

해저구조물에 대한 비선형분산파의 변형

박 동 진¹⁾, 이 중 우²⁾

Deformation of Non-linear Dispersive Wave over the Submerged Structure

D. J. Park · J. W. Lee

Abstract

To design a coastal structure in the nearshore region, engineers must have means to estimate wave climate. Waves, approaching the surf zone from offshore, experience changes caused by combined effects of bathymetric variations, interference of man-made structure, and nonlinear interactions among wave trains.

This paper has attempted to find out the effects of two of the more subtle phenomena involving nonlinear shallow water waves, amplitude dispersion and secondary wave generation.

Boussinesq type equations can be used to model the nonlinear transformation of surface waves in shallow water due to effects of shoaling, refraction, diffraction, and reflection. In this paper, generalized Boussinesq equations under the complex bottom condition is derived using the depth averaged velocity with the series expansion of the velocity potential as a product of powers of the depth of flow. A time stepping finite difference method is used to solve the derived equation. Numerical results are compared to hydraulic model results.

1) 한국해양대학교 항만·운송공학과 석사과정 해안 및 항만공학전공

2) 한국해양대학교 토목공학과 교수

The result with the non-linear dispersive wave equation can describe an interesting transformation a sinusoidal wave to one with a cnoidal aspect of a rapid degradation into modulated high frequency waves and transient secondary waves in an intermediate region. The amplitude dispersion of the primary wave crest results in a convex wave front after passing through the shoal and the secondary waves generated by the shoal diffracted in a radial manner into surrounding waters.

1. 서론

본 논문에서는 $U_s \approx 1$ 인 비선형분산파를 이용하여 파랑변형특성을 다루기로 한다. 비선형 분산파 이론에는 Boussinesq방정식, Korteweg-de Vries(1895)방정식, Peregrine(1967)방정식 등이 잘 알려져 있으나, 본 논문에서는 Wu(1981)에 의해 유도된 일반화된 Boussinesq방정식을 기초로 유한차분법을 이용하여, 현장에서 쉽게 적용 및 이용 가능한 수치모델의 개발에 목적을 두고 있다. 균일수심의 수평 1차원 좌표계에서 섭동법(perturbation method)을 이용하여 Boussinesq방정식을 유도하고, 바닥에서의 흐름과 수심변화를 도입하여 방정식을 확장, 기본방정식을 얻었다. 해의 정도와 안정을 기하기 위해 포텐셜의 2차 미분에 Crank-Nicholson 형식을 도입하고, 좌·우경계면처리는 에너지가 무한대로 확산되어 나갈 수 있도록 Sommerfeld방사조건을 이용하였으며, 수심평균속도를 적용하였다. 비선형·분산항을 평가하기 위하여 1차원 및 2차원 영역에서 수치실험을 행하였다.

2. 지배방정식의 유도

2.1 기본좌표계 및 경계조건

기본좌표계는 일정한 수심을 h , 정수면상에서 수평방향으로 무한하게 확장된 영역을 x 축, 정수면을 원점 '0'으로 하여 x 축에 수직인 방향을 z 축으로 정의하고, 정수면으로부터 자유수면의 변위를 η 로 정의하였다. 유체는 비압축, 비점성, 비회전으로 가정하고 표면장력을 무시하여 지배방정식과 경계조건을 도입한다.

$$\begin{aligned} \phi_z^2 \phi = 0, \quad \phi_z = 0 \quad \text{at}(z = -h), \quad \eta_t + \phi_x \eta_x = \phi_z, \quad \text{at}(z = \eta) \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0 \quad \text{at}(z = \eta) \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 먹급수해의 가정

일반적으로 해면의 변형특성, 또는 흐름특성을 속도포텐셜로 정의할 수 있다. 본 논문에서는 포텐셜을 연직성분 $Z = h+z$ 와 x, t 의 함수인 속도포텐셜의 급수형태로 가정하였다.

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n \phi_n(x, t) \quad (2)$$

식(2)을 식(1)의 바닥경계조건과 지배방정식인 Laplace방정식을 적용하여 단순화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) = \phi_0(x, t) - \frac{1}{2} Z^2 \phi_0''(x, t) + \frac{1}{24} Z^4 \phi_0''''(x, t) - O(Z^6) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \phi_0(x, t)}{\partial x^{2n}} \end{aligned} \quad (3)$$

2.3 방정식의 무차원화

식(4)와 같이 무차원화 변수를 도입하였다. 이때 *는 무차원화된 형식을 표시하고, h_0 는 특성수심을 나타낸다.

