힐버트 공간의 표현에 관하여

정 지 영[1], 홍 정 희[2]

On the Representations of Hilbert Spaces

Ji Young Jung, Jeong Hee Hong

Abstract

Hilbert space is a generalization of finite-dimensional Euclidean space over a real field $\mathcal{R}$ with orthogonal property among vectors, which distinguishes it from Banach space. In this note, we characterize the structure of separable Hilbert spaces, and provide some examples of separable Hilbert spaces and a nonseparable Hilbert space.

1. 서 론

수학에 있어서 해석학 이론은 선형 개념에 바탕을 두고 있다. 사실, 근대 해석학은 수학의 기초가 되는 미적분학에서 발전된 수학의 한 분야이다. 20세기초 힐버트, 볼테라, 바나흐 등 함수 해석학의 탄생에 공헌한 수학자들은 선형 개념이 해석학에 수 공간등을 발견 소개하였다. 이로부터 함수 해석학은 오늘에 이르기까지 현대 수학의 발전에 지대한 공헌을 하고 있다.

여기서의 목적은 선형 공간의 한 형태인 힐버트 공간에 대하여 공부하는 것이다. 내적이 보장되지 않는 바나흐 공간과는달리 힐버트 공간에서는 내적이 보장되므로 벡터들의 직교를 정의할 수 있다. 이로 인해 힐버트 공간은 바나흐 공간보다 다루기가 좀 더 쉬워진다.

---

1) 한국해양대학교 응용수학과 석사과정 응용수학 전공
2) 한국해양대학교 응용수학과 교수

우리가 잘 알고 있는 n-차원의 유클리디안 공간의 개념을 무한 차원으로 확장시킨 힐버트 공간의 이론적 배경은 무한 차원의 공간을 해석적으로 접근할 수 있게 한다. 이를 바탕으로 2장에서는 내적 공간의 개념을 소개한뒤 몇가지 관련된 대수적 성질들을 조사하고, 그것들의 위상적 성질들을 몇가지 공부한다. 이 개념들은 힐버트 공간의 정의에서 힐버트 공간의 중요한 예들을 이끌어 내는데 도움을 준다. 3장에서는 기저와 정규직교성의 개념을 소개한 뒤 힐버트 공간들의 독특한 기하학적 성질들에 대하여 공부를 한다. 이 성질들은 힐버트 공간의 가분리성과 직결되는데, 이는 힐버트 공간을 분류하는데 결정적인 역할을 하게 된다. 4장에서는 3장에서의 결과를 바탕으로 가분리 힐버트 공간의 특성을 파악하여 분류하고, 나아가 5장에서는 가분리 공간이 되지 않는 힐버트 공간의 예를 제시한다.

2. 힐버트 공간

이 장에서는 실수 $\mathcal{R}$ 위에서 힐버트 공간의 기초 이론을 소개한다.

정의 2.1 ([AU], [K], [P], [RU1], [TL], [T]) 완비한 내적 공간 (Complete inner product space) 을 힐버트 공간이라 한다.

예제 2.2 n-차원 유클리디안 공간 $\mathcal{R}^n$ 은 두 연산, 즉

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)+(y_1, y_2, \cdots, y_n)=(x_1+y_2, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathcal{R}$$

에 대하여 벡터 공간이 된다. 나아가 내적 함수

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\cdot(y_1, y_2, \cdots, y_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

에 의해 $\mathcal{R}^n$ 공간은 내적 공간이 된다. 또한 $\mathcal{R}^n$ 의 완비성에 의해 $\mathcal{R}^n$ 은 힐버트 공간이다.

다음으로 $\mathcal{R}^n$ 공간을 확장시킨 $l^2(N)$ 공간에 대하여 알아보도록 하자.

