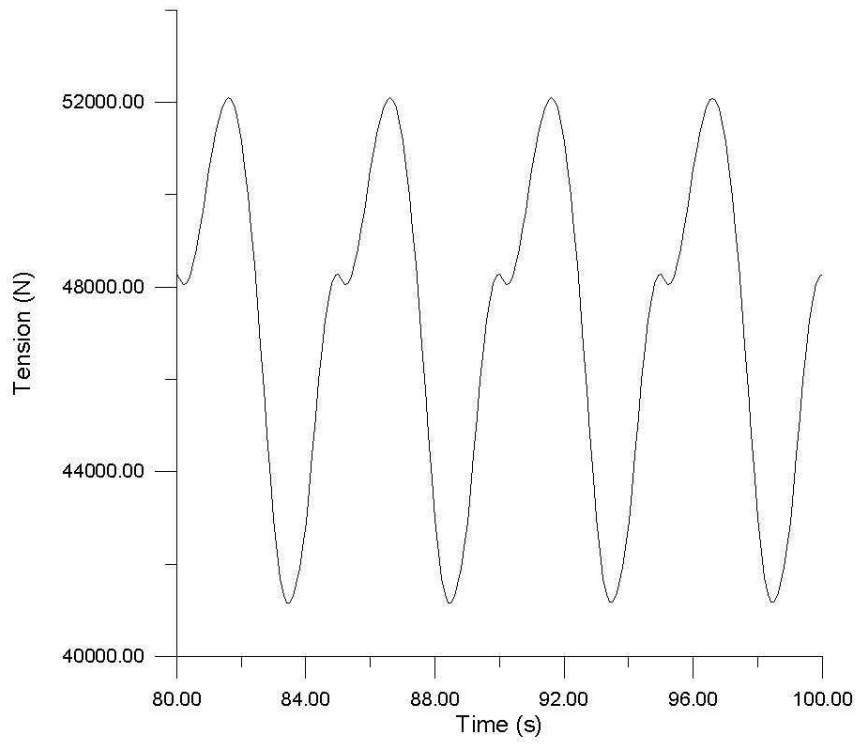


Fig. 4-5 Tension Variation of Vertical Forced Oscillation

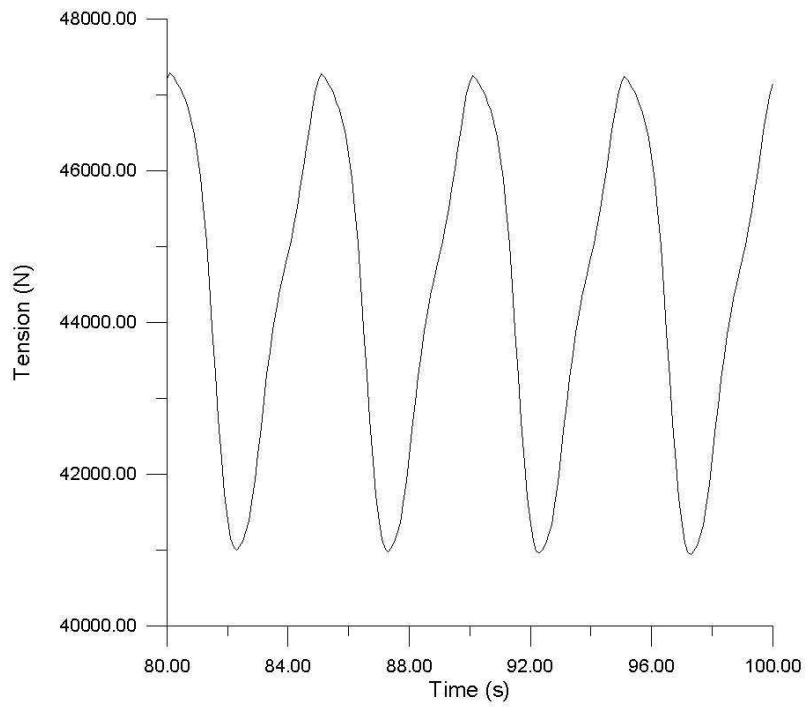
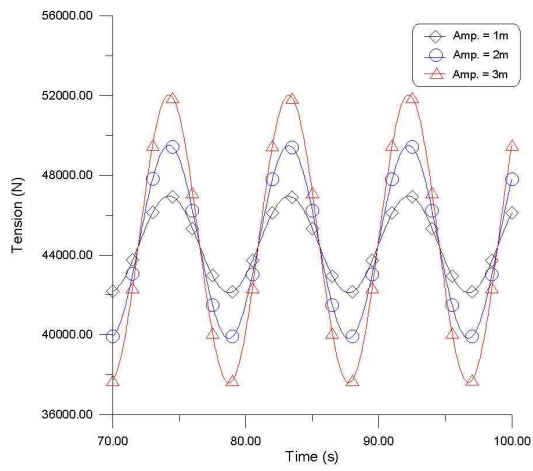