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad z^* = \frac{z}{h_0}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{A}, \quad Z^* = \left(\frac{z+h}{h_0}\right), \quad t^* = \frac{\sqrt{gh}}{L} t, \quad \phi^* = \frac{h_0}{LA\sqrt{gh}} \phi \quad (4)$$

침동계수 $\alpha = A/h_0$, $\beta = (h_0/L)^2$ 을 도입하여 지배방정식 및 경계조건을 무차원화하면 다음 식과 같다. 여기서 α 는 비선형성의 지표이며, β 는 분산성(연직 가속도)의 지표이다.

$$\beta \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad \beta(\eta_t + \alpha \phi_x \eta_x) = \phi_z, \quad \beta(\phi_t + \eta) + \frac{1}{2}(\alpha \beta \phi_x^2 + \alpha \phi_z^2) = 0 \quad (5)$$

속도포텐셜을 급수전개로 표현한 식(3)을 무차원화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= \phi_0(x, t) - \frac{1}{2} \beta Z^2 \phi_0''(x, t) + \frac{1}{24} \beta^2 Z^4 \phi_0''''(x, t) + O(\beta^3) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \phi_0(x, t)}{\partial x^{2n}} \beta^n\end{aligned}\quad (6)$$

여기서, $Z = (1 + a\eta)$ 이다.

식(6) 우변의 ϕ_0 를 ϕ 로 놓고 각 방향에 대하여 미분하여 식(5)의 자유수면경계 조건에 대입하여 정리한 후, 미분을 의미하는 (')표시 대신 아래첨자 표기를 사용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\eta_t + a\phi_x \eta_x + Z\phi_{xx} - \frac{\beta}{6} Z^3 \phi_{xxxx} = O(\alpha\beta, \beta^2) \quad (7)$$

$$\eta + \phi_t - \frac{\beta}{2} Z^2 \phi_{xxt} + \frac{\alpha}{2} \phi_x^2 = O(\alpha\beta, \beta^2) \quad (8)$$

이 식은 선형파이론과는 달리 수직속도성분을 포함하고 있다. 속도포텐셜은 ϕ_0 항 단독으로 표현되기 때문에 $\phi_x(x, z, t) = u_0$ 이다. 여기서 u_0 를 정의하는 방법에 따라 여러 가지 Boussinesq형 방정식으로 분류되는데 본 논문에서는 u_0 에 수심 평균속도인 \bar{u} 를 사용하였다.

$$u_0 = \bar{u} - \frac{\beta}{6} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} (\eta + 1)^2 + O(\beta^2) \quad (9)$$

식(9)을 식(7), (8)의 Boussinesq방정식에 대입하고, x 방향에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\eta_t + [(1 + a\eta)\bar{u}]_x = O(\alpha\beta, \beta^2) \quad (10)$$

$$\bar{u} + a\bar{u} \bar{u}_x + \eta_x - \frac{1}{3} \beta \bar{u}_{xxt} = O(\alpha\beta, \alpha^2, \beta^2) \quad (11)$$

Schember(1982)는 식(10),(11)을 적분하여 속도포텐셜형식으로 풀고, η 에 대하여 정리한 후 두식을 결합하여 다음 식을 유도하였다.

$$-\phi_{tt} - 2a\phi_x \phi_{xt} + \frac{\beta}{3} \phi_{xxtt} + \phi_{xt} = O(\alpha\beta, \alpha^2, \beta^2) \quad (12)$$

여기서 a 는 비선형항을, β 는 분산항에 변화를 가져오게 한다.

