

공학석사 학위논문

3자유도 차량 운동 역학과 차선 추종에
관한 강인 제어기 설계

3 DOF Vehicle Dynamics and Robust Controller Design for the
Lane Following Maneuvers via μ -synthesis

지도교수 유 삼 상

2002년 2월

한국해양대학교 대학원

기 계 공 학 과

차 장 영

이 논문을 차장영의 공학석사 학위논문으로 인준함.

위원장 공학박사 김 환 성 인

위 원 공학박사 하 윤 수 인

위 원 공학박사 유 삼 상 인

2002년 2월

한국해양대학교 대학원

기계공학과 차 장 영

목 차

기호	v
제 1 장 서 론	1
1.1 연구 목적	1
1.2 연구 동향	1
1.3 연구 내용	3
제 2 장 차선추종을 위한 운동방정식 유도	4
2.1 2자유도 운동 모델의 차량 좌표계	4
2.2 3자유도 운동역학 모델과 좌표계	6
2.3 차량에 작용하는 관성력	8
2.3.1 차량의 병진 운동	8
2.3.2 차량의 회전 운동	12
2.4 차량에 작용하는 외력	15
2.5 차선 추종에 관한 3자유도 운동방정식	20
2.6 차선 추종에 관한 상태방정식의 유도	22
제 3 장 제어이론	28
3.1 H_∞ 제어와 강인 제어의 개념	28
3.2 H_∞ 노름(Norm)	28
3.3 특이치 분해(Singular Value Decomposition)	30
3.4 모델 불확실성(Model Uncertainty)	31

3.4.1 불확실성의 분류.....	31
3.4.2 불확실성의 표현방법.....	32
3.4.3 상태공간에서의 불확실성 표현의 다른 방법.....	33
3.5 선형분수변환(Linear Fractional Transformation)	36
3.6 H_{∞} 제어기 설계 방법.....	37
3.7 구조화 특이치(Structured Singular Value)	40
3.8 제어 모델의 강인 안정성과 성능 해석.....	41
3.8.1 강인 안정성(Robust Stability).....	42
3.8.2 강인 성능(Robust Performance)	43
3.9 μ 제어기 설계 방법.....	44
제 4 장 제어기 설계	46
4.1 제어기에 사용할 차량 모델의 선정.....	46
4.2 가중함수의 선정.....	48
4.3 제어기 설계를 위한 상태방정식 표현.....	50
4.4 강인 제어기 설계.....	54
제 5 장 주파수 영역 해석과 시간 영역 해석	56
5.1 주파수 영역 해석.....	56
5.2 시간 영역 해석.....	59
제 6 장 결 론	65
참고문헌	66

3 DOF Vehicle Dynamics and Robust Controller Design for the Lane Following Maneuvers via μ -synthesis

Cha Jang-Young

Department of Mechanical Engineering,
Graduate School of Korea Maritime University

Abstract

Many articles have been published about a two-degree of freedom (DOF) model that includes the lateral and yaw motions for controller synthesis in intelligent transport system (ITS) applications. In this paper, a 3 DOF linear model that includes the roll motion is developed to design a robust steering controller for lane following maneuvers using μ -synthesis. This linear perturbed system includes a set of parametric uncertainties in cornering stiffness and unmodelled dynamics in steering actuators. The state-space model with parameteric uncertainties is represented in linear fractional transformation (LFT) form. Design purpose can be obtained by properly choosing the frequency dependent weighting functions.

The objective of this study is to keep the tracking error and steering input

energy small in the presence of variations of the cornering stiffness coefficients. Furthermore, good ride quality has to be achieved against these uncertainties. Frequency-domain analyses and time-domain numerical simulations are carried out in order to evaluate these performance specifications of a given vehicle system. Finally, the simulation results indicate that the proposed robust controller achieves good performance over a wide range of uncertainty for the given maneuvers.

기 호

$C_{cf}(C_{cr})$:	전륜(후륜)의 캠버 트러스트 계수
$C_{cf}(C_{cr})$:	전륜(후륜)의 코너링 강성
C_{ϕ}	:	롤 감쇠
c	:	스프링 위 질량 중심점에서 요우 축까지의 거리
e	:	스프링 아래 질량 중심점에서 요우 축까지의 거리
h_s	:	롤 축에서 스프링 위 질량 중심점까지의 높이
I_x	:	롤 관성 모멘트
I_{xz}	:	롤 축과 요우 축에 관한 스프링 위 질량의 관성적
I_z	:	요우 관성 모멘트
K_{ϕ}	:	롤 강성
$l_f(l_r)$:	차량의 무게 중심점에서 전(후) 차축까지의 거리
l_s	:	차량의 무게 중심점에서 오차 측정 센서까지의 거리
m	:	차량의 질량
m_s	:	차량의 스프링 위 질량

m_U	:	차량의 스프링 아래 질량
p	:	롤 각속도
r	:	요우 각속도
V	:	차속
y_e	:	차량의 무게 중심점에서 차선까지의 오차
$\alpha_f(\alpha_r)$:	전륜(후륜)의 횡 미끄럼각
β	:	차량의 횡 미끄럼각
ρ	:	전달함수 행렬 G 의 스펙트럼 반경(Spectral Radius)
ρ_d	:	주어진 도로의 곡률 반경
$\delta_f(\delta_r)$:	전륜(후륜)의 조향각
ψ_e	:	요우 각도 오차
$\bar{\sigma}(G)$:	전달함수 행렬 G 의 최대 특이치

제 1 장 서 론

1.1 연구 목적

자동차 산업은 현대 사회에 편의성을 가져왔으며, 특히 과학기술, 경제발전의 측면에서 많은 공헌을 해 왔다. 하지만, 교통체증, 공해문제, 에너지의 효율적 사용 등 새로운 문제들이 대두되기 시작했다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 자동차 회사와 각 연구기관에서 활발한 연구 활동이 진행되고 있다. 현재 이러한 문제를 해결하기 위한 접근 방법중의 하나가 지능형 교통체계(Intelligent Transport System: ITS)이다. 그 중에서도 최근에 특히 활발히 연구가 진행되고 있는 분야로 고속도로 자동 운전 시스템(Automated Highway System: AHS)을 들 수 있다.

고속도로 자동 운전 시스템은 주행 차선을 이탈하지 않으면서, 동시에 양호한 승차감 특성을 유지할 수 있도록 하는 것이다. 한편, 고속도로에서 일어나는 약 90%의 사고는 인간의 실수에 의해 일어나는데 사람이 갖는 역할을 자동차와 도로가 부담하게 함으로써 교통사고를 대폭 줄이면서, 첨단기술을 통해 향상된 차량의 주행 정확성에 따라 도로용량을 증대 시키는 데 목적이 있다.

AHS에는 차량의 횡방향 제어가 포함되어 있으며 이것은 차선추종과 차선변경으로 구분된다[1]-[6]. 본 논문에서는 차선추종 부분만을 고려하며, 노면 조건의 변화와 하중 변화 등 여러 가지 요인에 의해 변화하는 코너링 강성(Cornering Stiffness)에 강인한 제어기의 설계를 목적으로 한다.

1.2 연구 동향

바람직한 차선 추종 성능을 얻기 위한 중요한 요소는 차량의 운동 역학을 이해하는 것이다. 그 중에서 노면과 타이어의 상호작용을 이해하는 것은 차량의 조향 특성을 파악하는 것이 중요한 선결 요건이다. 1950년대 후반까지 차량의 안정성, 타이어의 성능에 관한 많은 논문이 Milliken 등에 의해 발표되었다[8]. 차체의 롤(Roll) 운동을 포함하는 차량의 운동 방정식은 L. Segel에 의해 도입되었으며 롤 축(Roll Axis) 고정이라는 개념을 기초로 하여 체계적으로 정립되어 롤을 포함하는 차량의 운동을 다룰 경우에 널리 이용되고 있다[7]. AHS를 위한 차량의 운동역학과 차선추종에 관한 연구는 Gardels에 의해 처음 제안되었다[2]. 1970년대까지 차량의 횡방향 제어에 관한 대부분의 연구는 고전제어에 기초하여 이루어졌다[9]-[10]. 그렇지만 좋은 실험 결과들을 얻을 수 있었다. Cardew는 직선 도로에서 자동 조향 실험을 했으며 오차 2cm인 만족할 만한 결과를 얻었다[11].

AHS의 주 관심사는 운전자의 역할 경감, 안전성 향상, 도로의 공간 활용 향상이었다. 그런데, 1980년대 후반에 들어와 도로의 통행효율 향상과 안전성 향상이 추가되었다. 이에 따라 횡방향 제어에 관한 상당수의 제어기가 제안되어졌다. Ackermann은 자동 조향 제어기를 설계하기 위하여 각 파라미터에 기초한 강인 제어설계 방법을 적용하였다[23]-[24]. 차량의 질량에 대한 가정을 세움으로써 모델의 차수를 4차에서 3차로 낮출 수 있었다[25]. 이러한 가정은 강인 제어기를 설계하는데 있어 발생하는 많은 어려움을 상당히 해결해 주었다[26]. 최근에 Peng과 Tomizuka는 FSLQ(Frequency Shaped Linear Quadratic) 최적 제어를 이용한 제어기가 차선 추종 성능과 승차감 향상에 유효함을 입증하였다[12]. O'Brien은 차량의 선형 모델에 H_{∞} 이론에 기초한 강인제어 기법을 적용했다[13].

1.3 연구 내용

지금까지의 연구 논문들은 2자유도 차량 운동 모델의 차선추종 성능과 차량 승차감에 관한 것이었다. 그러나, 차량은 승차감 향상을 위해 현가 장치가 장착되어 있다. 현가 장치의 특성상 차량 선회시 안정성을 결정짓는 중요한 요소인 롤 운동을 발생시키며 횡방향 가속도 응답 특성을 저하시키는 것으로 알려져 있다.

따라서, 본 논문에서는 요우(Yaw) 운동, 횡방향 운동, 롤 운동을 고려하여 차량이 임의의 곡률을 가진 차선을 따라 일정한 차속으로 주행할 때의 3자유도 차량 운동 모델을 유도하고, 차선의 곡률이 외부의 기준 입력으로 하는 상태 방정식을 유도하였다. 여기서, 차량모델은 일반적으로 널리 이용되는 근사화 모델인 선형 Bicycle 모델에 기초하여 유도하였다. 그런데, 차량은 입력측의 액츄에이터에 의한 불확실성을 저주파수 영역에서 40%, 고주파수 영역에서 100%의 불확실성이 존재하는 것으로 가정하고, 코너링 강성에 파라미터 섭동(Perturbation)을 갖는 것으로 가정하였다. 이 차량모델에 강인제어설계 방법인 μ -Synthesis을 적용하여 제어기를 설계하였다. 제어기를 설계하는데 있어서 외부에서 들어오는 센서 잡음과 곡률 입력에 가중 함수를 주어 주파수 변화에 따른 특성을 반영하고, 차량 모델의 입력 에너지와 관계 있는 제어기 출력에도 가중 함수를 주어 차량에 가하는 조향각의 포화를 고려하였다. 설계된 제어기를 바탕으로 주파수 영역에서 공칭 안정성(Nominal Stability: NS), 공칭 성능(Nominal Performance: NP), 강인 안정성(Robust Stability: RS), 강인 성능(Robust Performance: RP)를 각각 평가했으며 시간영역에서 임의의 곡률 입력에 대하여 만족할 만한 성능이 나오는지 검토하였다.

제 2 장 차선추종을 위한 운동 방정식 유도

2.1 2자유도 운동 모델의 차량 좌표계

차선 추종에 관한 3자유도 운동 모델을 유도하기 위해 필요한 절대 좌표계와 차체 고정 좌표계간의 관계를 알아보기로 한다. 자세한 내용은 다른 논문에 제시되어 있으므로 여기서는 간략히 평면 내에서의 2자유도 모델의 주요 관계를 다루며, 3자유도에서의 좌표계에 대한 자세한 사항은 2.2 절에서 다루기로 한다[22].

차량이 임의의 곡률을 가진 차선을 따라 주행할 경우 Fig. 2.1과 같이 나타낼 수 있다. 여기서, 차량 속도 V 와 차체 고정 좌표계의 x 축이 이루는 각 β 는 $\tan^{-1}(v/u)$ 로 표현되며 횡 미끄럼각(Sideslip Angle)이라고 한다. 일반적으로 차량은 x 방향의 속도 u 와 y 방향의 속도 v 의 관계가 $u \gg v$ 이므로 횡 미끄럼각 β 는 $|\beta| < 1$ 로 생각할 수 있다. 따라서, $\cos \beta \approx 1$, $\sin \beta \approx \beta$ 로 근사화 시킬 수 있으며, 식 (2.1)과 (2.2)을 얻을 수 있다.

$$u = V \cos \beta \approx V \quad (2.1)$$

$$v = V \sin \beta \approx V\beta \quad (2.2)$$

한편, 차량이 차선을 따라 주행할 때에 원하는 요우 각 ψ_d 의 변화율은 곡률 (Curvature) ρ_d 로 정의할 수 있다. 따라서, 차량이 일정한 속도로 이동한다면, 원하는 요우 각속도 오차는 식 (2.3)으로 표현된다.

$$\dot{\psi}_d = \frac{u}{R_d} \approx \frac{V}{R_d} = V\rho_d \quad (2.3)$$

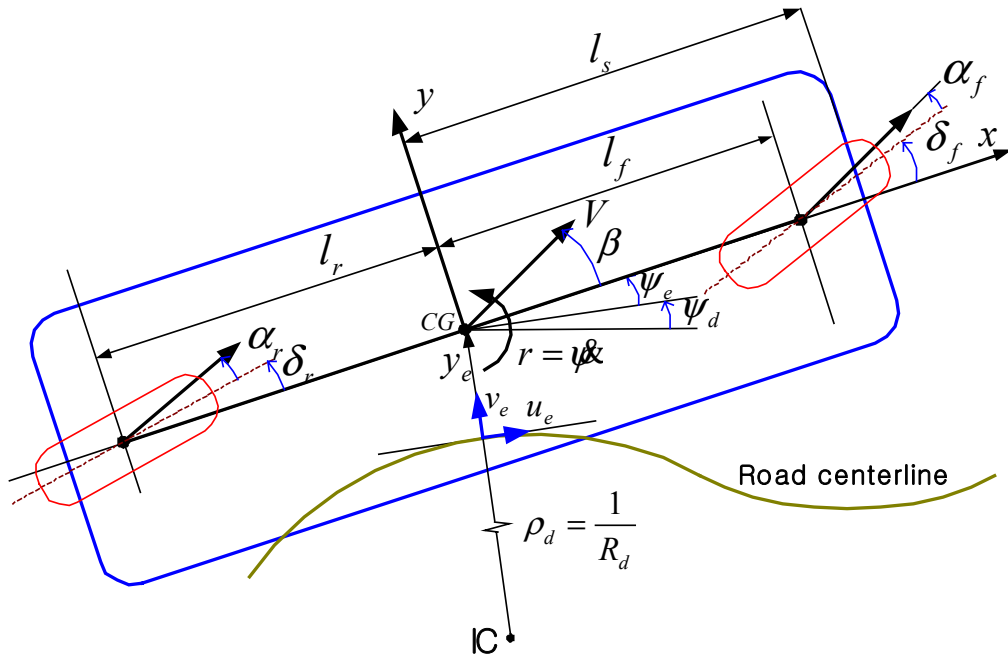


Fig. 2.1 The vehicle model for lane following

식 (2.3)을 이용하면 차량의 실제적인 요우 각속도는 식 (2.4)와 같이 된다.

$$r = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}_e + \dot{\psi}_d \approx \dot{\psi}_e + V\rho_d \quad (2.4)$$

차체 고정 좌표계의 속도를 관성 좌표계로 바꾸기 위해, Fig. 2.1로부터 식 (2.5)와 (2.6)을 유도한다.

$$u_e = -v \sin \psi_e + u \cos \psi_e \quad (2.5)$$

$$v_e = v \cos \psi_e + u \sin \psi_e \quad (2.6)$$

제어기 설계에서 출력 변수를 계산하는데 사용될, 횡방향 오차의 변화율 \dot{y}_e 은

요우 각의 오차 ψ_e 가 작으므로 식 (2.7)로 근사화 된다.

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{v}_e \approx \mathbf{v} + \mathbf{u}\psi_e \approx \mathbf{v} + \mathbf{V}\psi_e \quad (2.7)$$

2.2 3자유도 운동역학 모델과 좌표계

운동 방정식을 표현하기 위해 사용되는 좌표계는 통일되어 있지 않고 연구자에 따라 약간의 차이가 있다. 따라서, 여기서는 가장 자연스럽게 생각하기 쉬운 Fig. 2.2와 같이 좌표계를 설정하여 차량의 운동을 유도한 방법을 따라가기로 한다[21].