예제 2.3 $l^2(N)=\left\{ x=\{x_n\} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty,\ x_n \in R \right\}$ 로 정의한다. 두 연산, $\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n + y_n\}$ 와 $\alpha\{x_n\}=\{\alpha x_n\}$, $\alpha \in \mathcal{R}$ 에 대하여, $l^2(N)$ 공간은 벡터 공간이 되고, 각 좌표들의 곱의 급수로서 나타낸 내적 함수, 즉 $x \cdot y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 에 대하여 $l^2(N)$ 공간은 또한 내적 공간이 된다. $l^2(N)$ 에서 코시 수열은 $\mathcal{R}^n$ 공간의 완비성을 이용하여 수렴성이 보장되므로, $l^2(N)$ 공간 또한 완비하다. 즉 $l^2(N)$ 은 힐버트 공간이다 ([AU], [K], [P], [R], [RU1]).

다음으로 힐버트 공간의 또 다른 흥미로운 예는 $L^2(X)$ 공간이다.

예제 2.4 $L^2(X)=\left\{ f: X \to \mathcal{R},\ 가측함수 \mid \int_X |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$ 로 정의한다. 두 연산 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ 와 $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 에 대하여, $L^2(X)$ 는 벡터 공간이 됨은 자명하다. 또한 $f \cdot g = \int_X f(x)\, g(x)\, dx$ 로 정의된 내적 함수에 대하여 $L^2(X)$ 는 내적 공간이 된다. 그리고 $L^2(X)$ 의 코시 수열은 $\mathcal{R}$ 의 완비성에 의해 수렴성이 보장되므로 $L^2(X)$ 공간은 완비하다. 즉 $L^2(X)$ 는 힐버트 공간이다 ([S]).

3. 가분리 힐버트 공간

우리는 앞에서 힐버트 공간의 정의와 예들에 대하여 공부하였다. 다음으로 힐버트 공간의 특징에 대해 바나흐 공간과 비교하여 알아보도록 할 것이다. 사실 폴란드 수학자 바나흐에 의해 1932년에 발견된 새로운 수학적 대상은 해석학 뿐아니라 응용 분야에서도 중요한 역할을 하는 선형공간들이다. 특히 완비성을 가진 거리 공간을 그의 이름을 따서 바나흐 공간이라 한다. 바나흐 공간중에서 내적이 보장되는 공간이 있는데 이가 바로 힐버트 공간이다. 벡터들사이의 내적을 통해 공간에서 정규직교성을 정의할 수 있게 되는데 이는 힐버트 공간에 기하학적인 의미를 주게 되어 바나흐 공간보다 쉽게 이론을 전개할 수 있게 되는 장점이 있다. 이 점이 바나흐 공간과 힐버트 공간의 큰 차이점이라고 할 수 있다 ([BA]).

정의 3.1 ([AU], [B], [R], [RU1], [TL]) 두 벡터 x_n과 x_m을 내적시켰을 때 $n \neq m$ 일때는 0, $n = m$ 일 때는 1의 값을 가질 때, 벡터들의 집합 $\{x_n\}$ 을 정규직교집합 (orthonormal set) 이라고 한다.

정의 3.2 ([TL]) 모든 벡터 x_n 과 직교가 되는 벡터가 0 벡터밖에는 없을 때, 이 때 벡터들의 집합 $\{x_n\}$ 을 전집합 (total set) 이라 한다.

정의 3.3 ([TL]) 힐버트 공간 H 의 벡터들의 집합 $\{x_n\}$ 이 정규직교집합이면서 전집합이면 $\{x_n\}$ 을 힐버트 공간 H 의 기저 (basis) 라고 한다.

정의 3.4 ([B]) 힐버트 공간 H 의 차원을 $\dim H$ 로 나타내고 $\dim H$ 는 H 의 기저의 개수로서 나타낸다.

정규직교 성질을 이용하면 다음의 보조정리 3.5 와 보조정리 3.6 과 같은 유용한 사실을 얻을 수 있다.

보조정리 3.5 (베셀의 부등식 : Bessel's inequality) $\{x_n\}$ 을 힐버트 공간 H 의 정규직교집합이라고 하면 H 의 모든 원소 x 에 대하여, $\sum_{\alpha\in I}(x\cdot x_\alpha)^2 \leq \| x \|^2$ 이 성립한다.