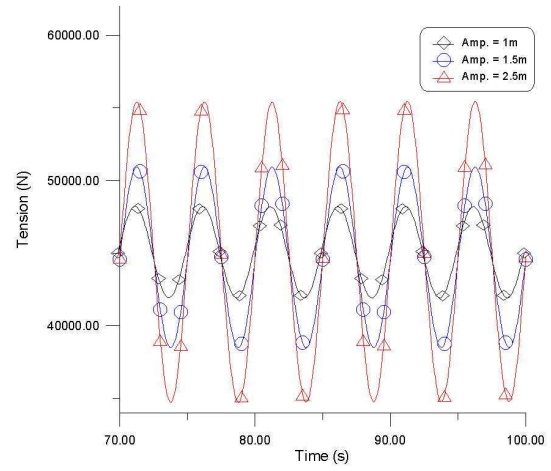
Fig. 4-6 Tension Variation of Horizontal Forced Oscillation

다음으로, 가진진폭과 주기와의 관계가 장력에 어떻게 영향을 미치는가에 대해 알아보기로 한다. 입력조건은 Table 4-1과 같으며, 가진방향은 수직가진만 주었고, 주기는 각각 9초, 5초, 2초 단위로 결과값을 나타내었다. Fig. 4-7는 부이점(Top Point)에서의 계류라인의 장력변화를 각각 나타낸 것이다.

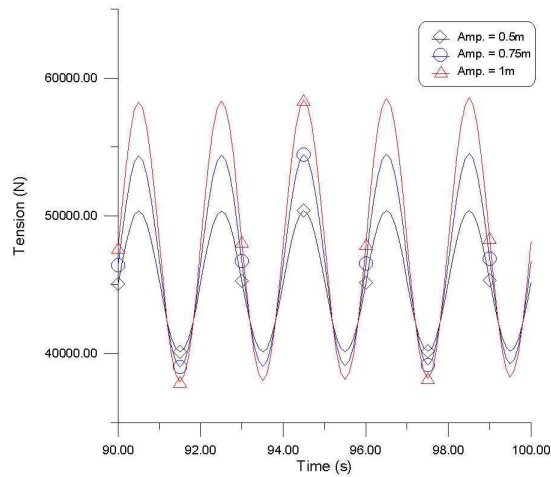
그림에서 알 수 있듯이, 장력은 가진진폭과 주파수에 비례해서 증가한다는 것을 알 수 있다. 그리고, 주파수가 증가함에 따라 장력의 변화폭도 커지므로 설계시 피로파괴 영향도 고려해야 한다.



(a) $T = 9 \text{ s}$



(b) $T = 5 \text{ s}$



(c) $T = 2 \text{ s}$

Fig. 4-7 Tension Variation at Top Point by Different Vertical Forced Periods and Amplitudes

다음은 가진 주파수에 따른 부이점(top point)에서의 장력변화 관계를 알아본다. Fig. 4-8에서 세로축은 각 주파수에 대한 장력의 변화값을 케이블 중량으로 나누어 무차원화한 것이다. 그림에서 보듯이 장력은 주파수의 제곱에 비례하여 증가한다는 것을 알 수 있다. 이 결과값은 김현조 외(2002)에서 나온 실험 및 시뮬레이션 값과 같은 경향을 나타내고 있다.