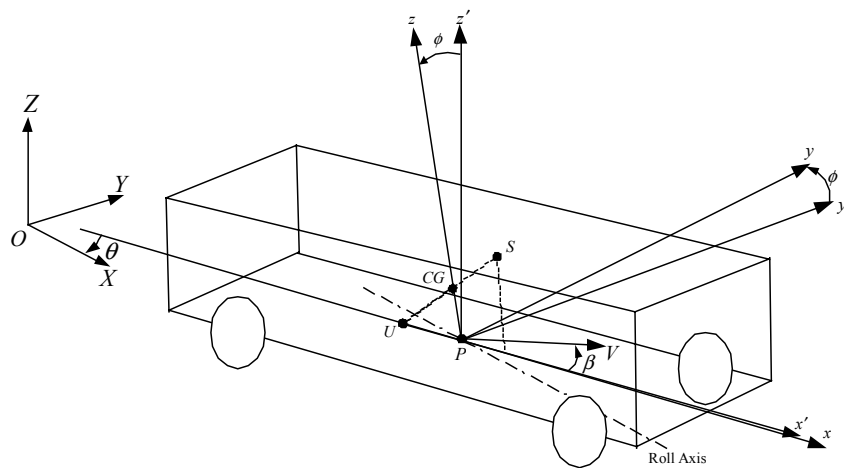


Fig. 2.2 Vehicle axis system

먼저, 정지시의 차량 전체의 중심점 CG 을 통과하는 연직선과 차체 롤 축의 교점을 P 로 한다. 이 P 를 원점으로 하여 지면에 평행한 차량의 전후방향을 x 축으로 하고 여기에 직각인 횡방향을 y 축, 상하방향을 z 축으로 한 차체, 즉, 스프링 위 질량(Spring Mass)에 고정된 좌표계를 $x-y-z$ 로 나타낸다. 또한, P 점을 원점으로 하여 차량의 전후방향을 x' 축, 이것에 직각인 횡방향을 y' 축,

상하방향을 z' 축으로 한 스프링 아래 질량(Unsprung Mass)에 고정된 좌표계를 $x'-y'-z'$ 로 한다. 그런데, 차체의 롤 축과 x 축은 보통 일치하지 않지만 단순화를 위해 차체는 x 축을 중심으로 한 롤 운동을 하는 것으로 가정한다. 또한, 이 때의 롤 각은 미소하며, 차체는 z 축을 중심으로 요우 운동을 하는 것으로 가정한다. 이에 반하여, 스프링 아래 질량은 롤 운동은 하지 않고 z' 축을 중심으로 차체와 같이 요우 운동만을 하는 것으로 가정한다. 따라서, x 축과 x' 축은 항상 일치한다. 다음은 등가적인 스프링 위 질량과 스프링 아래 질량의 운동 모델을 Fig. 2.3으로 나타낸다.

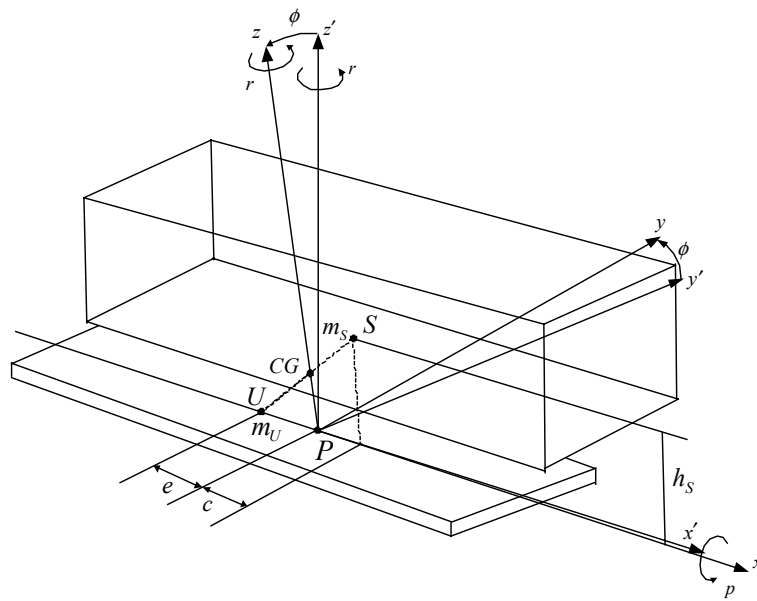


Fig. 2.3 Sprung mass and unsprung mass

스프링 위 질량은 $x-z$ 면에 대하여 대칭이며 그 중심점은 $x-z$ 평면 내에 있는 S 점이다. 스프링 아래 질량은 z' 방향의 높이를 무시하고 질량은 $x'-y'$ 면에 분포하며 중심점은 x' 축상의 U 점이라고 가정한다.

2.3 차량에 작용하는 관성력

강체의 운동은 그 중심점의 병진 운동과 회전 운동으로 나누어 생각할 수 있다. 따라서, 스프링 위 질량과 스프링 아래 질량을 각각 그 중심점의 병진운동과 회전운동으로 나누어 생각하기로 한다.

2.3.1 차량의 병진 운동

강체 중심점의 병진 운동은 그 강체의 전체 질량이 중심점에 집중했을 때의 질점의 운동과 같다. 일반적으로, Fig. 2.4와 같이 절대 공간에 고정된 $X-Y-Z$ 좌표계와 운동하는 강체에 고정된 $x-y-z$ 좌표계를 생각할 수 있다.

$x-y-z$ 좌표계에 대한 중심점 C 의 위치벡터를 $\mathbf{R}_{C/P}$ 라고 하고, 점 C 와 점 P 의 $X-Y-Z$ 좌표계에 대한 위치벡터를 각각 \mathbf{R}_C, \mathbf{R} 라고 하면 식 (2.8)이 성립한다.

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{R} + \mathbf{R}_{C/P} \quad (2.8)$$

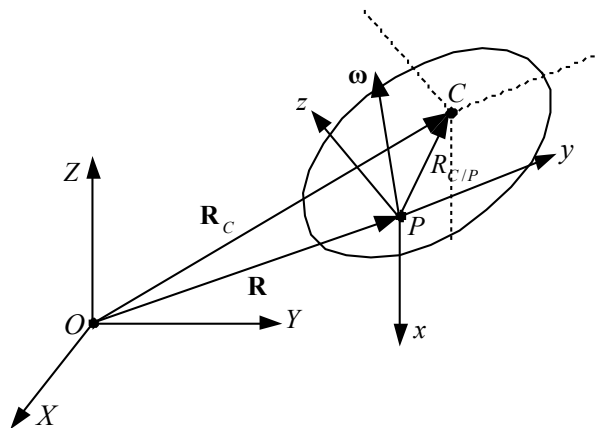


Fig. 2.4 General motion of rigid body

한편, $x-y-z$ 좌표계는 $X-Y-Z$ 좌표계에 대해서 \mathbf{R} 의 속도로 병진운동을 하면서, $\boldsymbol{\omega}$ 의 각속도로 회전운동을 하므로 식 (2.9)가 성립한다.

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{R} + \mathbf{R}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{C/P} \quad (2.9)$$

여기서, \mathbf{R}_{rel} 는 점 C 와 P 사이의 상대 속도이며 강체일 경우에는 0이 된다. 따라서 식 (2.9)을 다음 식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{C/P} \quad (2.10)$$

이러한 일반적인 방법을 차량에 적용하여 차량 중심점 S, U 의 병진운동에 관한 식을 유도해 보기로 한다.

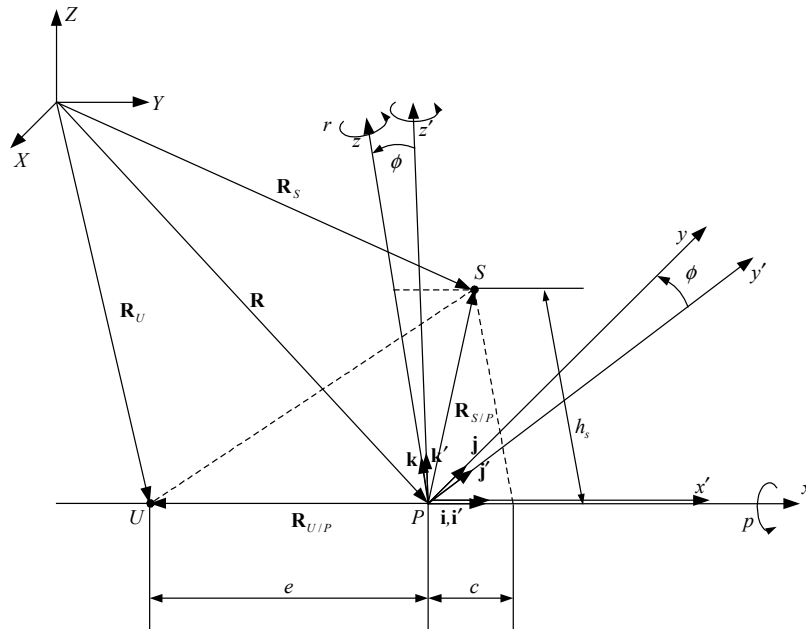


Fig. 2.5 Schematic diagram of the 3 DOF vehicle model

Fig. 2.5와 같이 각각의 점 P, S, U 의 절대 좌표계 $X-Y-Z$ 에 대한 위치 벡터를 각각 $\mathbf{R}, \mathbf{R}_S, \mathbf{R}_U$ 라고 한다. 그리고, 점 S, U 의 좌표계 $x-y-z, x'-y'-z'$ 에 대한 각각의 위치벡터를 $\mathbf{R}_{S/P}, \mathbf{R}_{U/P}$ 로 하며, 회전 각속도를 $\boldsymbol{\omega}_S, \boldsymbol{\omega}_U$ 로 표기한다. x, y, z 방향의 단위벡터는 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, x', y', z' 방향의 단위벡터는 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 라고 가정한다.

점 S, U 은 각각 $x-y-z, x'-y'-z'$ 좌표에 고정된 점이기에 때문에, 위의 식에 따라 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\dot{\mathbf{R}}_S = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{R}_{S/P} \quad (2.11)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_U = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega}_U \times \mathbf{R}_{U/P} \quad (2.12)$$

그런데, P 점은 ϕ 가 보통 작기 때문에 x 방향으로 u , y 또는 y' 방향으로 v 인 속도 성분을 가진다고 해도 무리가 없기 때문에 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\mathbf{R}} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = u\mathbf{i}' + v\mathbf{j}' \quad (2.13)$$

스프링 위 질량과 함께 운동하는 $x-y-z$ 좌표계는 x 축을 중심으로 물 각속도 p , z 축을 중심으로 요우 각속도 r 을 가지기 때문에 식 (2.14)이 되며, 스프링 아래 질량과 함께 운동하는 $x'-y'-z'$ 좌표계는, z' 축을 중심으로 r 의 요우 각속도를 가지기 때문에 식 (2.15)이 된다.

$$\boldsymbol{\omega}_S = p\mathbf{i} + r\mathbf{k} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\omega}_U = r\mathbf{k}' \quad (2.15)$$

한편, $\mathbf{R}_{S/P}, \mathbf{R}_{U/P}$ 는 식 (2.16), (2.17)로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{R}_{S/P} = c\mathbf{i} + h_S\mathbf{k} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{R}_{U/P} = -e\mathbf{i}' \quad (2.17)$$

식 (2.13), (2.14), (2.16)을 식 (2.11)에 대입하고, 식 (2.13), (2.15), (2.17)을 식 (2.12)에 대입하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{R}_S = u\mathbf{i} + (v - h_S p + cr)\mathbf{j} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{R}_U = u\mathbf{i}' + (v - er)\mathbf{j}' \quad (2.19)$$

식 (2.18), (2.19)을 미분하여 점 S 와 U 의 가속도 벡터를 구하면 식 (2.20), (2.21)이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_S = & (\dot{u} - vr + h_S pr - cr^2)\mathbf{i} + (\dot{u} + ur - h_S \dot{p} + c\dot{r})\mathbf{j} \\ & + (vp - h_S p^2 + cpr)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{R}_U = (\dot{u} - vr + er^2)\mathbf{i}' + (\dot{u} + ur - er\dot{r})\mathbf{j}' \quad (2.21)$$

식 (2.20), (2.21)로부터 스프링 위 질량과 스프링 아래 질량의 횡방향, 즉, y 방향과 y' 방향의 가속도 a_S , a_U 를 구하면 각각 식 (2.22), (2.23)이 된다.

$$a_S = \dot{u} + ur - h_S \dot{p} + c\dot{r} \quad (2.22)$$

$$a_U = \dot{u} + ur - er\dot{r} \quad (2.23)$$

따라서, 스프링 위 질량과 스프링 아래 질량의 관성력 $\sum F_{iy}$ 는 식 (2.24)와 같이 된다. 여기서, $m_S + m_U = m$ 이며 CG 점이 차량 전체의 중심점이기 때문에 $m_S c - m_U e = 0$ 이다.

$$\begin{aligned}
\sum F_{iy} &= F_{iyS} + F_{iyU} = m_S a_S + m_U a_U \\
&= m_S (\dot{u} + ur - h_S \dot{\phi} + c\dot{\phi}) + m_U (\dot{u} + ur - e\dot{\phi}) \\
&= (m_S + m_U)(\dot{u} + ur) - m_S h_S \dot{\phi} + (m_S c - m_U e)\dot{\phi} \\
&= m(\dot{u} + ur) - m_S h_S \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

식 (2.24)을 좌표계 변환하기 위하여 식 (2.7)을 다음 식과 같이 미분하고 식 (2.1)과 식 (2.4)을 이용하면 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\dot{u} + ur \approx \dot{y}_e - V\dot{\phi} + V(\dot{\phi} + V\rho_d) = \dot{y}_e + V^2\rho_d \tag{2.25}$$

식 (2.25)을 식 (2.24)에 대입하여 관성력을 횡방향 오차와 곡률에 관한 식으로 구한다.

$$\sum F_{iy} = m(\dot{y}_e + V^2\rho_d) - m_S h_S \dot{\phi} \tag{2.26}$$

2.3.2 차량의 회전운동

다음으로, 스프링 위 질량과 스프링 아래 질량의 중심점 둘레의 회전 운동을 생각한다. 일반적으로 강체는 Fig. 2.4와 같이 중심점 C 을 중심으로 한 각 운동량 \mathbf{H}_C 는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_C &= \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega} \\
&= (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\mathbf{i} + (-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\mathbf{j} \\
&\quad + (-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

여기서, \mathbf{I} 는 강체 중심점 C 을 중심으로 한 관성 텐서(Inertia Tensor)이며, I_{xx}, I_{yy}, Λ 등은 점 C 을 통과하는 x, y, z 축에 평행한 축 주위의 강체의 관성 모멘트(Inertia Moment) 또는 관성적(Product of Inertia)이다. 그리고, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 는 강체의 회전 속도 $\boldsymbol{\omega}$ 의 x, y, z 방향 성분이다.

먼저, 스프링 위 질량의 중심점 S 을 중심으로 한 회전을 고려한다. 이 점을 중심으로 한 각 운동량(Angular Momentum)을 \mathbf{H}_S 라고 하면, 그 회전 각속도 $\boldsymbol{\omega}_S$ 는 식 (2.14)과 같기 때문에 식 (2.28)로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{H}_S = \mathbf{I}_S \times \boldsymbol{\omega}_S = (I_{xxS}p - I_{xzS}r)\mathbf{i} + (-I_{zxS}p + I_{zzS}r)\mathbf{k} \quad (2.28)$$

여기서, \mathbf{I}_S 는 점 S 을 중심으로 한 스프링 위 질량의 관성 텐서이며, $I_{xxS}, I_{yyS}, \Lambda$ 등은 점 S 을 통과하고 x, y, z 축에 평행한 축 주위의 관성 모멘트 또는 관성적인데, 스프링 위 질량은 $x-z$ 면에 대해서 대칭으로 가정하였으므로 $I_{yxS} = I_{yzS} = 0$ 이다. 같은 방법으로 스프링 아래 질량의 중심점 U 둘레의 각 운동량 \mathbf{H}_U 는 식 (2.15)을 이용하면 식 (2.29)이 된다.

$$\mathbf{H}_U = I_{zzU}r\mathbf{k} \quad (2.29)$$

여기서, I_{zzU} 는 점 U 을 통과하며 z' 축에 평행한 축 둘레의 관성 모멘트이다. 스프링 아래 질량은 x' 축에 대칭이고 그 높이를 무시하여 $x'-y'$ 면에 질량이 분포하고 있는 것으로 가정하였기 때문에 관성적은 모두 0이다.