2.4 가변수심에서 Boussinesq방정식의 확장

시간과 공간에 따라 변하는 바닥조건에서 일반화시킨 Boussinesq방정식은 다음과 같다.

$$\eta_t \nabla \cdot [(h + \eta) \nabla \phi] = -h_t + \nabla \cdot \left\{ \left[\frac{h}{2} (h_t + \nabla \cdot (h \nabla \phi)) - \frac{1}{3} h^2 \nabla^2 \phi \right] \nabla h \right\} \quad (13)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \eta + p_o = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} [h_t + \nabla \cdot (h \nabla \phi)] - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi \quad (14)$$

수평1차원좌표계에 대한 Boussinesq방정식의 조합된 형태는 식(15)과 같다.

$$\phi_{tt} = (h \phi_x)_x - 2\phi_x \phi_{xt} - \phi_t \phi_{xx} + \frac{h^2}{3} \phi_{xxx} + \frac{hh_x}{2} \phi_{xt} - \frac{h^2}{6} [h_x \phi_{xx}]_x \quad (15)$$

여기서 x, y 방향의 미분연산자 ' ∇ '를 도입하여 수평2차원좌표계에 대한 방정식의 형태는 식(16)과 같이 정리된다.

$$\phi_{tt} = \nabla \cdot (h \nabla \phi) - 2\nabla \phi \cdot \nabla \phi_t - \phi_t \nabla^2 \phi + \frac{h^2}{3} \nabla^2 \phi_{tt} + \frac{h}{2} \nabla h \cdot \nabla \phi_t - \frac{h^2}{6} \nabla \cdot [(\nabla^2 \phi) \nabla h] \quad (16)$$

식(15), (16)을 본 논문의 기본방정식으로 사용하였다.

3. 수치해석 기법

식(15)을 대상영역의 격자간격을 Δx , 시간간격을 Δt 로 정의하고 공간 및 시간에 대한 1차, 2차, 3차 미분은 중앙차분법($O(\Delta x^2, \Delta t^2)$)으로 차분화 하였으며, i, j 는 각각 공간과 시간축의 절점위치를 나타낸다. 우변의 첫 번째 항의 2차 미분은 정도를 높이기 위하여 각 시간 단계에서 전후의 평균인 식(17)과 같은 Crank-Nicholson형식으로 수정하였다.

$$[\phi_t^i]_{xx} = \frac{1}{2} \{ [\phi_t^{i+1}]_{xx} + [\phi_t^{i-1}]_{xx} \} \quad (17)$$

좌·우변 경계상의 값을 처리하기 위해 시간과 공간의 파랑전파관계를 나타내는 Sommerfeld방사조건(Sommerfeld, 1949)을 사용하여 에너지가 무한대로 확산되어 나갈 수 있도록 하였다.

$$\phi_t = -C\phi_x \quad (18)$$

차분식 및 위의 조건들을 적용하여 비선형항과 분산항을 도입한 기본방정식을 새로운 시간단계 $j+1$ 을 좌변에, 이전의 시간단계 j , $j-1$ 을 우변에 오도록 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \phi_i^{j+1} a(i) + \phi_i^{j+1} b(i) + \phi_{i+1}^{j+1} c(i) \\ &= (2\phi_i^j - \phi_i^{j-1}) + C_1[\phi_i^j]_x + C_2[\phi_i^{j-1}]_x + C_3[\phi_i^j]_{xx} + C_4[\phi_i^{j-1}]_{xx} + C_5[\phi_i^j]_{xxx} \\ &+ \left\{ -\Delta t[\phi_i^j]_x \{ [\phi_i^{j+1}]_x^{(k-1)} - [\phi_i^{j-1}]_x \} - \frac{\Delta t}{2}[\phi_i^j]_{xx} \{ [\phi_i^{j+1}]_x^{(k-1)} - [\phi_i^{j-1}]_x \} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 선형항과 분산항의 계수항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a(i) &= -\frac{h\Delta t^2}{2\Delta x^2} - \frac{h^2}{3\Delta x^2} + \frac{hh_x}{4\Delta x} & b(i) &= 1 + \frac{h\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{2h^2}{3\Delta x^2} \\ c(i) &= -\frac{h\Delta t^2}{2\Delta x^2} - \frac{h^2}{3\Delta x^2} - \frac{hh_x}{4\Delta x} \\ C_1 &= h_x \Delta t^2 - hh_x, & C_2 &= \frac{hh_x}{2}, & C_3 &= -\frac{2h^2}{3} - \frac{h^2 h_{xx} \Delta t^2}{6} \\ C_4 &= \frac{h\Delta t^2}{2} + \frac{h^2}{3}, & C_5 &= -\frac{h^2 h_x \Delta t^2}{6} \end{aligned} \quad (20)$$