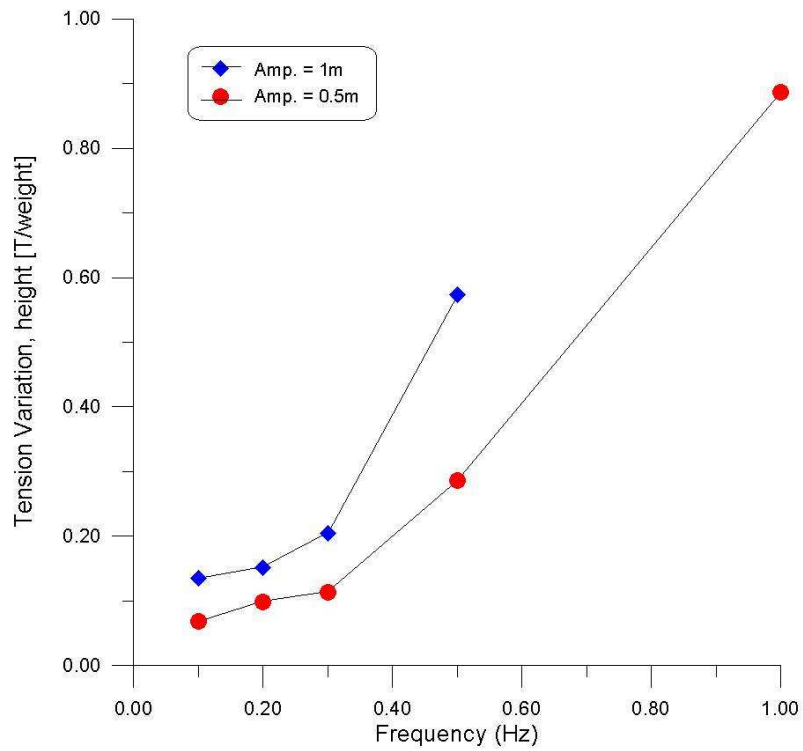


Fig. 4-8 Nondimensional Tension Variation(*Height*)
with Excitation Frequency

Fig. 4-9은 케이블의 지름을 달리했을 때 장력값의 변화를 나타낸 것이다. 그림에서 보듯이 지름이 클수록 장력값은 증가하는 것을 알 수 있다.