일반적으로 각운동량의 시간미분이 모멘트이기 때문에 식 (2.28), (2.29)을 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_S = & (I_{xxS} \mathbf{p} - I_{xzS} \mathbf{q}) \mathbf{i} + [I_{xzS} p^2 + (I_{xxS} - I_{zzS}) pr - I_{xzS} r^2] \mathbf{j} \\ & + (-I_{zxS} \mathbf{p} + I_{zzS} \mathbf{q}) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{H}_U = I_{zzU} \mathbf{r} \quad (2.31)$$

식 (2.30), (2.31)로부터 스프링 위 질량의 중심점 S 을 통과하는 z 축 주위의 요우 모멘트 M_{izS} 와 x 축 주위의 롤 모멘트 M_{ixS} 는 다음과 같이 된다.

$$M_{izS} = -I_{zxS} \mathbf{p} + I_{zzS} \mathbf{q} \quad (2.32)$$

$$M_{ixS} = I_{xxS} \mathbf{p} - I_{xzS} \mathbf{q} \quad (2.33)$$

또한, 스프링 아래 질량의 중심점 U 을 통과하는 z' 축 둘레의 요우 모멘트 M_{izU} 는 식 (2.34)이 된다.

$$M_{izU} = I_{zzU} \mathbf{r} \quad (2.34)$$

이상에서, 차량 전체 z 또는 z' 축 둘레의 요우 모멘트 $\sum M_{iz}$ 과 x 또는 x' 축 둘레의 롤 모멘트 $\sum M_{ix}$ 은 스프링 위 질량의 중심점 S 와 스프링 아래 질량의 중심점 U 에 각각 F_{iyU} , F_{iyS} 의 관성력이 작용하기 때문에 식 (2.35), (2.36)이 된다.

$$\begin{aligned} \sum M_{iz} = & M_{izS} + M_{izU} + cF_{iyS} - eF_{iyU} \\ = & (I_{zzS} + I_{zzU} + m_S c^2 + m_U e^2) \mathbf{r} - (I_{zxS} + m_S h_S c) \mathbf{p} \\ & + (m_S c - m_U e) (\mathbf{q} + ur) = I_z \mathbf{r} - I_{zx} \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
\sum M_{ix} &= M_{ixS} - h_S F_{iyS} \\
&= (I_{xxS} + m_S h_S^2) \dot{\phi} - (I_{xzS} + m_S h_S c) \dot{\phi} - m_S h_S (\dot{\phi} + \omega r) \\
&= I_x \dot{\phi} - I_{xz} \dot{\phi} - m_S h_S (\dot{\phi} + \omega r)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

단, 여기서 $|\phi| \ll 1$ 이므로 다음 식으로 대치한다.

$$\begin{aligned}
I_z &= I_{zzS} + I_{zzU} + m_S c^2 + m_U e^2 \\
I_{zx} &= I_{xz} = I_{xzS} + m_S h_S c \\
I_x &= I_{xxS} + m_S h_S^2
\end{aligned}$$

차속 V 인 차량이 일정한 곡률을 가진 도로를 주행할 때의 요우 각가속도는 $\dot{\omega}_y = 0$ 이므로 식 (2.4)을 미분하면 식 (2.37)이 된다.

$$\dot{\phi} = \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \dot{\omega}_e + \dot{\omega}_d \approx \dot{\omega}_e \tag{2.37}$$

이다. 따라서, 좌표변환을 위해 식 (2.25)와 (2.37)을 식 (2.35)와 (2.36)에 대입하면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\sum M_{iz} = I_z \dot{\omega}_e - I_{xz} \dot{\phi} \tag{2.38}$$

$$\sum M_{ix} = I_x \dot{\phi} - I_{xz} \dot{\omega}_e - m_S h_S (\dot{\omega}_e + V^2 \rho_d) \tag{2.39}$$

2.4 차량에 작용하는 외력

운동하고 있는 차량의 각 타이어에는 횡 미끄럼각에 비례하는 코너링 포스 (Cornering Force)가 작용한다. 또한, 차체가 롤 운동을 할 경우 롤에 의해 발생하는 타이어의 캠버각(Camber Angle)의 변화에 비례하는 캠버 트러스트 (Camber Thrust)가 작용한다. 따라서, 차체의 롤을 고려한 차량의 운동방정식을 유도할 때는 차량 전체에 작용하는 외력으로서 이 2가지 힘을 생각하여야 한다.

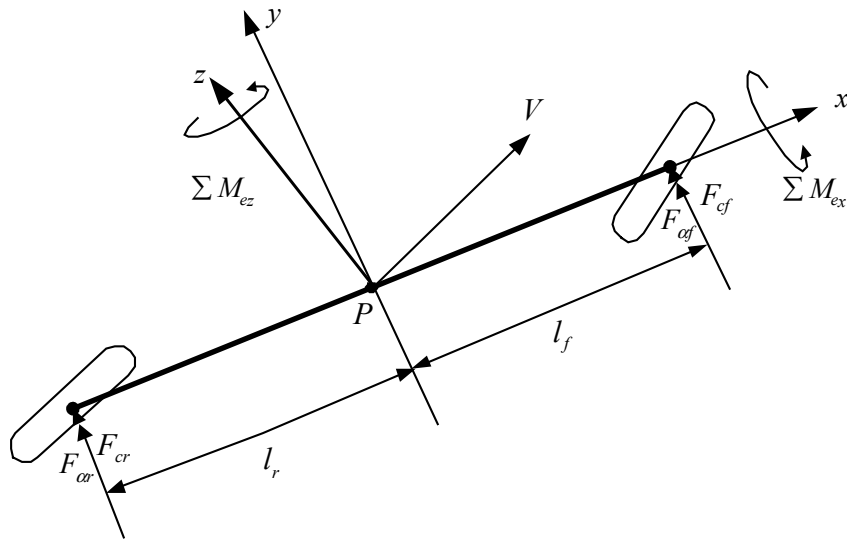


Fig. 2.6 3 DOF vehicle model (external forces and moments)

먼저, 전후 각 타이어의 코너링 포스를 생각해 본다. 차체가 롤 운동을 하고 있을 때의 전후 각 타이어의 롤 스티어(Roll Steer) α_{sf} , α_{sr} 는 롤 각에 비례한다고 가정하면

$$\alpha_{sf} = \frac{\partial \alpha_{sf}}{\partial \phi} \phi, \quad \alpha_{sr} = \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial \phi} \phi \quad (2.40)$$

가 된다. 단, $\partial\alpha_f/\partial\phi$, $\partial\alpha_r/\partial\phi$ 은 단위 롤 각당 발생하는 전후 각 타이어의 롤 스티어양이다. 횡 미끄럼에 롤 스티어의 영향을 고려하여 미끄럼 각(Slip Angle)을 구하면 전후 각 타이어의 횡 미끄럼각은 다음과 같이 된다.

$$\alpha_f = \frac{1}{V} \mathcal{X}_e + \frac{l_f r}{V} - \delta_f - \psi_e - \frac{\partial\alpha_{sf}}{\partial\phi} \phi \quad (2.41)$$

$$\alpha_r = \frac{1}{V} \mathcal{X}_e - \frac{l_r r}{V} - \delta_r - \psi_e - \frac{\partial\alpha_{sr}}{\partial\phi} \phi \quad (2.42)$$

가 된다. 따라서, 전후 각 타이어에 작용하는 코너링 포스 $2F_{cf}$, $2F_{cr}$ 는 다음과 같다.

$$2F_{cf} = -2C_{cf}\alpha_f = 2C_{cf} \left(-\frac{1}{V} \mathcal{X}_e - \frac{l_f r}{V} + \delta_f + \psi_e + \frac{\partial\alpha_{sf}}{\partial\phi} \phi \right) \quad (2.43)$$

$$2F_{cr} = -2C_{cr}\alpha_r = 2C_{cr} \left(-\frac{1}{V} \mathcal{X}_e + \frac{l_r r}{V} + \delta_r + \psi_e + \frac{\partial\alpha_{sr}}{\partial\phi} \phi \right) \quad (2.44)$$

단, 여기서 하중 이동에 의한 코너링 포스의 변화는 무시하기로 한다. 한편, 차체의 롤에 의해 생기는 캠버각은 롤 각에 비례한다고 가정하면 전후 각 타이어에 각각 작용하는 캠버 트러스트는 다음과 같이 된다.

$$2F_{cf} = -2C_{cf} \frac{\partial\phi_f}{\partial\phi} \phi, \quad 2F_{cr} = -2C_{cr} \frac{\partial\phi_r}{\partial\phi} \phi \quad (2.45)$$

여기서, C_{cf}, C_{cr} 는 전후 각 타이어에 작용하는 캠버 트러스트 계수이다. 또한, $\partial\phi_f/\partial\phi$, $\partial\phi_r/\partial\phi$ 는 차체의 단위 롤 각당 발생하는 전후 각 타이어의 캠버각이다.

따라서, 물을 고려한 차량 전체에 작용하는 횡방향 힘, 다시 말해 y 방향의 전체 외력은 식 (2.46)로 정의할 수 있으며, 차량 전체에 작용하는 외력에 의한 z 축 둘레의 요우 모멘트 M_{ez} 는 식 (2.47)과 같다.

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{ey} &= 2F_{of} + 2F_{or} + 2F_{of} + 2F_{or} \\
&= -2C_{of} \left(\frac{1}{V} \mathfrak{X}_e + \frac{l_f r}{V} - \delta_f - \psi_e - \frac{\partial \alpha_{sf}}{\partial \phi} \phi \right) \\
&\quad - 2C_{or} \left(\frac{1}{V} \mathfrak{X}_e - \frac{l_r r}{V} - \delta_r - \psi_e - \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial \phi} \phi \right) \\
&\quad - 2C_{of} \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \phi - 2C_{or} \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \phi
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma M_{ez} &= 2l_f F_{of} - 2l_r F_{or} + 2l_f F_{of} - 2l_r F_{or} \\
&= -2l_f C_{of} \left(\frac{1}{V} \mathfrak{X}_e + \frac{l_f r}{V} - \delta_f - \psi_e - \frac{\partial \alpha_{sf}}{\partial \phi} \phi \right) \\
&\quad + 2l_r C_{or} \left(\frac{1}{V} \mathfrak{X}_e - \frac{l_r r}{V} - \delta_r - \psi_e - \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial \phi} \phi \right) \\
&\quad - 2l_f C_{of} \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \phi + 2l_r C_{or} \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \phi
\end{aligned} \tag{2.47}$$

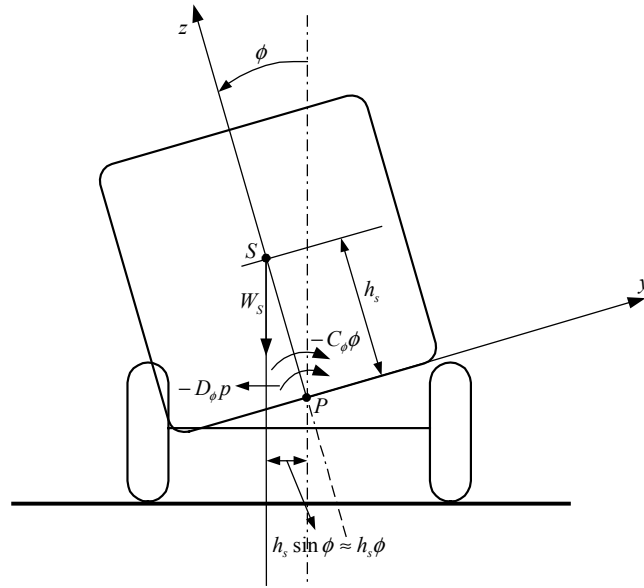


Fig. 2.7 Roll model for lateral behavior

보통 차체가 롤 운동을 하면 차량의 현가 장치인 스프링과 쇼크 업소바(Shock Absorber)에 의해 반력을 받게 된다. 이 반력이 차체의 롤 축인 x 축 둘레의 롤 모멘트를 발생시키게 된다. 스프링에 의한 롤 모멘트는 식 (2.48)로 표현할 수 있으며, 쇼크 업소바에 의한 반력은 롤 각속도에 비례하므로 롤 모멘트는 식 (2.49)과 같다.

$$F_{\phi} = -K_{\phi}\phi \quad (2.48)$$

$$F_p = -C_{\phi}p \quad (2.49)$$

그런데, 차체가 롤 운동을 하면 Fig. 2.7과 같이 중력 $m_S g$ 에 의해 x 축 주위에 $m_S g h_S \phi$ 의 모멘트가 발생한다. 따라서, 차체에 작용하는 외력에 의한 x 축 둘레의 롤 모멘트 $\sum M_{ex}$ 는 식 (2.50)과 같다.

$$\sum M_{ex} = (-K_\phi + m_s g h_s) \phi - C_\phi p \quad (2.50)$$

2.5 차선추종에 관한 3자유도 운동방정식

지금까지 차체의 롤을 고려하였을 때에 차량에 작용하는 관성력과 외력에 대해 살펴보았다. 각 방향에 대하여 힘과 모멘트의 평형을 적용하고, 식 (2.4)의 관계를 이용하여 전체적인 3자유도 운동방정식을 유도하기로 한다.

$$y \text{ 방향 힘의 평형 : } \sum F_{iy} - \sum F_{ey} = 0 \quad (2.51)$$

$$z \text{ 축 모멘트의 평형 : } \sum M_{iz} - \sum M_{ez} = 0 \quad (2.52)$$

$$x \text{ 축 모멘트의 평형 : } \sum M_{ix} - \sum M_{ex} = 0 \quad (2.53)$$

식 (2.26), (2.35), (2.36), (2.46), (2.47), (2.50)과 (2.4)을 식 (2.51), (2.52), (2.53)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 운동 방정식을 구할 수 있다.

y 방향 힘의 평형:

$$\begin{aligned} & \cancel{\frac{m_s h_s}{m}} + \frac{C_{of} + C_{or}}{mV} \cancel{\psi_e} - \frac{C_{of} + C_{or}}{m} \psi_e + \frac{l_f C_{of} - l_r C_{or}}{mV} \cancel{\psi_e} - \frac{m_s h_s}{m} \cancel{\phi} \\ & - \frac{1}{m} \left[\left(C_{of} \frac{\partial \alpha_{sf}}{\partial \phi} + C_{or} \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial \phi} \right) - \left(C_{cf} \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} + C_{cr} \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \right) \right] \phi \\ & = \frac{C_{of}}{m} \delta_f + \frac{C_{or}}{m} \delta_r - \left(V^2 + \frac{l_f C_{of} - l_r C_{or}}{m} \right) \rho_d \end{aligned} \quad (2.54)$$

z 축 모멘트 평형:

$$\begin{aligned}
& \frac{l_f C_{cf} - l_r C_{cr}}{I_z V} \cancel{\psi_e} - \frac{l_f C_{cf} - l_r C_{cr}}{I_z} \psi_e + \frac{l_f^2 C_{cf} + l_r^2 C_{cr}}{I_z V} \cancel{\psi_e} + \cancel{\psi_e} - \frac{I_{zx}}{I_z} \cancel{\phi} \\
& - \frac{1}{I_z} \left[\left(l_f C_{cf} \frac{\partial \alpha_{sf}}{\partial \phi} - l_r C_{cr} \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial \phi} \right) - \left(l_f C_{cf} \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} - l_r C_{cr} \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \right) \right] \phi \\
& = \frac{l_f C_{cf}}{I_z} \delta_f - \frac{l_r C_{cr}}{I_z} \delta_r - \frac{l_f^2 C_{cf} + l_r^2 C_{cr}}{I_z} \rho_d \tag{2.55}
\end{aligned}$$

x 축 모멘트 평형:

$$\begin{aligned}
& - \frac{m_S h_S}{I_x} \cancel{\psi_e} - \frac{I_{xz}}{I_x} \cancel{\psi_e} + \frac{K_\phi - m_S g h_S}{I_x} \phi + \frac{C_\phi}{I_x} \phi + \cancel{\phi} \\
& = \frac{m_S h_S V^2}{I_x} \rho_d \tag{2.56}
\end{aligned}$$