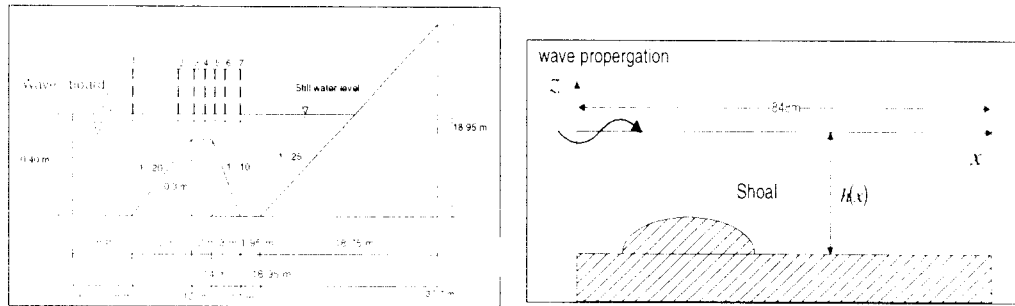
(19)식에서 선형항과 분산항은 x 방향의 미지수 N 에 대한 N 방정식계를 표현한다. 좌변의 미지수 $\phi(j+1)$ 항의 변수 $a(i)$, $b(i)$, $c(i)$ 는 3대각 매트릭스(Tri-diagonal Matrix)형태로 나타나며, 비선형항은 정도를 높이기 위하여 k 번 반복 계산한 이 과정은 허용변수(tolerance parameter) ϵ 를 만족할 때까지 반복한다.

$$\gamma = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^N ([\phi_i^{j+1}]^{(k)} - [\phi_i^{j+1}]^{(k-1)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \sum_{i=1}^N ([\phi_i^{j+1}]^{(k)} - [\phi_i^j])^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} < \epsilon \quad (21)$$

이것으로 연속적인 시간단계에서 속도포텐셜을 구할 수 있으나 관심있는 부분은 해면의 변화이므로 식(14)로부터 이항정리하여 다음식을 얻었다.

$$\eta(x, t) = -\phi_t - \frac{1}{2}(\phi_x)^2 + \frac{h^2}{3}\phi_{xxt} + \frac{h}{2}h_x\phi_{xt} \quad (24)$$

수평 2차원차원 좌표계에서는 식(16)을 확장하여 사용하였다.



(a) 1-Dimensional Solitary Wave Domain

(b) 2-Dimensional Sine Wave Domain

Fig. 1 Problem Domain

4. 수치모델 실험 및 결과

수치모델의 실험은 Fig.1와 같이 해저구조물을 가진 수역에서 shoal에 의한 영향을 평가하고 비선형과 분산항에 의한 영향을 평가하기 위하여 비쇄파조건으로 코립파와 sine파를 입사시키는 것으로 하였다.

Beji and Battjes(1994)의 수치실험 중 선형sine파를 입사파로 하였을 때 shoal을 지나기 전후의 관측자료인 Station 4, Station 7의 관측치(Fig.2)를 수치실험자료(Fig.3)와 정성적으로 비교하였다. 수치실험결과는 시간축인 x축을 따라 shoal을 지나기 전인 4지점에서 큰 1차파가 나타나고 작은 파가 뒤따르며, shoal을 지난후인 7지점에서는 작은 파가 먼저 오고 1차파가 나타나는 것을 볼 수 있다. 비선형을 고려한 수치실험결과에서도 공간축인 x축의 shoal을 지나기 전에는 1차파를 뒤쫓는 작은파 파를 볼 수 있고, shoal을 지난 후에는 1차파를 앞서는 작은파를 관찰할 수 있다.

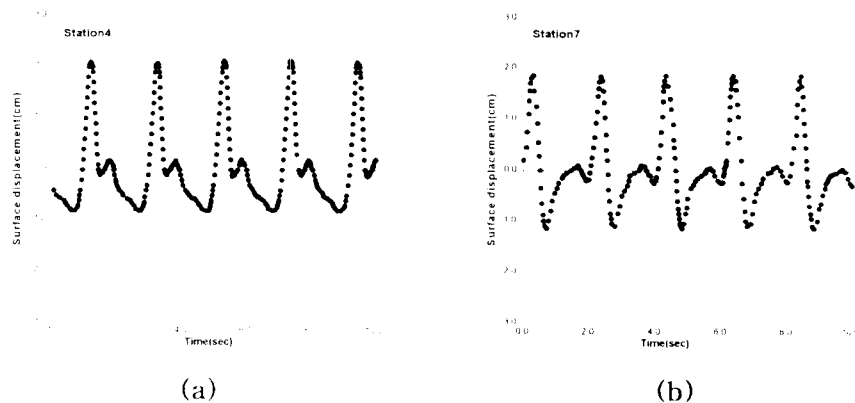


Fig. 2 Observed Sine Waves on station 4 and station 7.