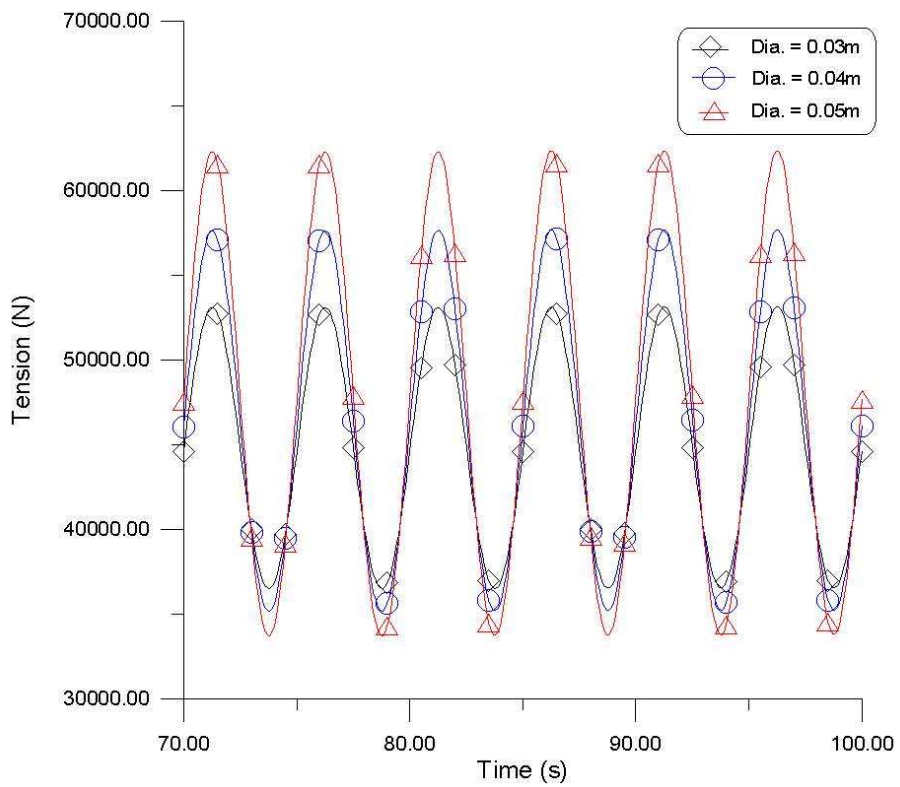


Fig. 4-9 Tension of Mooring Line by Different Cable Diameter

4.3 부소파제 계류라인 해석

다음은 부소파제에 대한 예제 해석을 해 보기로 한다. 부소파제 역시 부이시스템과 마찬가지로 상부부체와 계류라인으로 구성되어 있어, 개발된 프로그램으로 해석하는데 별 무리가 없다고 생각된다. 부소파제는 해면 부근에 집중하여 작용하는 파의 에너지를 반사, 교란 또는 흡수하는 소파기능을 하고, 표층에 설치되어 파를 소멸시키는 것으로서 주로 소파부체, 계류삭, 계류기초, 충격완화장치, 표시등으로 구성되어 있다.

부소파제는 일반 중력식 방파제와는 달리 수심의 영향을 덜 받고, 해수교환을 방해하지 않아 수질환경을 보전하는 장점이 있어 바다목장의 보호시설로 적합하다. 특히, 파고가 높은 외해에 설치하는 경우 시설물 및 양식어류의 보전을 위해 부소파제의 설치가 요구된다.

일본에서는 부소파제를 방어(魴魚) 가두리 양식장에 설치한 후 양식장 가동일수 및 작업능률에 관한 연구 결과, 양식 방어의 육성상황이 미시설 어장에 비하여 약 20% 증가한 결과를 발표했다. 이와 같은 사례가 동기가 되어 일본, 영국 등 양식 선진국에서는 외해 가두리 양식장에 부소파제가 많이 설치되어 있다. 우리나라의 경우, 전남 여수 앞바다에 바다목장을 위한 부소파제 설계를 계획 중에 있다.

보통 부소파제는 다점 계류방식을 택하지만, 본 예제에서는 임의의 부소파제에 대한 일점 계류해석을 해 보기로 한다. 부소파제의 흘수와 길이로 정적해석을 한 뒤, 파 특성치를 적용하여 부소파제점(Top Point)과 앵커점(Anchor Point)에서의 장력의 변화를 살펴본다.



(a) Concrete Floating Breakwater in Japan



(b) Steel-Pipe Floating Breakwater in England

Fig. 4-10 Types of Floating Breakwater

Table 4-3은 부소파재 설치예상지역 환경조건과 케이블 특성치를 나타낸 것이다. 대부분의 케이블 특성치는 Table 4-1과 같고, 수심과 파특성치는 대상해역 환경조건을 따랐다.

Table 4-3 Cable Characteristics and Environment Conditions of Floating Breakwater Installation Area

Cable Length	80 (m)
Cable Diameter	0.03 (m)
Cable Weight	300 (N/m)
Current	0.9 (knts)
Wave Period	12 (s)
Wave Height	5 (m)
Young Modulus	6.5E8 (N/m ²)
Depth	40 (m)
Floating Breakwater Length	5 (m)
Floating Breakwater Draft	2 (m)

Fig. 4-11와 Fig. 4-12는 부소과제점에서와 앵커점에서의 장력 해석 결과를 나타낸 것이다. 부이 데이터에 비해 조류에 의한 정적하중이 크기 때문에 장력값이 크게 나온 것으로 생각된다. 해석 결과 앵커점의 장력변화가 부소과제점보다 크고 비선형적임을 알 수 있다. 그래서, 앵커를 선정함에 있어 피로파괴에 대한 효과도 충분히 고려해야 한다.