다시 정리하면

y 방향 힘의 평형:

$$\begin{aligned}
& \cancel{\psi_e} + \frac{a_1}{V} \cancel{\psi_e} - a_1 \psi_e + \frac{a_2}{V} \cancel{\psi_e} - \frac{m_S h_S}{m} \cancel{\phi} - \frac{Y_\phi}{m} \phi \\
& = \frac{C_{cf}}{m} \delta_f + \frac{C_{cr}}{m} \delta_r - (V^2 + a_2) \rho_d \tag{2.57}
\end{aligned}$$

z 축 모멘트 평형:

$$\begin{aligned}
& \frac{a_3}{V} \cancel{\psi_e} - a_3 \psi_e + \frac{a_4}{V} \cancel{\psi_e} + \cancel{\psi_e} - \frac{I_{zx}}{I_z} \cancel{\phi} - \frac{N_\phi}{I_z} \phi \\
& = \frac{l_f C_{cf}}{I_z} \delta_f - \frac{l_r C_{cr}}{I_z} \delta_r - a_4 \rho_d \tag{2.58}
\end{aligned}$$

x 축 모멘트 평형:

$$-a_5 \ddot{\phi} - \frac{I_{xz}}{I_x} \ddot{\phi} + \left(\frac{K_\phi}{I_x} - a_5 g \right) \phi + \frac{C_\phi}{I_x} \dot{\phi} + \dot{\phi} = a_5 V^2 \rho_d \quad (2.59)$$

여기서,

$$a_1 = \frac{C_{cf} + C_{cr}}{m}, \quad a_2 = \frac{l_f C_{cf} - l_r C_{cr}}{m}, \quad a_3 = \frac{l_f C_{cf} - l_r C_{cr}}{I_z}$$

$$a_4 = \frac{l_f^2 C_{cf} + l_r^2 C_{cr}}{I_z}, \quad a_5 = \frac{m_S h_S}{I_x}$$

$$Y_\phi = \left(C_{cf} \frac{\partial \alpha_{sf}}{\partial \phi} + C_{cr} \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial \phi} \right) - \left(C_{cf} \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} + C_{cr} \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \right)$$

$$N_\phi = \left(l_f C_{cf} \frac{\partial \alpha_{sf}}{\partial \phi} - l_r C_{cr} \frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial \phi} \right) - \left(l_f C_{cf} \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} - l_r C_{cr} \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \right)$$

2.6 차선 추종에 관한 상태방정식의 유도

2.2.4 절에서는 차량의 운동특성을 수학적으로 모델링 하였다. 그런데, 제어를 설계하기 위해서는 운동방정식을 상태모델로 표현할 필요가 있다. 운동 방정식을 선형화하여 상태 변수와 관심의 대상이 되는 출력 변수를 선정하여 1계 연립 미분방정식으로 만든 식 (2.60)과 같은 상태 모델로 표현하기로 한다.

$$\begin{cases} \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.60)$$

본 논문에서 제어 대상으로 하는 차량의 3자유도 운동의 독립 변수이면서 관

심의 대상인 횡방향 변위 오차, 요우 각 오차, 롤 각과 그 변수들의 미분을 상태변수로 선정하고, 입력변수는 제어기의 출력인 조향각과 원하는 곡률입력으로 취하여 다음과 같이 표현한다.

$$\text{상태벡터 : } \mathbf{x} = [y_e, \dot{y}_e, \psi_e, \dot{\psi}_e, \phi, \dot{\phi}]^T$$

$$\text{입력벡터 : } \mathbf{u} = [\delta_f, \delta_r, \rho_d]^T$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_S h_S}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{I_{zx}}{I_z} \\ 0 & -a_5 & 0 & -\frac{I_{xz}}{I_x} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_e \\ \ddot{y}_e \\ \dot{\psi}_e \\ \ddot{\psi}_e \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_1}{V} & -a_1 & \frac{a_2}{V} & -\frac{Y_\phi}{m} & 0 \\ 0 & \frac{a_3}{V} & -a_3 & \frac{a_4}{V} & -\frac{N_\phi}{I_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_\phi}{I_x} - a_5 g & \frac{C_\phi}{I_x} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e \\ \dot{y}_e \\ \psi_e \\ \dot{\psi}_e \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{C_{\phi f}}{m} & \frac{C_{\phi r}}{m} & -(V^2 + a_2) \\ \frac{l_f C_{\phi f}}{I_z} & \frac{l_r C_{\phi r}}{I_z} & -a_4 \\ 0 & 0 & a_5 V^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \rho_d \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

식 (2.57), (2.58), (2.59)의 특성상 쉽게 상태방정식을 구하기는 어렵다. 따라서, 먼저 $E\dot{\mathbf{x}} + F\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{u}$ 의 형태로 만들어 다음 식과 같이 역행렬을 구하는 단계를 거치는 것이 편리하다.

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (2.62)$$

단, $A = -E^{-1}F$, $B = E^{-1}G$ 이다. 그러므로, 각 행렬은 다음과 같이 된다. 간략히 나타내기 위하여 $K_d = mI_{xz}^2 + a_5 m_S h_S I_x I_z - I_x I_z m$ 로 대신한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

여기서, 각 계수들은 다음과 같다.

$$A_{22} = \frac{ma_1(I_x I_z - I_{xz}^2) + m_S a_3 h_S I_x I_z}{K_d V}$$

$$A_{23} = -\frac{ma_1(I_x I_z - I_{xz}^2) + m_S a_3 h_S I_x I_z}{K_d}$$

$$A_{24} = \frac{ma_2(I_x I_z - I_{xz}^2) + m_S a_4 h_S I_x I_z}{K_d V}$$

$$A_{25} = -\frac{(I_x I_z - I_{xz}^2)Y_\phi + m_S h_S I_{xz} N_\phi - m_S h_S I_x I_z \left(\frac{K_\phi}{I_x} - 9.81a_5 \right)}{K_d}$$

$$A_{26} = \frac{m_S h_S I_z C_\phi}{K_d}$$

$$A_{42} = \frac{ma_1 a_5 I_x I_{xz} - a_3 I_x I_z (a_5 m_S h_S - m)}{K_d V}$$

$$A_{43} = \frac{-ma_1 a_5 I_x I_{xz} + a_3 I_x I_z (a_5 m_S h_S - m)}{K_d}$$

$$A_{44} = \frac{ma_2 a_5 I_x I_{xz} - a_4 I_x I_z (a_5 m_S h_S - m)}{K_d V}$$

$$A_{45} = \frac{-a_5 I_x I_{xz} Y_\phi + I_x N_\phi (a_5 m_S h_S - m) + m I_x I_{xz} \left(\frac{K_\phi}{I_x} - 9.81 a_5 \right)}{K_d}$$

$$A_{46} = \frac{m I_{xz} C_\phi}{K_d}$$

$$A_{62} = \frac{ma_1 a_5 I_x I_z + ma_3 I_{xz} I_z}{K_d V}$$

$$A_{63} = -\frac{ma_1 a_5 I_x I_z + ma_3 I_z I_{xz}}{K_d}$$

$$A_{64} = \frac{ma_2 a_5 I_x I_z + ma_4 I_z I_{xz}}{K_d V}$$

$$A_{65} = -\frac{a_5 I_x I_z Y_\phi + m I_{xz} N_\phi - m I_x I_z \left(\frac{K_\phi}{I_x} - 9.81 a_5 \right)}{K_d}$$

$$A_{66} = \frac{m I_z C_\phi}{K_d}$$

$$B_{21} = -\frac{(I_x I_z - I_{xz}^2) + m_S h_S I_{xz} l_f}{K_d} C_{\alpha f}$$

$$B_{22} = \frac{-(I_x I_z - I_{xz}^2) + m_S h_S I_{xz} l_r}{K_d} C_{\alpha r}$$

$$B_{23} = \frac{m(I_x I_z - I_{xz}^2)(V^2 + a_2) + m_S a_4 h_S I_z I_{xz} - m_S a_5 h_S I_x I_z V^2}{K_d}$$

$$B_{41} = \frac{-a_5 I_{xz} I_x + (m_S a_5 h_S - m) I_x l_f}{K_d} C_{\alpha f}$$

$$\begin{aligned}
B_{42} &= -\frac{a_5 I_{xz} I_x + (m_s a_5 h_s - m) I_x l_r}{K_d} C_{\omega} \\
B_{43} &= \frac{m a_5 I_x I_{xz} (V^2 + a_2) - a_4 I_x I_z (a_5 m_s h_s - m) - m a_5 I_x I_{xz} V^2}{K_d} \\
B_{61} &= -\frac{a_5 I_x I_z + m I_{xz} l_f}{K_d} C_{\omega} \\
B_{62} &= \frac{-a_5 I_x I_z + m I_{xz} l_r}{K_d} C_{\omega} \\
B_{63} &= \frac{m a_5 I_x I_z (V^2 + a_2) + m a_4 I_z I_{xz} - m a_5 I_x I_z V^2}{K_d}
\end{aligned}$$

출력 방정식은 본 논문의 주요 목적인 차선 추종 오차 (y_s), 횡방향 가속도 \ddot{y}_e , 요우 각속도 오차 $\dot{\psi}_e$, 롤 각속도 $\dot{\phi}$ 의 최소화를 위하여 출력변수로 취한다. 한편, 차선 추종 오차를 계측하기 위한 여러 가지 방법이 알려져 있는데 여기서는 주변 환경에 대처 능력이 뛰어난 방법인 도로의 중심선에 연속적으로 묻어둔 Magnetic Marker와 차량의 CG 점에서 거리 l_s 에 위치한 위치 센서인 Magnetometer까지의 거리를 고려하여 모델링 하여 차선추종 오차를 계측하기로 한다.

$$y_s = y_e + l_s (\psi - \psi_d) \quad (2.64)$$

또한, 횡방향 가속도 출력을 구하기 위하여 식 (2.7)을 미분하고 상태변수 \ddot{y}_e 를 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= A_{22}\mathbf{y}_e + A_{23}\psi_e + (A_{24} - V)\psi_e + A_{25}\phi + A_{26}\phi \\
&+ B_{21}\delta_f + B_{22}\delta_r + B_{23}\rho_d
\end{aligned} \tag{2.65}$$

따라서, 전체 출력방정식 $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ 은

$$\begin{bmatrix} y_s \\ \mathbf{y} \\ \psi_e \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} - V & A_{25} & A_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e \\ \mathbf{y}_e \\ \psi_e \\ \phi \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \rho_d \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

여기서,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} - V & A_{25} & A_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

제 3 장 제어 이론

3.1 H_∞ 제어와 강인 제어의 개념

제어기 설계에서는 제어 대상의 거동을 전달함수 또는 미분방정식 등에 기초한 모델을 이용하게 된다. 모델은 제어대상의 특성을 정확히 나타내고 있지 않기 때문에 어느 특정 모델에 대해서는 성능이 양호해도 실제 시스템에서는 양호한 성능을 얻을 수 없는 경우가 있다. 그러므로, 어느 정도 모델 오차가 있어도 양호한 제어특성을 가질 수 있는 강인성이 요구된다. 현대제어이론으로는 모델 오차를 충분히 고려할 수 없으므로 고전제어에서 이용되어 왔던 위상여유, 게인여유 등의 개념을 도입하여 정리한 것이 H_∞ 제어 이론이다[14]-[15]. 비록 H_∞ 제어 이론이 그러한 모델 불확실성을 고려할 수 있었지만 완전히 다룰 수 없는 문제를 해결하기 위해 구조화 특이치(Structured Singular Value)에 근거한 제어 방법이 μ 제어 이론으로 제안되었다.

3.2 H_∞ 노름(Norm)

H_∞ 노름은 $\text{Re}(s) > 0$ 인 영역에서 해석적이며 동시에 유계인 전달함수 $G(s)$ 에 대해 존재하며 다음식으로 정의된다.

$$\|G(s)\|_\infty := \sup_{\text{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}(G(s)) = \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (3.1)$$

식 (3.1)로부터 H_∞ 노름은 전달함수 크기의 최대값이다. 따라서, 가중함수를

추가한 가중 감도(Weighted Sensitivity), 혼합 감도(Mixed Sensitivity)을 이용하여 시스템의 성능에 관한 사항을 나타내는데 H_∞ 노음을 사용할 수 있다. 또한, 최대 특이치(Maximum Singular Value)의 특성상 H_∞ 노음은 주어진 시스템에 관한 시간영역 응답이 어떤 특정 주파수를 가진 정현파 입력에 대하여 가장 나쁜 정상상태 계인을 나타내기도 한다.

H_∞ 노음은 시간영역에서는 다음과 같이 정의되며 주어진 입력 신호와 그 출력 신호의 유도 2-노음(Induced 2-Norm)으로 정의된다[16]. 즉, H_∞ 노음은 L_2 노음으로 유도되는 전달함수 $G(s)$ 에 관한 노음이다.

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = \max_{\|w(t)\|_2=1} \|z(t)\|_2 \quad (3.2)$$

H_∞ 노음은 시스템이 상태방정식으로 기술되어 있을 때 다음과 같은 Hamiltonian 행렬이 허수축 상에 고유치를 갖지 않도록 하는 가장 작은 γ 값을 구하여 얻을 수 있다[15].

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^T C & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^T C)^T \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

여기서, $R = \gamma^2 I - D^T D$ 이다.

H_∞ 노음을 구하는 방법은 γ -반복법이라고 불리는 다음과 같은 절차를 통하여 이루어진다.

1단계 : $a \leq \|G\|_\infty \leq b$ 를 만족하는 적당한 초기치 a, b 를 선정하고 구하고

실은 정밀도에 맞게 적당한 허용오차를 준다.

2단계 : $\gamma = \frac{a+b}{2}$ 을 계산한다.

3단계 : $\|G(s)\|_\infty \geq \gamma$ 이면 Hamiltonian 행렬이 허수축상에 고유치를 갖게 되므로 이것을 이용하여 다음을 구한다.

$$\|G\|_\infty < \gamma \text{ 이면 } b = \gamma$$

$$\|G\|_\infty \geq \gamma \text{ 이면 } a = \gamma$$

4단계: $|a-b|$ 가 허용오차를 넘는다면 다시 2단계로 돌아가 반복한다.

3.3 특이치 분해(Singular Value Decomposition)

행렬의 특이치는 행렬의 크기를 표현하는 중요한 수단이며, 이에 대응하는 특이벡터는 입력과 출력의 크기와 방향의 관계를 나타내는데 이용된다. 한편, 다변수 시스템의 경우에는 H_∞ 노음을 구하는데 특이치를 이용하여야 한다.

$A \in \mathcal{C}^{l \times m}$ 이라고 하면 특이치 분해는 다음과 같이 정의된다.

$$A = U \Sigma V^H \tag{3.4}$$

단, $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이고 0보다 크거나 같은 실수로 구성된 특이치를 갖는 대각

행렬이며, 행렬 U, V 는 기저가 정규직교(Orthonormal)인 벡터로 이루어진 유니타리(Unitary) 행렬이다. 정리하면 각각의 행렬은 다음과 같다.

$$U = [u_1 \ u_2 \ \Lambda \ u_l] \in \mathcal{C}^{l \times l}, \quad V = [v_1 \ v_2 \ \Lambda \ v_m] \in \mathcal{C}^{m \times m}$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \Lambda & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & \Lambda & \sigma_k \end{bmatrix}$$

여기서, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \Lambda \geq \sigma_k \geq 0$, $k = \min\{l, m\}$ 이다.

3.4 모델 불확실성(Model Uncertainty)

시스템의 불확실성은 여러 가지 원인에 기초한다. 예를 들어, 선형 시스템으로 근사화에 의해 파라미터 불확실성이 존재할 뿐만 아니라 동작점의 이동에 따른 파라미터 불확실성도 존재한다. 고주파수 영역에서는 시스템의 구조나 차수도 알 수 없을 경우가 있다. 또한, 입력과 출력 등을 측정하는 장치도 완전하지 않기 때문에 불확실성이 존재하게 된다. 시스템의 단순화를 위해 일부러 무시하게 되는 동적 특성에 관한 불확실성도 존재한다. 마지막으로, 설계된 제어를 현실에서 구현하기 위해 제어기 차수를 낮추는 경우 제어기 성능의 미소한 변화가 있을 것이다. 이러한 불확실성은 크게 두 가지로 구분할 수 있다.