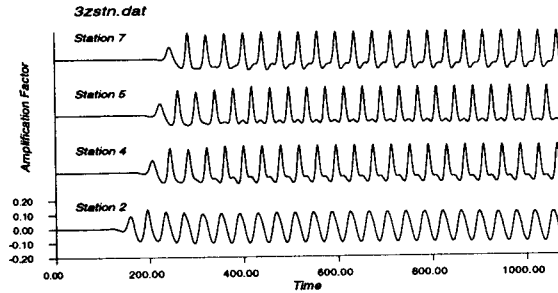


Fig. 3 Surface elevation non-linear and non-dispersive sine wave
(1-dimensional domain)

Fig.4는 비선형분산파를 1차원영역(Fig.1(a))으로 입사시킨 경우의 결과이고, Fig.5는 비선형과 분산특성을 평가하기 위하여 shoal 바로 위에서 각 조건에 따른 해면변동결과를 나타내는 그림이며, Fig.6은 파랑변형특성을 가장 잘 표현하는 비선형 분산파를 2차원영역(Fig.1(b))으로 입사시킨 경우의 각 단계별 해면변동형상이다.

5. 결론

수치실험결과 해저수심이 급격히 변화하는 지역에서 2차파의 발생을 예측할 수 있으며 진폭이 증가하는 양상을 보였고, 해저 shoal에 의한 방사상의 2차파가 발생함을 알 수 있었다.

비선형성은 변조된 고주파대역의 변조파를 형성하면서 급격한 변화를 가져오는 현상을 나타냈고, 분산성은 shoal에 의해 높아진 파고를 사방으로 퍼져 나가게 하는 현상을 나타냈다. 비선형 및 분산을 고려하였을 경우 실제 파랑변형현상을 가장 잘 표현하는 것으로 나타났다.

예상했던 대로 파의 회절현상을 명확히 관찰할 수 있었다. shoal에 의해 파고가 증폭된 초기파는 파봉선을 따라 에너지의 옆 방향 이동현상을 보였다. 증폭된 파고는 shoal에서 멀어짐에 따라 파고의 감소현상을 보이며 최초파고로 복귀하는 경향을 보였다.

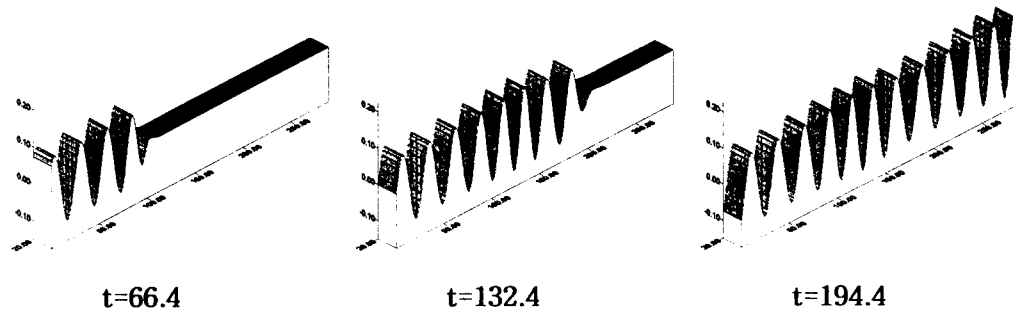
또한, 최초의 sine파가 크노이드파형을 가지다가 shoal 위에서 Wave peak를 보이고 회절, 굴절, 진폭분산, 2차파의 생성현상을 보이면서 전파되어 왜곡된 파랑장

을 보이지만 그 주기성을 계속 유지하고 있음을 알 수 있다.