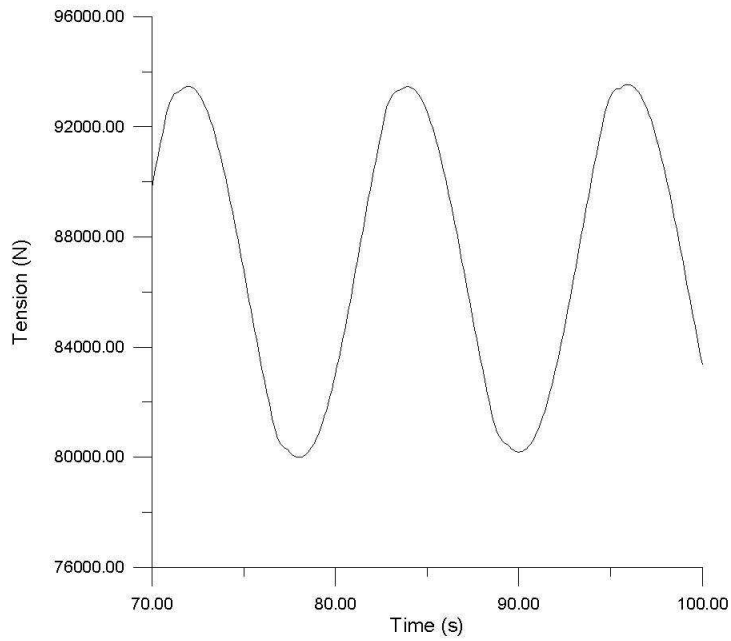


Fig. 4-11 Tension Variation at Top Point

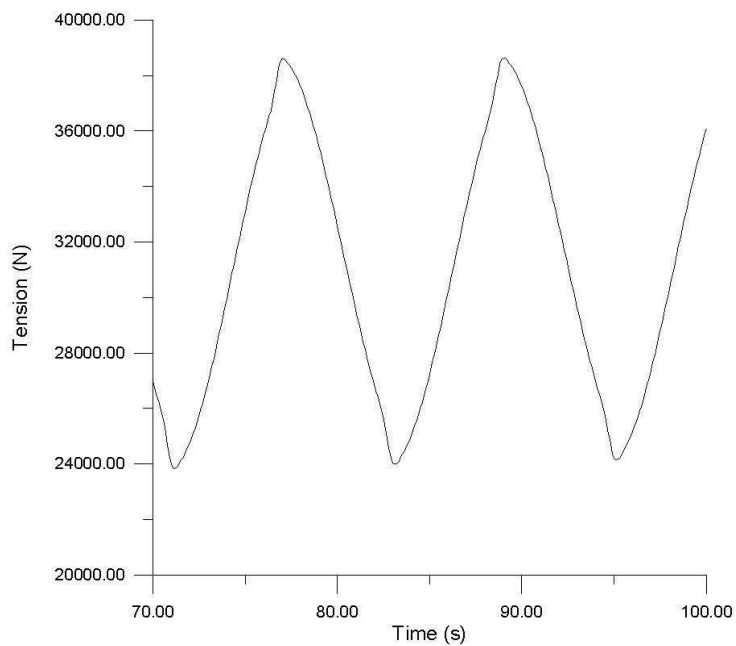


Fig. 4-12 Tension Variation at Anchor Point

5. 결 론

본 논문에선 계류라인에 강제가진력을 주었을 때의 동적거동해석을 수치적 방법으로 알아보았다. 먼저 3차원 동적 지배방정식을 유도하고, 유한차분법을 이용하여 수치해를 구하였다. 유한차분법은 조건에 상관없이 안정적인 음해법을 적용시켰으며, 비선형방정식은 뉴턴-랩슨 반복법을 적용하였다. 개발된 프로그램은 상용프로그램인 MOSES와 비교하여 검증하였고, 각 조건별로 결과값을 비교, 분석하였다.

예제 해석으로는 부이시스템과 부소과제에 대하여 해석하였는데, 부이시스템 강제가진 해석에서 장력값은 비선형성을 보임을 알 수 있었으며, 최대장력값은 상용프로그램인 MOSES와 비슷한 결과값을 얻을 수 있었다. 또, 수평가진과 수직가진에 의한 해석 결과, 수평가진보다 수직가진이 좀더 비선형을 많이 띄고, 장력의 변화도 커 피로파괴의 영향도 생각해야 함을 알 수 있었다.

다음으로, 강제가진의 주기를 9초, 5초, 2초로 변화시켜 가면서 가진진폭과 주기와 관계가 장력에 어떻게 영향을 미치는가에 대해 알아보았다. 그 결과, 장력은 가진진폭과 주파수에 비례해서 증가하며, 특히 주파수의 제곱에 비례하는 것으로 나타났다. 그리고, 주파수가 증가함에 따라 장력의 변화폭도 커지므로 설계시 피로파괴 영향도 고려해야 한다는 것도 알 수 있었다. 또, 케이블의 지름을 달리했을 때 장력값의 변화를 알아 보았는데, 지름이 클수록 장력값은 증가하는 것을 알 수 있었다.