3.4.1 모델 불확실성의 분류

1) 파라미터 불확실성(Parametric Uncertainty)

시스템의 구조는 알고 있지만 파라미터의 값을 정확히 모르는 반면 그 값이 존재하는 범위 $[a_{\min}, a_{\max}]$ 만을 알 수 있는 경우이다. 이러한 파라미터의 불확실성은 주로 다음과 같이 표현한다.

$$a_p = \bar{a}(1 + r_a \Delta) \quad (3.5)$$

여기서, \bar{a} 은 파라미터의 평균값이며, Δ 는 $|\Delta| \leq 1$ 을 만족하는 임의의 실상수 (Real Scalar)이다. 한편, r_a 은 다음과 같다.

$$r_a = (a_{\max} - a_{\min}) / (a_{\max} + a_{\min})$$

2) 비구조화된 불확실성(Neglected and Umodelled Dynamics Uncertainty)

시스템의 선형화시 일부러 무시한 동적 특성이나 시스템의 복잡성 때문에 파악하지 못한 특성을 비롯하여 고주파수 영역에서 발생할 수 있는 동적 특성들을 나타내는 불확실성이 해당되며 미분방정식으로는 정량화 하기 어렵기 때문에 주파수 영역에서 주로 기술하게 된다. 이러한 불확실성을 기술하는 방법에 대해서는 3.4.2 절에서 자세히 논한다.

3.4.2 불확실성의 표현방법

1) 덧셈적 불확실성(Additive Uncertainty)

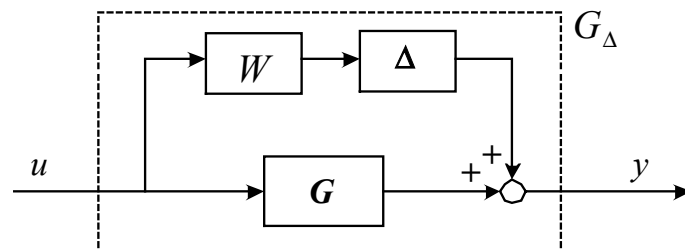


Fig. 3.1 Plant uncertainty with additive perturbation

Fig. 3.1의 입력신호와 출력신호 사이의 관계를 나타낸 전달함수는 식 (3.6)과 같다.

$$G_{\Delta} = G + W\Delta, \quad \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (3.6)$$

2) 곱셈적 불확실성(Multiplicative Uncertainty)

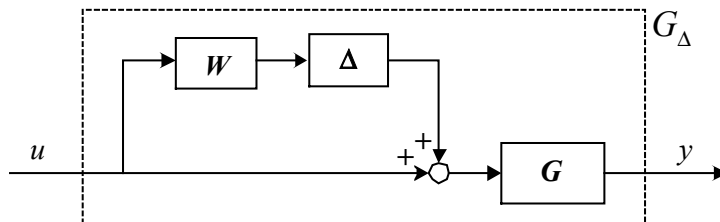


Fig. 3.2 Plant uncertainty with input multiplicative perturbation

Fig. 3.2의 입력신호와 출력신호 간의 관계를 나타낸 전달함수는 식 (3.7)과 같다.

$$G_{\Delta} = G(1+W\Delta), \quad \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (3.7)$$

3.4.3 상태공간에서의 불확실성 표현의 다른 방법

3.3.2 절에서 언급한 불확실성을 표현하는 방법 이외에도 파라미터 불확실성을 상태공간에서 쉽게 다룰 수 있는 방법이 있다.

k 개의 불확실한 파라미터를 가지는 시스템이 있다고 가정하면 그 선형시스템 $G_p(s)$ 은 상태공간모델로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$G_p(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i & B_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i B_i \\ \hline C_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i C_i & D_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i D_i \end{array} \right] \quad (3.8)$$

여기서, $A_0, A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B_0, B_i \in \mathbf{R}^{n \times n_u}$, $C_0, C_i \in \mathbf{R}^{n_y \times n}$, $D_0, D_i \in \mathbf{R}^{n_y \times n_u}$ 이다.

위의 식은 기지의 행렬 A_0, B_0, C_0, D_0 이 공칭모델 $G(s)$ 를 구성하며, 불확실성에 관한 구조적 정보는 행렬 A_i, B_i, C_i, D_i 에 포함되어 i 번째의 불확실한 파라미터 δ_i 가 어떻게 상태공간모델에 영향을 미치는지 반영하고 있다.

다음은 불확실성이 존재하는 시스템을 LFT 공식을 이용하여 상태모델로 표현하는 방법에 대해서 논하기로 한다. 이 방법은 미지의 파라미터를 피드백 게인으로 하여 모든 불확실성을 Fig. 3.3과 같이 공칭모델과 연결시킨다.

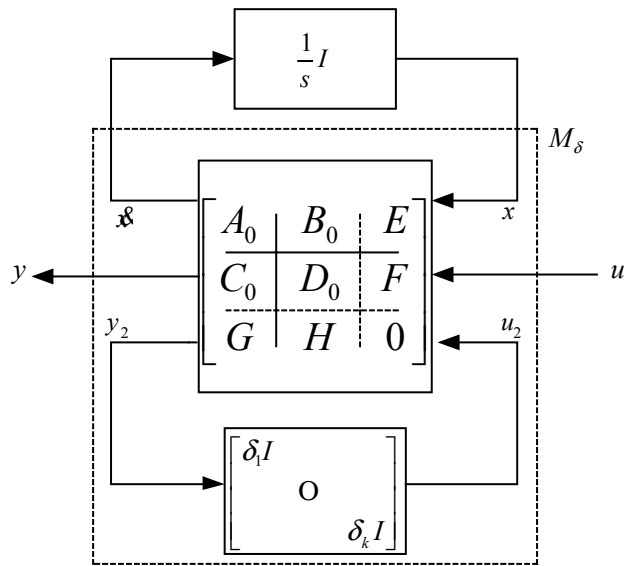


Fig. 3.3 LFT representation of state-space uncertainties

Fig. 3.3에서 불확실성을 가진 전체 시스템은 선형분수변환을 이용하여 표현

하면 식 (3.9)와 같다.

$$G_p(s) = F_u(M_\delta, (1/s)I) \quad (3.9)$$

여기서,

$$M_\delta := \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i & B_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i B_i \\ C_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i C_i & D_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i D_i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

이다. 그런데, 먼저 M_δ 에 대해서 $\Delta_p = \text{diag}(\delta_1 I, \delta_2 I, \mathbf{K}, \delta_k I)$ 에 관한 선형분수 변환을 구할 필요가 있다. 가능한 최소차원의 중복 블록으로 선형분수변환을 구하기 위하여, 모든 i 에 관하여 q_i 을 식 (3.11)인 행렬의 계수(Rank)라고 한다. 그러면, 식 (3.11)의 행렬은 특이치 분해에 의해 식 (3.12)와 같이 특이치 분해할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+n_y) \times (n+n_u)} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i \\ F_i \end{bmatrix} [G_i \quad H_i] \quad (3.12)$$

단, $E_i \in \mathbf{R}^{n \times q_i}$, $F_i \in \mathbf{R}^{n_y \times q_i}$, $G_i \in \mathbf{R}^{n \times q_i}$, $H_i \in \mathbf{R}^{n_u \times q_i}$ 이다. 따라서, 불확실성을 포함하는 행렬은 식 (3.13)와 같이 된다.

$$\delta_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i \\ F_i \end{bmatrix} [\delta_i I_{q_i} \quad H_i] \quad (3.13)$$

식 (3.13)을 이용한 M_δ 의 선형분수변환은 ,

$$M_\delta = F_l \left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, \Delta_P \right) \quad (3.14)$$

$$= \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & \Lambda & E_k \\ F_1 & \Lambda & F_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 I_{q_1} & & \\ & \mathbf{O} & \\ & & \delta_k I_{q_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1^H & H_1^H \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ G_k^H & H_k^H \end{bmatrix}$$

그러므로, 상태모델로 간략히 표현하면 전체 시스템은 식 (3.14)와 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ y \\ z_1 \\ \mathbf{M} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & E_1 & \Lambda & E_k \\ C_0 & D_0 & F_1 & \Lambda & F_k \\ G_1 & H_1 & 0 & \Lambda & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ G_k & H_k & 0 & \Lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ w_1 \\ \mathbf{M} \\ w_k \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.5 선형분수변환(Linear Fractional Transformation)

불확실성이 존재하는 모든 선형 시스템은 Fig. 3.4와 같이 일반적으로 나타낼 수 있으며, 강인제어이론을 적용하기에 유용한 구조임이 알려져 있다. Fig. 3.4의 왼쪽 블록선도는 제어기 설계시에 사용되고, 오른쪽 블록선도는 설계된 제어기를 불확실성이 존재하는 상황에서 강인안정성과 성능을 해석할 경우에 유용하다.

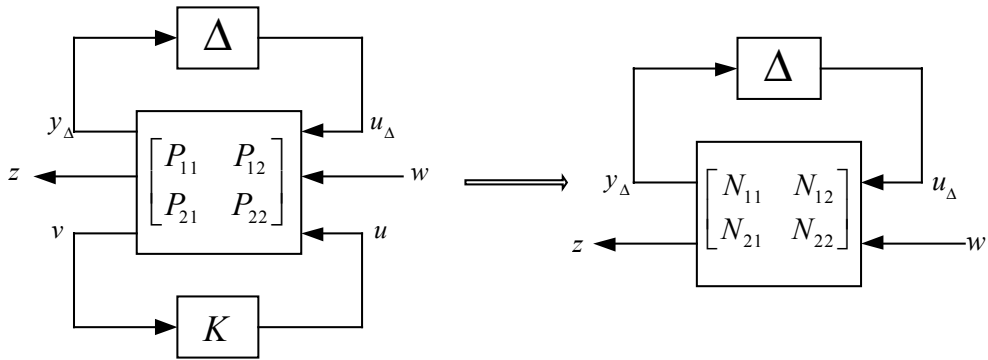


Fig. 3.4 General control configuration with model uncertainty

선형분수변환은 먼저 공칭 모델 P 와 제어기 K 을 담은 아래 선형분수변환 (Lower LFT)과 제어기 K 을 포함하는 시스템 N 과 불확실성 Δ 을 담은 위 선형분수변환(Upper LFT)이 있다.

Lower LFT

$$F_l(P, K) := P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (3.16)$$

Upper LFT

$$F_u(N, \Delta) := N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} \quad (3.17)$$

여기서, 각 행렬은 행렬연산이 가능한 적당한 차원을 가지는 것으로 가정한다.

3.6 H_∞ 제어기 설계 방법

Fig. 3.5에서 H_∞ 최적제어문제(Optimal Control Problem)는 식 (3.18)을 최소

화하는 모든 안정화 제어기 K 을 구하는 것이다.

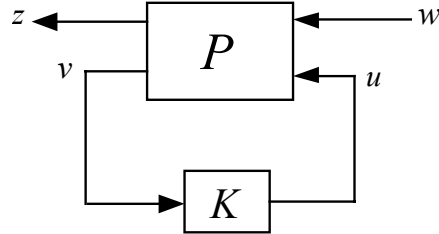


Fig. 3.5 General control configuration

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(F_l(P, K)(j\omega)) \quad (3.18)$$

그런데, 실용적인 면에서 H_∞ 최적제어문제를 풀기 어려울 뿐만 아니라 구할 필요성이 그다지 많지 않다. 오히려, 준최적제어문제(Suboptimal Control Problem)를 수치적으로 구하기 쉽기 때문에 H_∞ 최적제어문제는 준최적제어문제를 반복해서 구함으로써 해결할 수 있다. γ_{\min} 을 모든 안정화 제어기 K 에 관한 $\|F_l(P, K)\|_\infty$ 의 최소값이라면 H_∞ 준최적제어문제는 $\gamma > \gamma_{\min}$ 으로 주어진 γ 에 대하여 식 (3.19)을 만족하는 안정화 제어기 K 을 찾는 것이다.

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (3.19)$$

이것은 Doyle이 창안한 알고리즘을 이용하여 효과적으로 풀 수 있다[17]. 그러므로, 값 γ 을 계속 줄어나감으로써 최적제어기를 구할 수 있게 된다.

Fig. 3.5의 일반적인 제어기 블록선도에 관한 H_∞ 최적제어문제를 살펴보기로 한다. 먼저, 일반화 시스템 P 은 상태공간표현이 식 (3.20)와 같이 되며, H_∞ 최적제어문제를 풀기 위하여 요구되는 조건을 만족한다고 가정한다[19].

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (3.20)$$

일반화 시스템 P 에 대한 전제 조건이 만족된 다음, 식 (3.19)을 만족하는 안정화 제어기 K 가 존재하기 위해서는 다음에 나오는 두 개의 Riccati 방정식의 해가 존재해야 한다.

$X_\infty \geq 0$ 은 식 (3.21)의 대수 Riccati 방정식의 해이다.

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0 \quad (3.21)$$

단, $\text{Re}(\lambda_i [A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty]) < 0, \quad \forall i$ 이다.

$Y_\infty \geq 0$ 은 식 (3.22)의 대수 Riccati 방정식의 해이다.

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty = 0 \quad (3.22)$$

단, $\text{Re}(\lambda_i [A + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)]) < 0, \quad \forall i$

그리고, 식 (3.21)와 (3.22)은 식 (3.23)을 만족해야 한다.

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (3.23)$$

식 (3.21), (3.22), (3.23)의 조건으로부터 모든 안정화 제어기 K 는 다음과 같이 구해진다.

$$K = F_l(K_c, Q) \quad (3.24)$$

여기서,

$$K_c(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right] \quad (3.25)$$

식 (3.25)의 $K_c(s)$ 행렬의 각 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_\infty &= -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^T, \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \\ A_\infty &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \end{aligned}$$

또한, $Q(s)$ 는 $\|Q\|_\infty < \gamma$ 을 만족하는 임의의 안정한 전달 함수이다. 따라서, $Q(s)=0$ 에 대해서 일반화 시스템 P 의 상태변수의 개수와 같은 차수의 제어기를 구할 수 있으며 다음 식으로 표현된다.

$$K(s) = K_{c_{11}}(s) = -Z_\infty L_\infty (sI - A_\infty)^{-1} F_\infty \quad (3.26)$$

3.7 구조화 특이치(Structured Singular Value)

구조화 특이치 μ 는 특이치 $\bar{\sigma}$ 의 일반화로 강인 안정성과 성능에 관한 필요 충분조건을 구하기 위해 사용된다.

수학적으로 정의하면, 행렬 $M \in \mathcal{C}^{n \times n}$ 에 대하여 구조화 특이치 $\mu_\Delta(M)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_{\Delta}(M) := \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(): \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (3.27)$$

여기서,

$$\Delta = \left\{ \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \mathbf{K}, \delta_S I_{r_S}, \mathbf{K}, \Delta_1, \mathbf{K}, \Delta_F) : \delta_i \in \mathcal{C}, \Delta_j \in \mathcal{C}^{m_j \times m_j} \right\} \quad (3.28)$$

$I - M\Delta$ 을 특이로 하는 $\Delta \in \Delta$ 가 없을 때는 $\mu_{\Delta}(M) := 0$ 로 정의한다.

구조화 특이치 μ 에는 여러 가지 특성들이 있다[20]. 그 중에서 μ -synthesis 에서 사용될 한계치(Bound)에 관한 성질을 알아보기로 한다.

Δ 와 차원이 같은 유니타리 행렬 U 의 집합을 \mathcal{U} 라고 정의하고, $D\Delta = \Delta D$ 을 만족하는 행렬 D 의 집합을 \mathcal{D} 라고 정의하기로 한다. 그러면, μ 는 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$\max_{U \in \mathcal{U}} \rho(UM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (3.29)$$

식 (3.29)의 하계는 항상 μ 와 같지만 $\rho(UM)$ 은 여러 개의 국소 최대값을 가지기 때문에, 구조화 특이치 μ 에 대한 하계(Lower Bound)만을 주게 된다. 한편, 상계(Upper Bound)는 대개 μ 와 일치하지 않지만 Δ 안에 3개 이하의 블록이 존재하면 μ 와 같다. 이 부등식에 관한 자세한 증명은 Doyle의 논문을 참조하기 바란다[18].

3.8 제어 모델의 강인 안정성과 성능 해석

3.8.1 강인 안정성(Robust Stability)

강인성의 해석의 도구로써의 μ 의 가장 중요한 응용은 주파수 영역에서의 응용이다. $G(s)$ 을 실유리, 안정한 다입출력 시스템의 전달함수라고 가정한다. 구별하기 위하여, 전달함수 G 가 q_1 개의 입력과 p_1 개의 출력을 가진다고 한다. Δ 는 식 (3.28)과 같은 구조를 하고 있으며 차원은 $\Delta \in \mathcal{C}^{q_1 \times p_1}$ 이라고 가정한다. 여기서는 G 로 피드백되는 불확실성을 고려한다. 이 불확실성은 블록대각구조의 집합 Δ 을 가지는 동적 시스템이다.