보조정리 3.6 (파세발의 항등식 : Paseval's identity) 힐버트 공간의 정규직교집합 $\{x_n\}$ 이 전집합이기위한 필요충분조건은 $\| x \|^2 = \sum_{\alpha\in I}(x\cdot x_\alpha)^2$ 이다.

우리는 어떤 벡터 공간의 모든 원소들이 기저의 1차 결합으로 나타난다는 것은 잘 알고 있다. 정의 3.3 와 보조정리 3.6 을 이용하면 힐버트 공간의 기저가 $\{x_n\}$ 일 때, 모든 원소 $x \in H$ 는 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x\cdot x_n)\, x_n$ 의 급수로 나타나게 된다. 이 때 계수 $x\cdot x_n$ 을 푸리에 계수 (Fourier coefficients) 라 하며, 이 때의 급수를 푸리에 급수 (Fourier Series) 라고 한다 ([RU2], [S]).

예제 3.7 $\mathcal{R}^n$ 의 원소 $e_1=(1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $e_n=(0,0,\cdots,1)$ 에 대하여, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 은 정규직교집합이면서 전집합이 되어 직교정규기저가 되고 따라서 $\dim \mathcal{R}^n = n$ 이 된다.

예제 3.8 $l^2(N)$ 의 원소들 $e_1=(1,0,\cdots)$, $e_2=(0,1,\cdots)$,$\cdots$ 에 대하여, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 은 정규직교집합이면서 전집합이 되어 정규직교기저가 되고 따라서 $\dim l^2(N) = \aleph_0$ 가 된다.

특히, 차원 (dimension) 의 크기를 통해 힐버트 공간의 성질을 규명할 수 있는데 그것이 바로 가분리성 (separable) 이다. 임의의 벡터 공간 V 가 조밀한 가부번 부분집합 (countable dense subset) 을 가질 때 이를 가분리 공간이라 한다. 특히 힐버트 공간이 가분리 성질을 가지면 이때의 조건은 단순히 가부번 기저 (countable basis) 의 존재성과 직결됨을 다음의 정리 3.9 에서 알 수 있다.

정리 3.9 힐버트 공간이 가분리 성질을 갖기 위한 필요충분조건은 직교정규 가부번 기저가 존재하는 것이다 ([TL]).

위에서 알아본 예제 $\mathcal{R}^n$ 과 $l^2(N)$ 공간의 정규직교기저는 가부번 집합 (countable set) 이므로 정리 3.9 에 의해 이들은 가분리 힐버트 공간 (separable Hilbert space) 이 된다. 다음으로 $L^2(X)$ 공간 또한 가분리 공간이 되는지에 대해 알아보도록 하자.

예제 3.10 ([S]) $L^2(X)$ 공간에서 $X=[-\pi, \pi]$ 일 때 가부번 집합 $S=\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \cdots \right\}$ 는 단순한 적분계산을 사용하면 정규직교집합이 되고 또한 전집합이 된다. 그러므로 S 는 $L^2(X)$ 의 기저가 되므로 $L^2(X)$ 는 가분리 힐버트 공간이 된다. 이 예제는 확률론이나 전기공학등에서 많이 쓰이고 있다 ([S]).

4. 힐버트 공간의 표현에 관하여

지금까지 $\mathcal{R}^n$, $l^2(N)$, $L^2(X)$ 가 가분리 힐버트 공간임을 보였다. 이제 역으로 임의의 가분리 힐버트 공간은 과연 어떠한 형태를 가지는지에 대하여 공부하도록 하자. 먼저 가분리 힐버트 공간은 가부번 정규직교기저가 존재하여 그 차원은 $\aleph_0$ 보다 작거나 같음에 유의하자. 즉 유한 차원 (finite- dimension) 이거나 또는 가부번 차원 (countable-dimension) 을 갖는 경우로 크게 나눌 수 있다. 이 두가지 형태를 구체적으로 알아보기 위하여 동형 (isomorphism) 에 관하여 공부하기로 한다.

정의 4.1 ([TL], [T]) 두 힐버트 공간 H 와 K 에 대하여 다음의 두 조건을 만족하는 전단사 함수 $T: H \to K$ 가 존재하면 H 와 K 는 서로 동형이라고 한다.