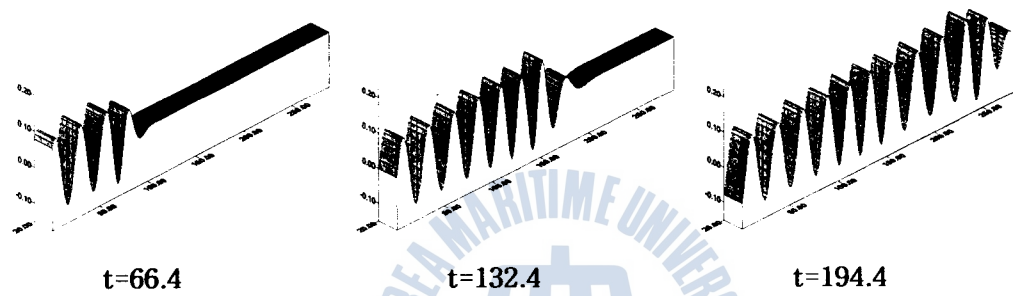
이상으로 본 연구를 통해 전해지역에서 파랑의 진폭분산 및 2차파의 발생과 관련된 복잡한 변환특성을 파악할 수 있게 되었으며, 비록 Boussinesq 방정식을 통해 파랑변형과정을 모델할 수 있었으나, 2차파의 발생 메카니즘에 대한 완전한 이해는 어려웠다. 개발한 모델을 통해 쇄파되기 전까지 파랑의 변환특성을 효과적으로 파악할 수 있었으며 추후 실제문제에 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

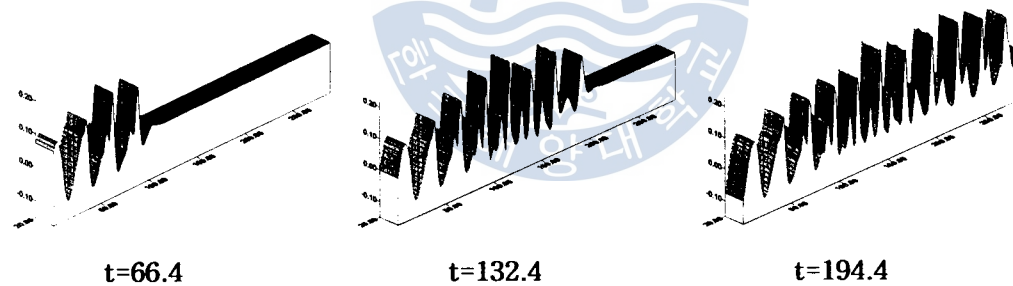
1. 片宗根, 1996. 波動論. 明知大學校 出版部, pp. 204-262.
2. 後藤智明, 1984. 어머셀數가大きい場合의非線形分散波の方程式. 土木學會論文集 第351号/II-2, pp. 193-201.
3. Beji, S., Battjes, J.A. 1994. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. Coastal Engineering, vol. 23, pp. 1-16.
4. Dean, R.G., Dalrymple, R.A. 1984. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. Prentice Hall, Inc., N.J.
5. Nwogu, O. 1993. Alternative form Boussinesq equations for nearshore wave propagation. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, vol. 119, No. 6, 618-638
6. Peregrine, D.H. 1967. Long waves on a beach. Journal of Fluid Mechanics, vol. 27, part 4, pp. 815-827.
7. Schember, H. 1982. A new Model for three-dimensional nonlinear dispersive long waves. Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, Ca.
8. Wu, T.Y. 1981. Long waves in ocean and coastal waters. Journal of Engineering Mechanics Div. ASCE, vol. 107, no. EM3, Proc. Paper 16346, pp. 501-522.



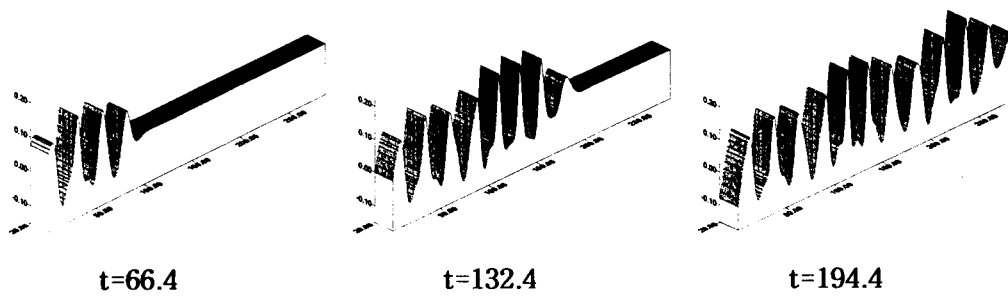
(a) Linear and non-dispersive sine wave



(b) Linear and dispersive sine wave



(b) Non-linear and non-dispersive sine wave



(d) Non-linear and dispersive sine wave

Fig. 8 Surface elevation over a shoal(1-dimensional domain)