먼저, $\mathcal{M}(\Delta)$ 은 Δ 와 같은 블록대각구조를 가지는 식(3.30)과 같은 안정유리전달함수의 집합이라고 정의한다.

$$\mathcal{M}(\Delta) := \{ \mathbf{A}(\cdot) \in \mathcal{RH} : \mathbf{A}(s_0) \in \Delta, \forall s_0 \in \bar{\mathcal{C}}_+ \} \quad (3.30)$$

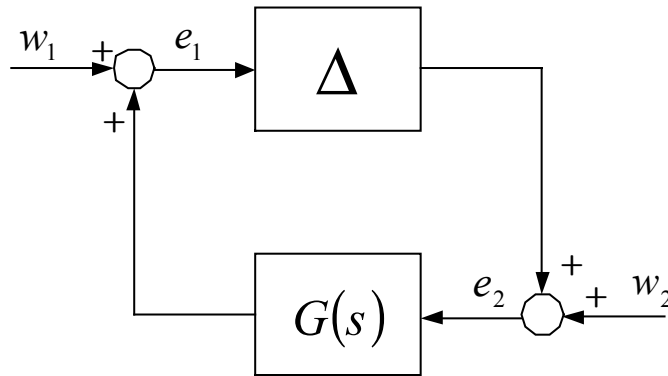


Fig. 3.6 Robust stability of system with uncertainty

$\zeta > 0$ 이라면 Fig. 3.6에 표시한 루프가 $\|\Delta\|_\infty < 1/\zeta$ 를 만족하는 모든 $\Delta(\cdot) \in \mathcal{M}(\Delta)$ 에 대하여 Well-Posed하고 내부안정이기 위한 필요충분조건은 $\sup_{\omega \in \mathcal{R}} \mu_\Delta(G(j\omega)) \leq \zeta$ 이다. 따라서, μ 의 주파수 응답선도의 최대값은 루프가 안정

이기 위한 불확실성의 크기를 결정하게 된다.

3.8.2 강인 성능(Robust Performance)

보통 안정성은 불확실성에 대해서만 강인해야 하는 폐루프 시스템의 성질은 아니다. 일반적으로 제어계에 대해서 외란이 작용하여 추종오차등이 발생한다. 불확실성에 의해 외란이 오차신호에 미치는 영향이 증가할 가능성이 있다. 대부분의 경우, 시스템이 불안정하게 되기 훨씬 전에 폐루프 시스템의 성능이 받아들일 수 없을 만큼 저하하게 된다. 이로 인하여, 강인 성능을 조사할 필요성이 있다.

우선, G_p 는 실유리, 안정이면서 Proper한 전달함수로 $q_1 + q_2$ 인 입력과 $p_1 + p_2$ 인 출력을 가지며 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다고 가정한다.

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

여기서, 예를 들면 G_{11} 은 입력 q_1 과 출력 p_1 을 가지게 된다. 강인 성능을 해석하기 위하여 식 (3.28)과 같이 $\Delta \subset \mathcal{C}^{q_1 \times p_1}$ 을 블록구조로 가정하고, 식 (3.31)과 같이 확대 블록구조를 만든다.

$$\Delta_p := \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_f \end{bmatrix} : \Delta \in \Delta, \Delta_f \in \mathcal{C}^{q_2 \times p_2} \right\} \quad (3.31)$$

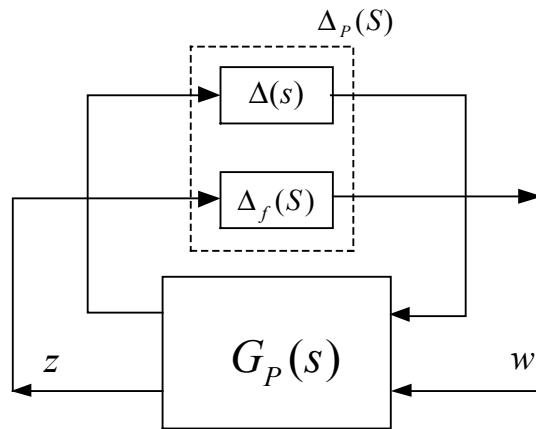


Fig. 3.7 Robust performance of system with uncertainty

$\zeta > 0$ 이라면 Fig. 3.7에 표시한 루프가 $\|\mathbf{\Delta}\|_{\infty} < 1/\zeta$ 을 만족하는 모든 $\Delta(s) \in M(\mathbf{\Delta})$ 에 대하여 Well-Posed하고 내부안정이면서 $\|F_u(G_p, \mathbf{\Delta})\|_{\infty} \leq \zeta$ 이 되기 위한 필요충분조건은 $\sup_{\omega \in \mathcal{R}} \mu_{\Delta_p}(G_p(j\omega)) \leq \zeta$ 이다.

3.9 μ 제어기 설계 방법

구조화 특이치 μ 는 주어진 제어기에 대해 강인 성능을 평가할 때 매우 유용한 방법을 제공한다. 한편, 제어기 설계문제에서는 μ 최적 제어기에 관한 직접 해법은 찾아내지 못하고 있다. 하지만, 불확실성에 대해 $D-K$ 반복법이라는 유용한 방법이 있으며, 이것은 H_{∞} 제어기 설계와 μ -Analysis의 조합으로 이루어진다.

$D-K$ 반복법($D-K$ Iteration):

식 (3.27)에서 스케일된 구조화 특이치 μ 의 상계가 시작점이 되며 이 상계의

주파수에 관한 최대값을 최소화 시키는 제어기를 찾는 것이다. 즉, 수식적으로는 다음과 같이 표현된다.

$$\min_K \left(\min_{D \in \mathcal{D}} \|DN(K)D^{-1}\|_{\infty} \right) \quad (3.32)$$

반복법을 적용하기 위해서는 먼저 적당한 구조를 가진 안정한 전달함수 행렬 $D(s)$ 을 선택하는데, 단위 행렬도 좋은 선택이 될 수 있다. $D-K$ 반복법의 자세한 절차는 다음과 같다.

1 단계(K 단계) :

고정된 $D(s)$ 에 대해 다음과 같은 H_{∞} 제어기를 설계한다.

$$\min_K \|DN(K)D^{-1}\|_{\infty}$$

2 단계(D 단계) :

고정된 N 에 대하여 각 주파수에서 $\bar{\sigma}(DND^{-1}(j\omega))$ 을 최소화 시키는 $D(j\omega)$ 을 구한다.

3 단계 :

$D(j\omega)$ 의 각 요소의 크기를 안정하고 최소 위상인 전달함수 $D(s)$ 로 맞춘 다음 1단계로 돌아간다.

반복법은 만족스러운 성능이 나올 때까지 계속한다. 즉, $\|DND^{-1}\|_{\infty} < 1$ 이거나 H_{∞} 노음이 더 이상 작아지지 않을 때까지 계속한다.

제 4 장 제어기 설계

4.1 제어기에 사용할 차량 모델의 선정

이번 절에서는 제 2 장에서 유도한 3자유도 차선추종 모델을 이용한 제어기 설계에 필요한 각 파라미터를 선정하고 파라미터 변동 및 주파수 영역에서의 오차를 구하기로 한다.

차량은 80 [km/hr]의 속도로 주행하고 있는 것으로 가정하고 차량의 중심점 CG 에서 차선 추종 오차를 측정하는 센서까지의 거리 l_s 를 1.4 [m]로 가정한다. 본 논문에 사용될 차량의 각 파라미터는 일반 승용차를 기준으로 하여 선정하며 각각의 단위와 크기는 Table. 1과 같다.

M_s	900 [kg]	I_x	500 [kg·m ²]	C_ϕ	2100 [N·sec/m]
M_u	167 [kg]	I_{xz}	4750 [kg·m ²]	c	0.14 [m]
l_f	1.15 [m]	I_z	2130 [kg·m ²]	e	0.4 [m]
l_r	1.5 [m]	K_ϕ	65690 [N/m]	h_s	0.55 [m]
$\frac{\partial \alpha_{sf}}{\partial \phi}$	0.07	$\frac{\partial \alpha_{sr}}{\partial \phi}$	-0.095	$\frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \right)$	0.62(0.97)

Table. 1 Parameter values for the vehicle model

한편, 보통 캠버 트러스트 계수 C_{cf} 와 C_{cr} 은 코너링 강성의 약 1/10으로 작다.

따라서, 실제로는 캠버 트러스트 계수에도 섭동(Perturbation)이 발생하지만 극히 미소하므로 본 논문에서는 공칭 코너링 강성의 1/10으로 가정한다.

그런데, 차량은 차체의 무게증가, 불규칙한 노면, 바람 등에 의해 코너링 포스를 포함하여 차량의 주행 특성에 영향을 받게 된다. 이 중에서 차량의 안정성 및 승차감에 가장 큰 영향을 미치는 코너링 강성의 변화를 전륜에 32%, 후륜에 34% 존재하는 것으로 가정하여 이에 대하여 강인 성능을 보장하도록 제어기를 설계한다. 이것은 파라미터 불확실성을 표현하는 방법인 식 (4.1)과 같이 곱셈적 불확실성으로 나타낸다.

$$C_{cf} = \bar{C}_{cf}(1 + 0.32\delta_1), C_{cr} = \bar{C}_{cr}(1 + 0.34\delta_2) \quad (4.1)$$

그리고, 차량이 주어진 곡률을 가진 차선을 따라 주행할 때 제어기 출력신호는 조향 액츄에이터(Steering Actuator)로 들어가며, 여기서 나오는 구동력에 의해 실제 타이어에 조향각을 주게 된다. 그런데, 본 논문에서는 액츄에이터의 동역학 모델을 구하지 않고, 식 (4.2)와 같이 저주파수 영역에서 40%, 고주파수 영역에서 100%의 불확실성이 입력측에 존재하는 것으로 가정하여 제어기를 설계함으로써 전체적으로 제어 대상이 복잡해지지 않으면서 원하는 성능을 얻도록 한다.

$$W_f = W_r = \frac{4\left(\frac{1}{4}s + 1\right)}{s + 10} \quad (4.2)$$

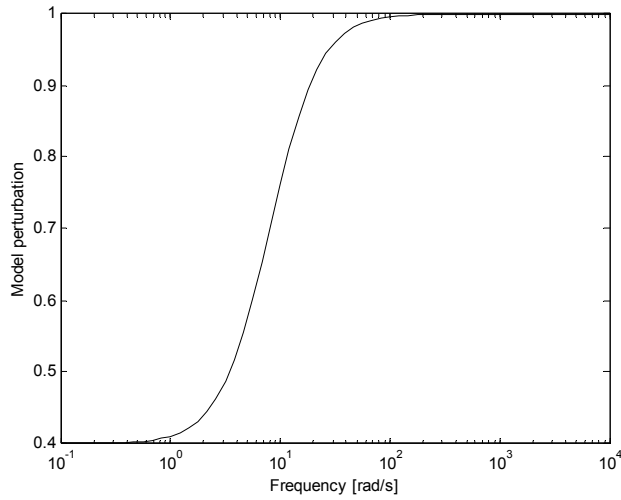


Fig. 4.1 Input uncertainty of vehicle model

4.2 가중함수의 선정

다변수 제어 시스템에서는 어떤 입력 신호가 다른 입력신호보다 중요한 경우가 있으며, 신호들의 단위 또한 다르다. 이런 문제들 때문에 가중함수는 다변수 제어 시스템에서 중요한 역할을 담당하게 된다. 즉, 가중함수는 제어기 설계의 목적과 외란 및 센서 잡음 등에 관한 제반 사항을 반영하게 된다. 본 절에서는 이런 가중 함수들을 선정하기로 한다.

먼저, 곡률 입력에 대해 살펴보기로 한다. 본 논문에서 고려하고 있는 곡률입력은 일종의 구형파로 가정한다. 따라서, 고주파수 영역에서 큰 가중치를 둘 필요는 없다. DC 부분이 1/150이며 전달함수로 표시하면 식 (4.3)와 같다. 이것은 곡률 반경이 150 [m]이상인 경우를 고려하여 선정한 것이다.

$$w_p = \frac{(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}{150(8s^3 + 12s^2 + 6s + 1)} \quad (4.3)$$

요우 각속도 오차의 동적 특성 때문에 5 [Hz] 부근에서 감쇠가 작아진다. 이로 인해, 이 주파수보다 높은 영역에서는 횡방향 오차 y_s 또한 커지게 된다. 따라서, 이 주파수보다 높은 영역에서는 y_s 에 대한 가중치를 낮추어야 한다. 그런데, 곡률입력이 저주파수이기 때문에 저주파수 영역에서 횡방향 오차가 5 [cm] 이하가 되도록 하기 위해 DC 계인을 20으로 하였다. 또한, 횡방향 가속도 및 요우 각속도 오차의 가중함수도 이러한 사실에 근거하여 적절히 선정하였고, 롤 각속도의 주파수 응답 특성이 5 [Hz] 부근에서 커짐을 고려하여 선정하였다.

$$w_{y_s} = \frac{20(0.01s+2)}{(0.5s+2)} \quad w_{\ddot{\phi}} = \frac{0.5(0.01s^2+0.5s+5)}{(s^2+5s+5)}$$

$$w_{\dot{\phi}} = \frac{2(0.01s^2+0.5s+5)}{(s^2+5s+5)} \quad w_{\phi} = \frac{s+0.1}{s^2+10s+25}$$

한편, 센서로부터 들어오는 피드백 신호는 고주파수 영역에서 잡음 때문에 상당히 문제가 된다. 이러한 잡음 특성을 억제하기 위하여 하이패스(High-pass) 특성을 가지는 가중 함수를 선정하고 각 신호에 대한 가중 함수를 대각행렬구조로 만든다. 그리고 전후 각 타이어의 조향각이 40°를 넘지 않도록 하기 위하여 가중치를 다음과 같이 선정한다. 실제 이러한 가중함수들은 원하는 주파수 응답특성과 시간 응답 특성이 나올 때까지 반복하여 구하게 된다.

$$w_{ny_s} = \frac{0.5(s+10)}{(s+500)}, \quad w_{n\ddot{\phi}} = \frac{0.5(s+10)}{(s+500)}$$

$$w_{n\dot{\phi}} = \frac{0.4(s+10)}{(s+500)}, \quad w_{n\phi} = \frac{0.3(s+10)}{(s+500)}$$

센서에 대한 가중함수: $W_n = \text{diag}(w_n, w_n, w_n, w_n)$

조향 입력에 대한 가중치: $w_{uf} = w_{ur} = 57.3/40$

4.3 제어기 설계를 위한 상태방정식 표현

이번 절에서는 차량 파라미터의 변동과 입력측의 불확실성을 포함하는 모델을 구하고 여기에 4.2 절에서 선정한 가중함수를 추가하여 μ 최적 제어기를 구하기 위해 전체적인 제어 모델을 구하기로 한다.

외부에서 들어오는 원하는 곡률입력과 제어기에서 나오는 조향 입력이 확대된 공칭 모델의 입력이 되며, 입력측에 액추에이터와 모델의 불확실성이 존재하는 전체적인 블록선도는 Fig. 4.2과 같다.