부소과제에 대한 해석에서는 상부끝점(Top Point)과 앵커점(Anchor Point)에서의 장력의 변화를 알아보았다. 결과를 분석해보면, 상부끝점보다 앵커점에서 비선형성이 강하게 나타난다는 것을 확인할 수 있었다.

향후 과제로는 상부부체의 운동을 고려한 상호 연성적인 해석이 필요하고, 다점계류해석을 위한 프로그램의 개발이 필요하다.

참 고 문 헌

Berteaux, H.O., "Buoy Engineering", John Wiley & Sons, Inc., 1976.

Patel, M.H., "Dynamics of Offshore Structures", Butterworth & Co. Ltd., 1989.

Ultramarine, "Reference and Technical Manual for MOSES", Ultramarine Inc., 1995.

국립 수산진흥원, "내파성 가두리 양식시설 및 개량 부자", 국립 수산진흥원 수산 기술지, 1999.

권순홍, 부성윤, 최항순 공역, "해양환경하중", 동명사, 1998.

김덕수, 신현경, "내파성 양식시설 개발에 관한 연구(I) - 케이블-부이-중량물 시스템의 3차원 비선형 정적해석 -", 한국해양공학회 1995년도 춘계학술대회, pp. 237~245, 1995.

김현조, 홍사영, 홍섭, 조석규, "강제동요 시험을 이용한 모형 계류삭의 동적 응답 연구", 한국해양공학회 2002년도 추계학술대회, pp. 134~141, 2002.

류창혁, "계류시스템 설계를 위한 3차원 정적해석 범용 수치프로그램 개발", 한국해양대학교 대학원 해양공학과 석사학위 논문, 1999.

박한일, 정동호, 김국태, "저장력 예인 케이블의 비정상 거동 특성 연구", 국방과학연구소 보고서, 2001.

신현경, 김덕수, "다점지지 계류시스템의 정적해석에 관한 연구", 한국해양공학회 1995년도 학회지, Vol. 9, No. 2, pp. 235~242, 1995.

정동호, "저장력 해양 케이블의 3차원 동적 거동해석", 한국해양대학교 대학원 해양개발공학과 박사학위 논문, 2002.

조규남, 이우섭, "해양 관측용 부이의 개념 설계 연구", 한국해양공학회 1997년도 춘계학술대회, pp. 202~208, 1997.

조철희, 홍충유, 정택선, "SPM 시스템 계류라인의 정적해석 소프트웨어 개발 연구", 한국해양공학회 1999년도 추계학술대회, pp. 202~207, 1999.

감사의 글

20대의 청춘을 바친 조도..

뒤돌아 생각해보면 너무 빨리 지나간거 같다..

대학원 생활 2년 동안 물심양면으로 도움을 주신 지도 교수님이신 박한일 교수님께 고마움을 표합니다. 그리고, 많이 부족한 논문이지만 심사해주신 최경식 교수님, 이호진 교수님에게도 진심으로 감사드립니다.

비록 2년간의 짧은 실험실 생활이었지만, 좋은 선후배님이 있었기에 힘들지 않게 지내왔던거 같다. 저에게 학문적으로 많은 도움을 주셨던 동호형, 정말 고맙습니다. 그리고, 같이 논문 쓴다고 고생한 무근형, 수고하셨습니다..

도영아! 네가 있었기에 대학원 마지막 학기가 참 재미있었던 같다. 너도 열심히 해서 꼭 좋은 논문 쓰길 바래..

그리고, 난이 · 인욱이도 앞으로 실험실 생활 잘하고.. 또 우리 밥친구들인 영호, 형욱, 진경, 기주, 성완, 성원, 진수, 은우 -빠진 사람 없지?-모두들이 있었기에 대학원 생활이 즐거웠던거 같다.

지금까지 부모님께 고맙다는 얘기를 못한거 같은데 이번 기회를 빌어서 고맙다는 말씀을 드리고 싶습니다. 제가 이 세상에 태어나게 해 주신 것부터 오늘까지 어려움없이 생활하게 보살펴 주신점, 어떻게 이 은혜를 다 갚아야 할지....

그리고, 사랑스런 동생 종혁과 경란, 삼촌 · 숙모, 고모 · 고모부께도 고마움을 표합니다.

할머니, 이제 할머니 소원 이루어 드릴께요..꼭 건강하시고 오래오래 사세요..

마지막으로, 이 논문을 할아버지 영전에 바칩니다...