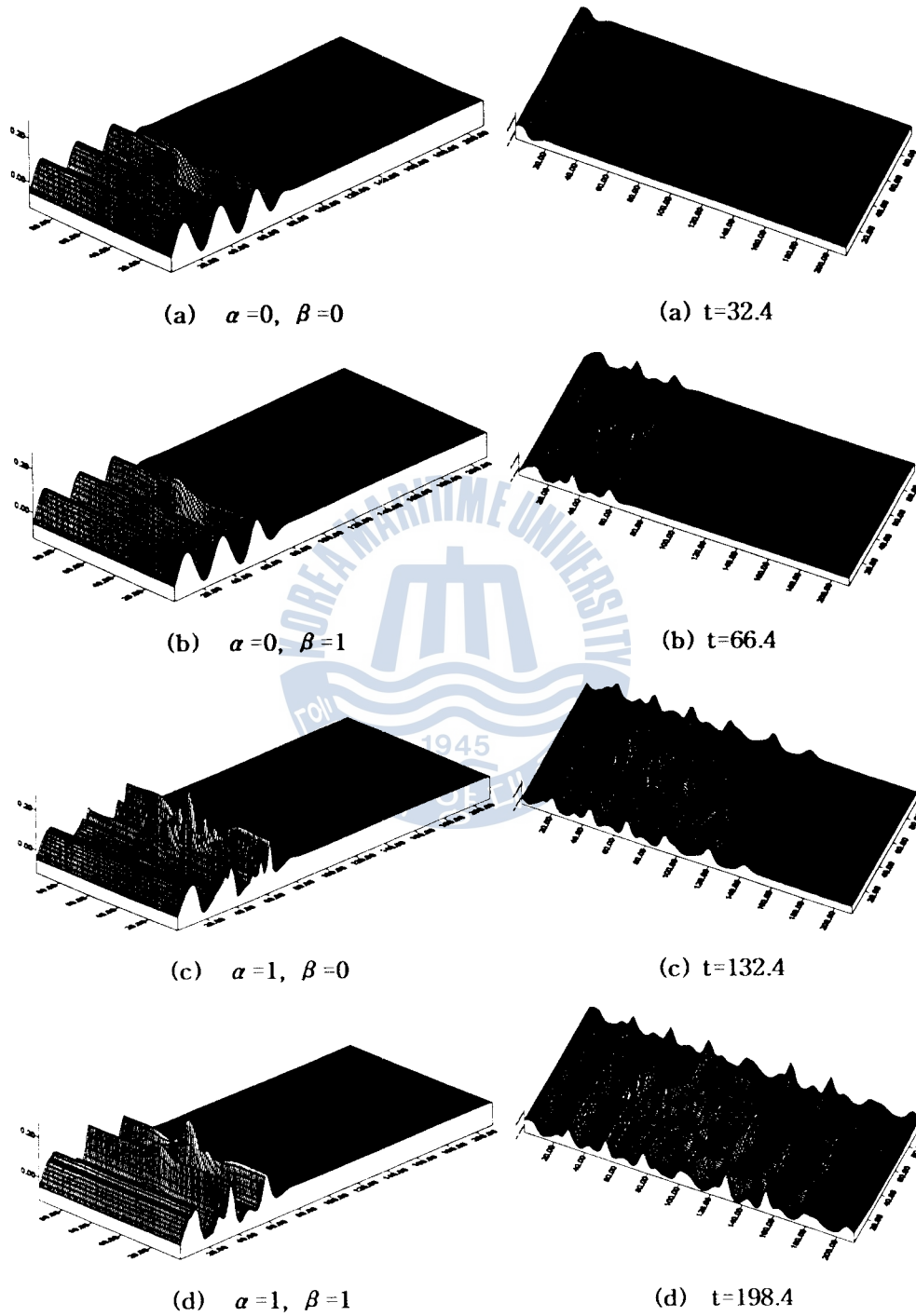


Fig. 5 Surface elevation over a shoal (t=66.4)

Fig. 6 Surface elevation, non-linear and dispersive wave each time step