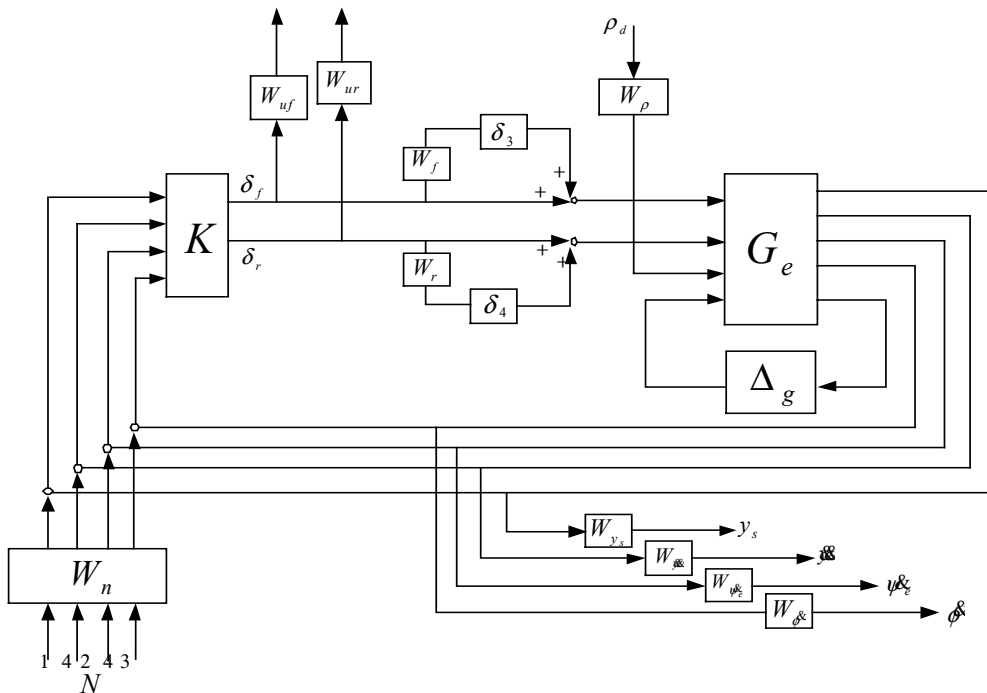


Fig. 4.2 Overall block diagram for controller synthesis

먼저, Table. 1의 각 파라미터를 식 (2.63)와 (2.67)에 대입하여 식 (2.62), (2.66)로 표현한다. 그리고, 3.3.3 절에서 다룬 상태공간에서의 파라미터 불확실성을 피드백 형태로 만든다. 즉, 식 (3.14)와 같이 표현한다. 공칭 모델 및 코너링 강성의 변동 δ_1, δ_2 에 대한 각 행렬은 다음과 같다.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8.2856 & 184.1234 & 1.9187 & -14.9935 & 0.0944 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8973 & -19.9405 & 0.1542 & 14.4551 & 0.4537 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3219 & -7.1522 & 3.3658 & 0.8121 & 0.2034 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 88.1209 & 96.0025 & -451.1614 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12.5803 & -7.3602 & 3.4270 \\ 0 & 0 & 0 \\ -32.2728 & 25.1206 & 74.7946 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8.2856 & 184.1234 & -20.3023 & -14.9935 & 0.0944 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 88.1209 & 96.0025 & -451.1614 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2689 & 28.1987 & -1.4593 & 0.2256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1812 & -4.0257 & 0.2083 & -0.0322 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4647 & -10.3273 & 0.5344 & -0.0826 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 28.1987 & 0 & -32.4285 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4.0257 & 0 & 4.6300 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10.3273 & 0 & 11.8764 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2689 & 28.1987 & -1.4593 & 0.2256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 28.1987 & 0 & -32.4285 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4688 & 32.6409 & 2.2033 & -6.2670 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1126 & -2.5025 & 0.1689 & 0.4805 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3843 & 8.5410 & 0.5765 & -1.6399 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.6409 & 48.9613 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5025 & -3.7537 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.5410 & 12.8115 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4688 & 32.6409 & 2.2033 & -6.2670 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.6409 & 48.9613 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

식 (3.12)의 특이치 분해를 이용하여 선형 분수 변환을 하면 각 섭동에 대하여 계수가 1이므로 식 (4.4)과 같이 된다.

$$G_e = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & E_1 & E_2 \\ C_0 & D_0 & F_1 & F_2 \\ G_1 & H_1 & 0 & 0 \\ G_2 & H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

파라미터 섭동을 포함하는 차량모델의 상태공간표현 행렬은 수치적으로 다음과 같다.

$$G_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8.2856 & 184.1234 & 1.9187 & -14.9935 & 0.0944 & 88.1209 & 96.0025 & -451.1614 & -0.6813 & -0.6943 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8973 & -19.9405 & 0.1542 & 14.4551 & 0.4537 & -12.5803 & -7.3602 & 3.4270 & 0.0973 & 0.0531 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3219 & -7.1522 & 3.3658 & 0.8121 & 0.2034 & -32.2728 & 25.1206 & 74.7946 & 0.2495 & -0.1817 \\ \hline 1 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8.2586 & 184.1234 & -20.3023 & -14.9935 & 0.0944 & 88.1209 & 96.0025 & -451.1614 & -0.6813 & -0.6943 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1.8625 & -41.3907 & 2.1420 & -0.3311 & 0 & -41.3907 & 0 & 47.5994 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1154 & -47.0114 & -3.1554 & 9.0261 & 0 & 0 & -47.0114 & -70.5170 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 강인 제어기 설계

이번 절에서는 모델 불확실성이 존재하는 상황에서 3.8 절에서 언급한 강인 안정성과 성능을 보장하고 일정 속도로 주행하는 차량이 계단 입력으로 들어오는 곡률 입력에 대하여 횡방향 차선 추종오차가 최대 5 [cm]를 벗어나지 않으면서 승차감에 영향을 미치는 횡방향 가속도 응답, 요우 및 롤 각속도 응답이 2초 이내로 빨리 0으로 수렴하도록 하는 제어기를 구하고자 한다. Table. 2는 시간응답 특성을 만족하는 μ 강인 제어기를 설계하기 위한 기준이다.

변 수	조 건
횡방향 오차	$y_e \leq 5$ [cm]
횡방향 가속도	$\ddot{y}_e \leq 0.4g$ [m/sec ²]
요우 각속도	$\dot{\psi}_e \leq 6$ [deg/sec]
롤 각속도	$\dot{\phi}_e \leq 4$ [deg/sec]

Table. 2 Design Specification

이러한 기준에 근거하여 시간응답을 만족하는 제어기를 구하기 위하여 여러 번

반복하여 가중함수를 선정하였다. 최종적으로 4.2 절에서 제시한 가중함수를 이용하여 제어를 설계하였으며 3번의 $D-K$ 반복에 의해 Table. 3와 같은 결과를 얻었다. 그러나, 이것은 제어기의 차수가 높아 실제적으로 구현하기가 어려우므로 행켈 노름 근사법(Hankel Norm Approximation)에 의해 제어기 축소(Controller Reduction)를 하여 응답 특성이 크게 변하지 않는 15차의 제어를 설계하였다.

Iteration Number	1	2	3
Controller Order	22	34	38
Gamma Achieved	44.924	1.446	0.987
Peak μ Value	12.497	1.369	0.982

Table. 3 Iteration Summary

제 5 장 주파수 영역 해석과 시간 영역 해석

제 4 장에서 설계된 제어기의 안정성 및 성능에 대해서 조사하기로 한다. 또한, 본 장에서의 제어기는 제어기 축소(Controller Reduction)을 통해 얻은 제어기를 기초로 하여 해석한다.

5.1 주파수 영역 해석

블록 대각 불확실성이 $\|\mathbf{\Delta}\|_{\infty} \leq 1$ 을 만족하는 식 (3.16)에 대하여 강인 성능 조건이 모든 불확실성에 대해 $\|F\|_{\infty} \leq 1$ 이라면 공칭 안정성(NS), 공칭 성능(NP), 강인 안정성(RS), 강인 성능(RP)은 다음과 같이 요약할 수 있다.

NS $\Leftrightarrow N$ 이 내부안정(Internal Stable)

NP $\Leftrightarrow \bar{\sigma}(N_{22}) = \mu_{\Delta_p} < 1, \forall \omega$ 이면서 NS

RS $\Leftrightarrow \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1, \forall \omega$ 이면서 NS

RP $\Leftrightarrow \mu_{\tilde{\Delta}}(N) < 1, \forall \omega, \tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix}$ 이면서 NS

여기서, $\mathbf{\Delta}$ 은 블록대각행렬(Block Diagonal Matrix)이며, $\mathbf{\Delta}_p$ 은 완전복소행렬(Full Complex Matrix)이다.

그런데, 구조화 특이치는 노움은 아니지만 μ 의 최대값을 Δ -노움으로 생각할 경우 편리할 때가 있다. 즉, 블록대각행렬 $\mathbf{\Delta}$ 을 가지는 안정한 전달함수 행렬 $H(s)$ 가 있다고 하면 다음과 같은 관계를 정의할 수 있다.

$$\|H(s)\|_{\Delta} := \max_{\omega} \mu_{\Delta}(H(j\omega)) \quad (5.1)$$

식 (5.1)에 근거하여 공칭안정시스템(Nominally Stable System)에 적용하면 다음과 같은 관계를 얻게 된다.

$$\text{NP} \Leftrightarrow \|N_{22}\|_{\infty} < 1, \quad \text{RS} \Leftrightarrow \|N_{11}\|_{\Delta} < 1, \quad \text{RP} \Leftrightarrow \|N\|_{\tilde{\Delta}} < 1 \quad (5.2)$$

본 논문에 사용된 차량의 공칭 모델은 원점에 2개의 극점이 존재한다. 따라서, 이 불안정한 시스템에 안정화 제어기를 추가하여 전체적인 시스템을 안정화 시키고 동시에 성능을 보장함을 살펴보기 위해, 식 (5.2)을 이용하여 차량 모델의 안정성 및 성능을 주파수 영역에서 해석해 본다.

Fig. 5.1, Fig. 5.2, Fig. 5.3과 Table. 4로부터 설계된 제어기가 공칭 시스템뿐만 아니라 불확실성이 존재하는 시스템에 대해서도 안정성을 보장하며 성능을 발휘하기 위한 조건인 식 (5.2)을 만족함을 알 수 있다.

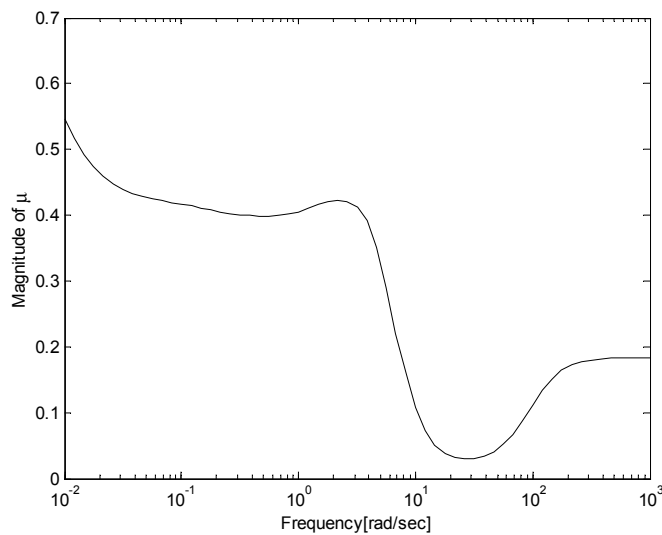


Fig. 5.1 Nominal performance (μ plot)

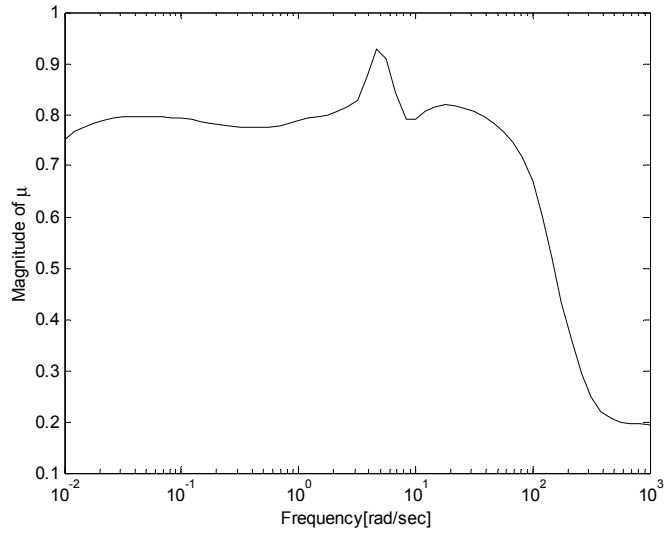


Fig. 5.2 Robust stability (μ plot)

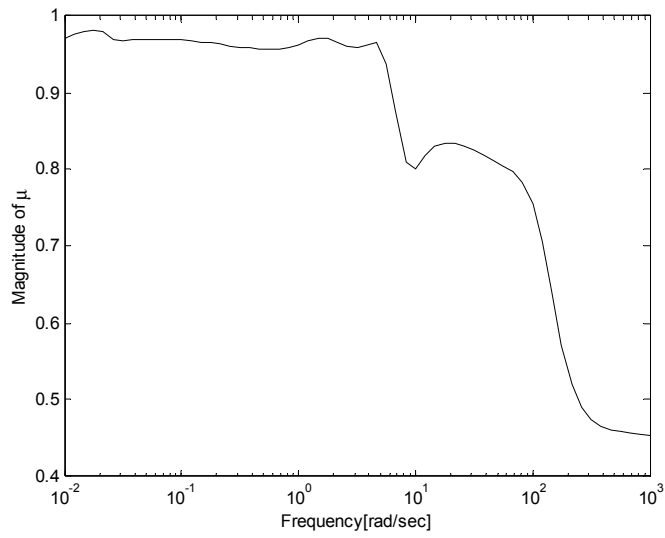


Fig. 5.3 Robust performance (μ plot)

NP Peak μ Value	0.5447
RS Peak μ Value	0.9265
RP Peak μ Value	0.9811

Table. 4 Peak μ values of NP, RS and RP

5.2 시간 영역 해석

이번 절에서는 원하는 곡률 입력에 대한 차량의 시간응답을 알아보기로 한다. 차량은 노면의 불규칙성, 하중의 변화, 바람, 경사로 등 여러 환경에서 운전된다. 이러한 요소들을 불확실성으로 고려하여 제어기를 설계했다. 따라서, 시간영역 해석에서도 본 논문이 대상으로 하는 차량의 가장 좋지 못한 경우와 공칭 모델의 경우에 대해서 시뮬레이션 하기로 한다.

차량은 Fig. 5.4와 같은 곡률 입력에 따라 차선을 따라가고 있다. 시간 간격을 포함하는 곡률 입력에 대한 그래프는 Fig. 5.5이다. 이와 같은 계단 입력의 형태로 주어진 곡률 입력에 대하여 각 출력 변수들의 시간에 따른 응답을 다음에 나오는 그래프들로 표현했으며, 특히 조향각과 외란 및 도로의 곡률에 영향을 받는다고 알려져 있는 Fig. 5.6의 y_s 와 차량의 중심점에서의 오차를 나타내는 Fig. 5.7의 y_e 모두 설계 조건을 만족함을 확인할 수 있다. Fig. 5.8은 횡방향 가속도 응답을 나타내며 최대 크기 0.25g을 보이고 있는데 이것으로부터 차선을 추종하는데 큰 선회력이 요구하지 않음을 알 수 있다. 한편, 일종의 외란인 곡률 입력에 대한 외란 제거 성능이 2초 정도로 빠른 특성을 가지면서 조종 안정성과 승차감에 미치는 영향을 나타내는 요우 각속도 오차와 롤 각속도도 각각 4~6 [deg/sec] 이내로 낮출 수 있었다. Fig. 5.11과 Fig. 5.12로부터는 이 모든 조건

을 만족하는데 필요한 입력 에너지와 관계 있는 조향각이 전후륜 모두 약 $2\sim 3^\circ$ 정도에 분포하고 있음을 알 수 있다.