(i) 모든 $x, y \in H$, $a, b \in R$ 에 대하여 $T(ax+by) = aT(x)+bT(y)$ 이다.(선형 성질)

(ii) 모든 $x, y \in H$ 에 대하여 $Tx \cdot Ty = x \cdot y$ 이다. (등거리 사상)

정리 4.2 dim $H=$dim K 일 필요충분조건은 H 와 K 가 힐버트 공간으로서 서로 동형일 때이다.

dim $l^2(N)=$ dim $L^2(X)=\aleph_0$ 이므로 정리 4.2 에 의해 두 힐버트 공간 $l^2(N)$ 과 $L^2(X)$ 는 동형임을 알 수 있다.

정리 4.3 유한 힐버트 공간 H 의 dim H = n 일 때, H 는 $\mathcal{R}^n$ 과 동형이다 ([TL], [T]).

증 명 H 의 정규직교기저들의 집합을 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 라 하자. 그러면 H 의 모든 원소 x는 1차 결합 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$, $(\alpha_i \in \mathcal{R})$ 로 나타난다. 먼저 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathcal{R}^n$ 임에 유의하자. 그러면 $T: x \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 로 대응되는 함수 T 는 H 에서 $\mathcal{R}^n$ 으로 사상되는 전단사 함수 (bijective function)

이면서 선형 (linear) 이고 등거리사상 (isometry) 이 된다.

정리 4.4 힐버트 공간 H 의 dim $H = \aleph_0$ 일 때, H 는 $l^2(N)$ 과 동형이 된다 ([K], [TL]).

증 명 H 의 가부번 정규직교기저를 $\{u_n\}$ 이라 하고, H 의 원소 x 에 대하여 $\xi_n = x \cdot u_n$ 라 두자. 그러면 파세발의 항등식에 의해 $\{\xi_n\}$ 은 $l^2(N)$ 의 원소가 된다. 따라서 $T: x \mapsto \{\xi_n\}$ 로 대응되는 함수 T 는 H 에서 $l^2(N)$ 으로 사상되는 전단사 함수이며 선형이고 등거리사상이 된다.

정리 4.3 과 정리 4.4 으로부터 모든 가분리 힐버트 공간은 두가지 형태로 나타남을 알 수 있다. 즉, 가분리 힐버트 공간이 유한 차원일 때는 $\mathcal{R}^n$ 공간과 동형이고, 무한 차원일 때는 $l^2(N)$ 공간과 동형이 된다.

5. 부 록

마지막으로 가분리 성질을 갖지 않는 힐버트 공간의 존재성에 대하여 알아보기로 한다. $l^2(N)$ 공간을 정의했던 방법을 N 대신에 임의의 집합 A 로 대치시켜 $l^2(A)$ 를 만들자. 그러면 $l^2(A)$ 공간은 $l^2(N)$ 에서와 마찬가지로 힐버트 공간이 된다. 만약 A 를 비가부번집합 (uncountable set) 으로 택하면 이 때 dim $l^2(A) = |A|$, 즉 비가부번이되어 $l^2(A)$ 가 가분리 공간이 되지 않음을 알 수 있다 ([TL]).

참고문헌

[AU] J. P. Aubin, Applied Abstract Analysis, John Wiley & Sons, 1977.

[BA] S. Banach, Théorie des Opérations Lineaires, Chelsea, New York, 1932.

[B] R. G. Bartle, The Elements of Real Analysis, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1976.

[K] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1978.

[P] G. K. Pederson, Analysis Now, Springer-Verlag, 1989.

[R] H. L. Royden, Real Analysis, 3rd ed., Collier Macmillan, 1988.

[RU1] W. Rudin, Real & Complex Analysis, McGraw-Hill, 1974.

[RU2] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., 1976.

[S] M. R. Spiegel, Real Variables, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1969.

[TL] A. E. Taylor & D. C. Lay, Introduction to Functional Analysis, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1980.

[T] A. Torchinsky, Real Variables, Addison-Wesley Publishing, 1988.