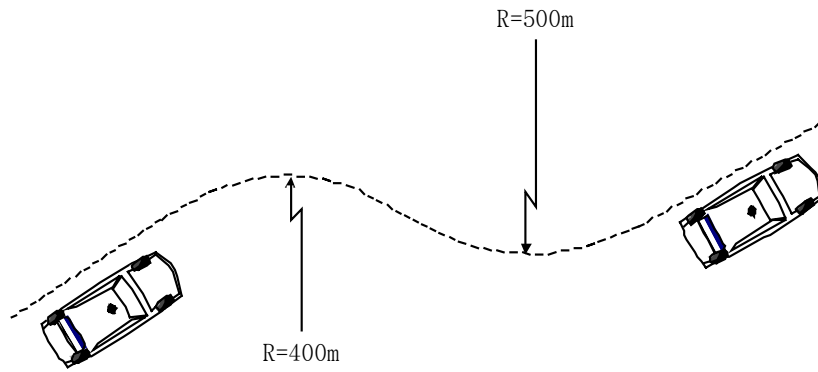


Fig. 5.4 Vehicle maneuver along the desire road path

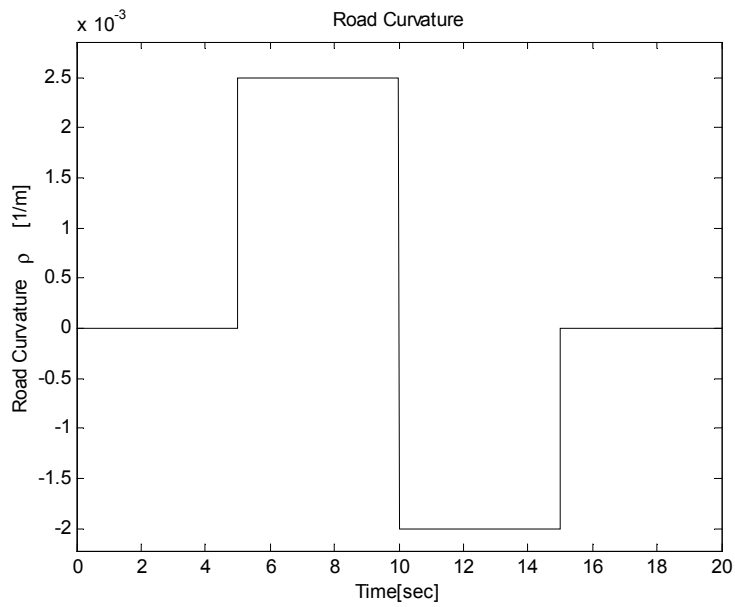


Fig. 5.5 Road curvature input

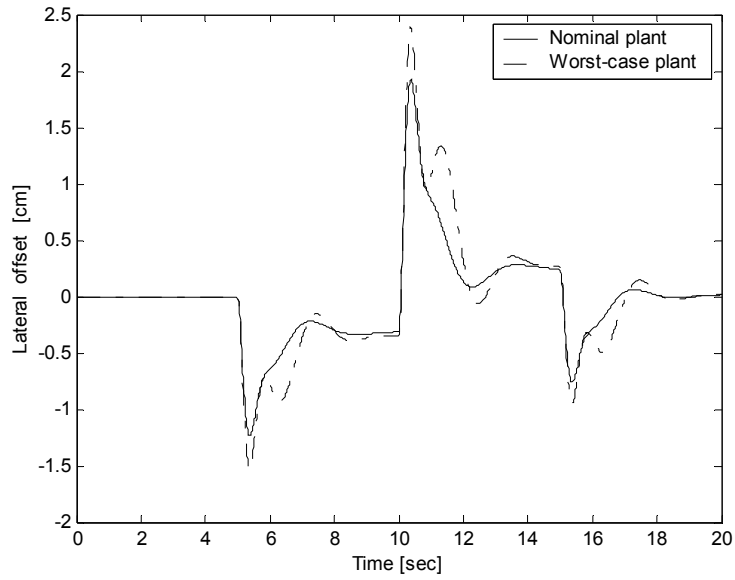


Fig. 5.6 Lateral offset of vehicle maneuver

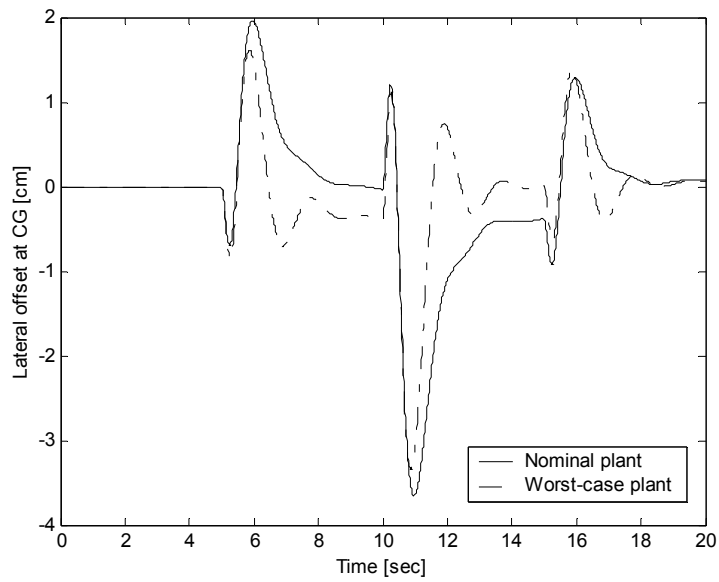


Fig. 5.7 Lateral offset at CG

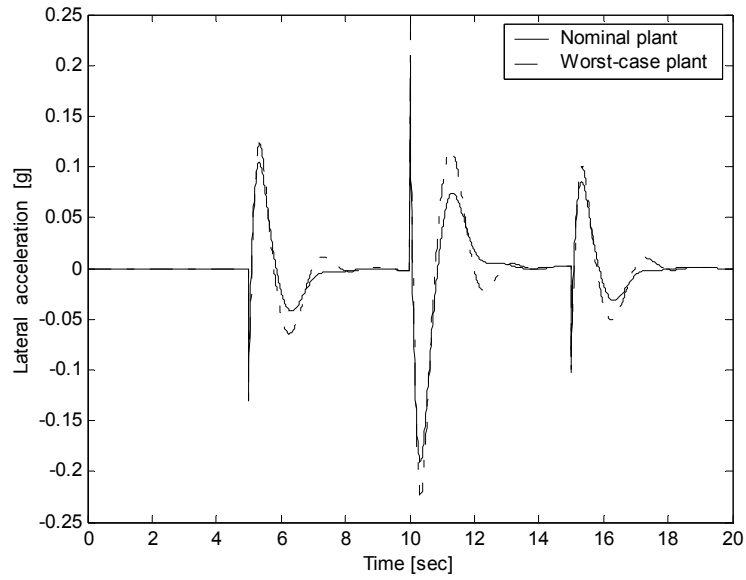


Fig. 5.8 Lateral acceleration of vehicle maneuver

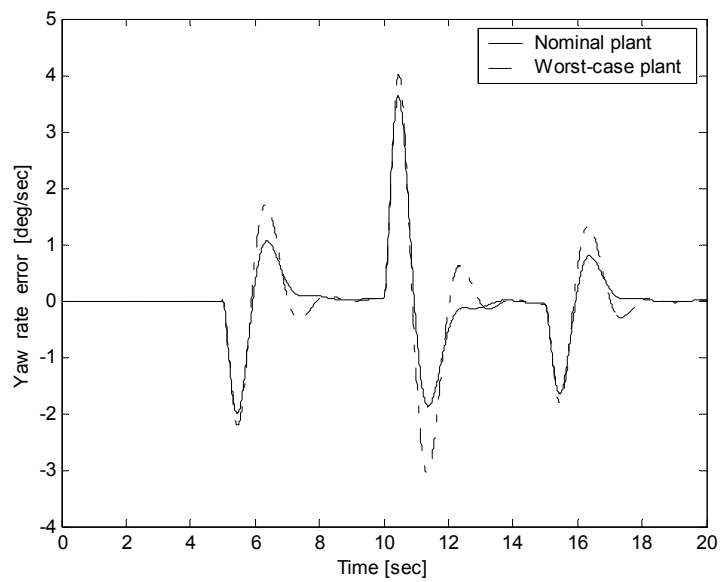


Fig. 5.9 Yaw rate error of vehicle maneuver

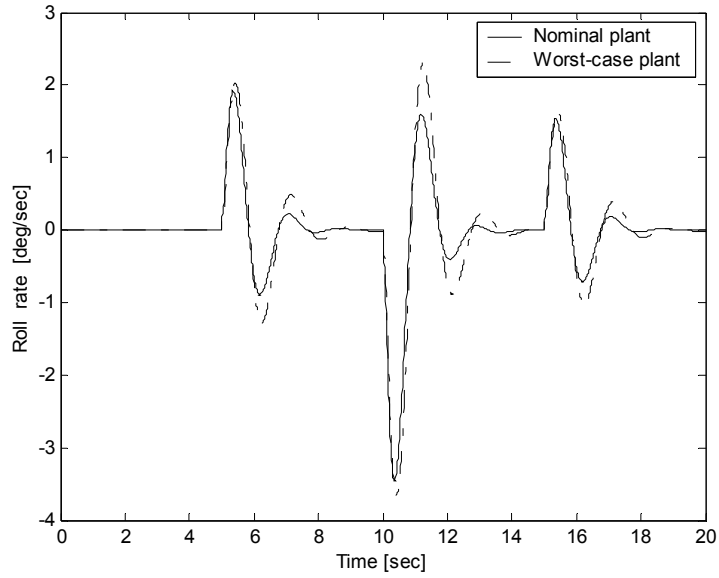


Fig. 5.10 Roll rate of vehicle maneuver

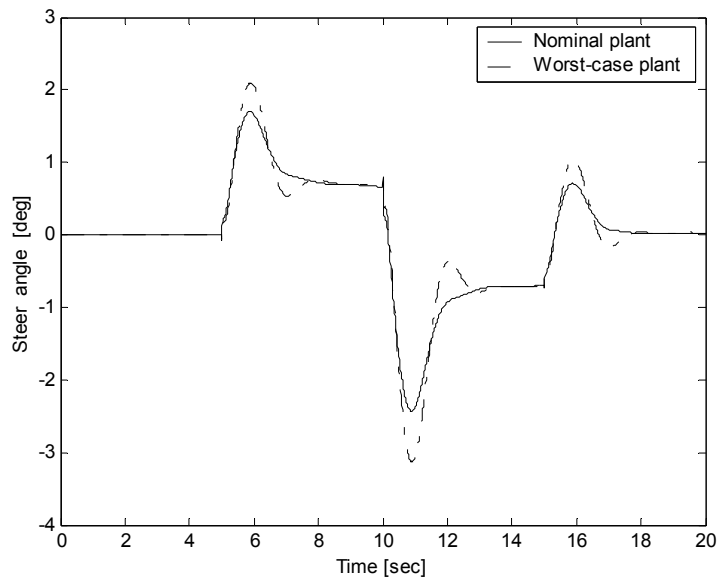


Fig. 5.11 Front steering angle of vehicle maneuver

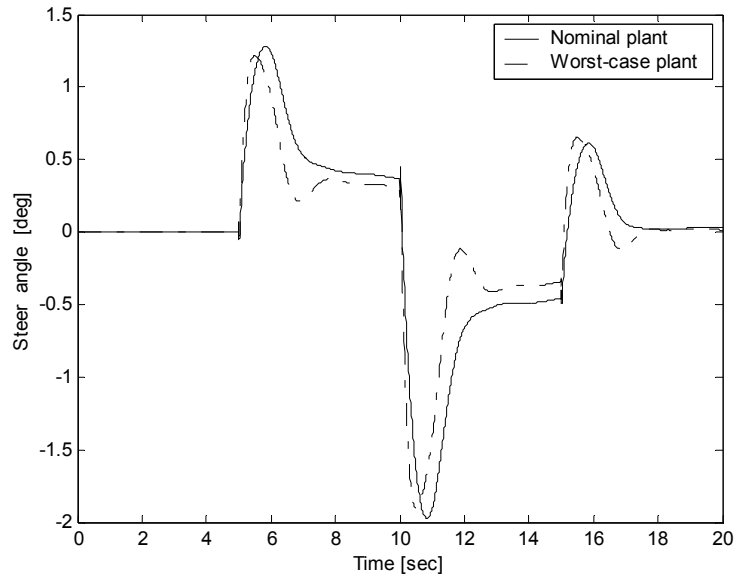


Fig. 5.12 Rear steering angle of vehicle maneuver

제 6 장 결론

본 연구에서는 차량의 횡방향 제어에 관한 제어기 설계를 연구하였다. 제어기 설계의 목적은 최소한의 오차를 가지면서 차량이 차선을 따라 주행하고, 노면 불규칙, 하중의 변화 등이 존재하더라도 만족스러운 승차감을 유지하도록 차량을 지능적으로 조향할 수 있는 제어기를 설계하는 것이다. 즉, 차량이 임의의 곡률을 가지는 차선을 따라 일정 속도로 주행할 때에 차량의 승차감 향상, 차선 추종오차의 최소화와 조향성능 향상에 목적을 두고 있다. 그런데, 차량의 모든 동적 특성을 모델링하는 것은 불가능하고 시간이나 주행 환경에 따라 특성들이 변화한다. 따라서, 각각의 불확실성과 파라미터 섭동에 강인한 제어기를 설계하기 위하여 코너링 강성에 대한 파라미터 섭동과 액츄에이터 불확실성을 제어 모델에 고려하였으며, 차량이 가져야 할 특성의 중요도에 따라 적절히 가중함수를 선택하고 μ 제어 이론을 적용하였다. 이렇게 해서 설계된 제어기는 차수가 높아 제어기 축소를 하여 15차의 제어기를 구하였으며, 원래의 제어기와 비교하여 주파수 영역 및 시간 영역에서의 성능이 거의 차이가 없음을 확인하였다.

일정한 속도로 주행하는 차량에 계단 입력의 형태로 주어진 곡률 입력이 들어올 때, 횡방향 차선 추종 오차 y_s 와 차량의 중심점에서의 오차 y_e 모두를 설계 조건인 5 [cm] 이하로 억제하고 일종의 외란인 곡률 입력에 대한 외란 제거 성능이 2초 정도로 빠른 특성을 가지면서 조종 안정성과 승차감에 미치는 영향을 나타내는 요우 각속도 오차와 롤 각속도도 각각 4~6 [deg/sec] 이내로 낮출 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Bates, D. G., Gatley, S. L., and Postlethwaite, I., “Integrated flight and propulsion control system design using H_∞ loop-shaping techniques”, Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [2] Wang, J. Y., and Tomizuka, M., “Robust H_∞ lateral control of heavy-duty vehicles in automated highway system”, Proceedings of the American Control Conference San Diego, California, 1999.
- [3] Mammar, S., “Application of two-degree-of-freedom H_∞ optimization to robust lateral vehicle control”, Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications Hartford, CT, 1997.
- [4] Mammar, S., “Robust reduced order two-degree-of-freedom tractor-semitrailer lateral control”, Proceedings of the American Control Conference San Diego, California, 1999.
- [5] Papageorgiou, G., “Robust control system design: H_∞ loop shaping and aerospace applications”, Darwin College Cambridge, A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy, 1998.
- [6] Limebeer, D. J. N., Kasenally, E. M., and Perkins, J. D., “On the design of robust two degree of freedom controllers”, Automatica, vol. 29, no. 1, pp. 157-168, 1993.
- [7] Segel, L., “Theoretical prediction and experimental substantiation of the

- response of the automobile to steering control”, Automobile Division, The Institute of Mechanical Engineers, pp. 26-46, 1956.
- [8] Milliken, W. B., and Whitcomb, D. W., “General Introduction to a Programme of Dynamic Research”, Research in Automobile Stability and Control and in Tyre Performance, Publication of the Institution of Mechanical Engineers, Automobile Division, Westminster, London, pp. 3-25, 1956.
- [9] Fenton, R., Melocik, G. C. and Olson, K. W., “On Steering of Automated Vehicles: Theory and Experiment”, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no. 3, pp. 6-10, June 1976.
- [10] Shladover, S. E., Wormely, D. N., Richardson, H. H. and Fish, R., “Steering Controller Design for Automated Guideway Transit Vehicles”, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 100, pp. 1-8, 1978.
- [11] Cardew, K. H. F., “The Automatic Steering of Vehicles – An Experimental System Fitted to a DS 19 Citroen Car”, Road Research Lab., Crowthorne, Berkshire, 1970.
- [12] Peng, H. and Tomizuka, M., “Preview Control for Vehicle Lateral Guidance In Highway Automation”, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 115, no. 4, pp. 678-686, 1993.
- [13] O’Brien, R. T., Iglesias, P. A. and Urban T. J., IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 4, no. 3, pp. 266-273, 1996.
- [14] Zames, G., “Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference

- Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses”, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-26, pp. 301-320, 1981.
- [15] Zhou, K., J. C. Doyle and K. Glover., Robust and Optimal Control. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [16] Desoer, C. A. and M. Vidyasagar., Feedback Systems: Input-Output Properties, Academic Press, New York, 1975.
- [17] Doyle, J. C., K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis., “State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems”, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-34, no. 8, pp. 831-847, 1989
- [18] Doyle, J. C., “Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties”, IEE Proceedings, Part D, vol. 133, pp. 45-56, 1982.
- [19] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite., Multivariable Feedback Control, John Wiley & Sons, pp. 362-364, 1996.
- [20] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite., Multivariable Feedback Control, John Wiley & Sons, pp. 311-317, 1996.
- [21] 安部正人., 自動車の運動と制御, 山海堂, pp. 148-173, 1992.
- [22] Sam-Sang You and Seok-Kwon Jeong., “Controller design and analysis for automatic steering of passenger cars”, Mechatronics An International Journal (to appear).
- [23] Ackermann, J., “Parameter Space Design of Robust Control Systems”, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-25, no. 6, pp. 1058-1072,

Dec. 1980.

- [24] Ackermann, J., *Sampled-data Control Systems*. Springer, Berlin, 1985.
- [25] Ackermann, J., “Robust Decoupling of Tracking and Yaw Stabilization in Car Steering”, *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, to be published.
- [26] Ackermann, J., “Robust Control for Automatic Steering”, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 795-800, 1990.