하나의 버스 待期時間의 分布

李 鍾 厚

Waiting Time Distribution for Buses

Lee Jong Hoo

Abstract

A bus is supposed to appear every hour on the hour, but is subject to delay. We treat the succesive delays X_k as independent random variables with a common distribution F and density f. Denote by T the waiting time of a person arriving at epoch $0<x<1$.

We describe some properties of the waiting time distribution of T in cases when $0\leqq X_k\leqq 1$ and not.

버스(汽車 또는 배)를 타기 위하여 停留場에 온 사람이 버스를 탈 때까지 待期할 時間의 分布를 생각한다.

버스가 每時間마다 每時 0分에 오기로 되어 있으나 延着을 免할 수가 없다. 버스의 차례차례의 遲延時間 X_k를 共通의 分布 F와 密度 f를 따르고 獨立인 確率變數라 둔다.

어떤 時點 $0<x<1$에 到着한 사람의 待期時間의 分布를 條件 $0\leqq X_k\leqq 1$일 때와 또 이 條件없이 X_k가 指數分布를 따를 때에 대해서 調査한다.

〔**定理 1**〕 버스가 每時間마다 每日 0分에 到着하기로 되어 있다. 차례차례의 遲延時間 X_k를 共通의 分布 F와 密度 f를 따르며 獨立인 確率變數이고 $0\leqq X_k\leqq 1$이라 假定하면. 時點 $x(0<x<1)$에 到着한 사람의 待期時間 T의 分布는 密度 $g(t)(0\leqq t\leqq 1)$와 分布函數 $G(t)$가

$$g(t)=\begin{cases}1-\int_0^t F(x)dx & 0\leqq t\leqq 1\\ \int_0^{2-t} F(x)dx & 1\leqq t\leqq 2\end{cases}$$

$$G(t)=\begin{cases}t-\int_0^t (t-x)F(x)dx & (0\leqq t\leqq 1)\\ 1-\int_0^1(1-x)F(x)dx+(t-1)\int_0^{2-t}F(x)dx+\int_{2-t}^1(1-x)F(x)dx & (1\leqq t\leqq 2)\end{cases}$$

으로 주어진다.

證明 (1) 時點 $t(0\leqq t\leqq 1)$에서는 0分에 오기로 되어 있는 버스가 通過했을 確率은 $F(t)$이므로 t에서 無作爲化(平等分布에 의한)한 確率(通過했을 全確率)은 $\int_0^t F(x)dx$ 이다. 따라서 버스가 延着하여 앞으로 버스를 탈 可能이 있는 確率은 $1-\int_0^t F(x)dx$ $(0<t<1)$ 이다.

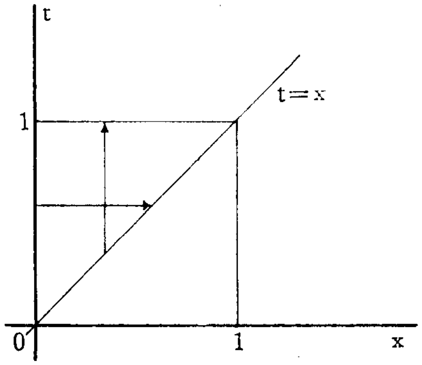
(2) 時點 $t(1\leqq t\leqq 2)$에서는 아직 버스가 通過하지 않았으므로 앞으로 버스가 오리라 期待되는 確率은 $\int_0^{2-t} F(x)dx$ $(1\leqq t\leqq 2)$ 이다.

다음에 $\int_0^2 g(t)dt=1$을 증명하자.

$$\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1\left(1-\int_0^t F(x)dx\right)dt=1-\int_0^1\int_0^t F(x)dxdt$$

$$=1-\int_0^1 F(x)\,dx\int_x^1 dt$$

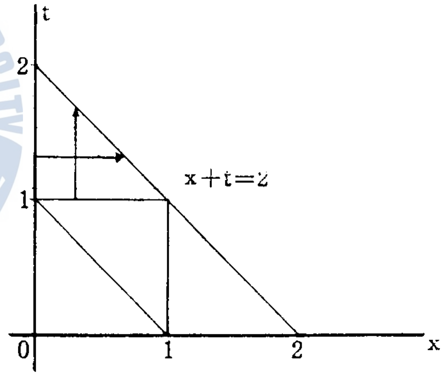
$$=1-\int_0^1(1-x)F(x)dx \quad (0<t\leqq 1)$$



$$\int_1^2 g(t)dt=\int_1^2\int_0^{2-t}F(x)dx\,dt=\int_0^1\left(\int_1^{2-x}F(x)dt\right)dx$$

$$=\int_0^1(1-x)F(x)dx \quad (1\leqq t\leqq 2)$$

$$\therefore\ \int_0^2 g(t)dt=\int_0^1 g(t)dt+\int_1^2 g(t)dt=1$$



또 分布函數 $G(u)$는

$0\leqq u\leqq 1$에서

$$G(u)=\int_0^u\left(1-\int_0^t F(x)dx\right)dt=u-\int_0^u\int_0^t F(x)dx\,dt$$

$$=u-\int_0^u F(x)\,dx\int_x^u dt=u-\int_0^u(u-x)F(x)dx \quad (0\leqq u\leqq 1)$$

$1\leqq u\leqq 2$ 에서

$$G(u)=1-\int_0^1(1-x)F(x)dx+\int_1^u\int_0^{2-t}F(x)dx\,dt$$

$$=1-\int_0^1(1-x)F(x)dx+\int_0^{2-u}(u-1)F(x)dx+\int_{2-u}^1(1-x)F(x)dx \quad (1\leqq u\leqq 2)$$

이다.

〔**定理 2**〕 定理 1의 待期時間 T의 平均값은

$$E(T)=\frac{5}{6}-\alpha_1+\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3$$

이다. 단, $\alpha_1=E(X)$, $\alpha_2=E(X^2)$, $\alpha_3=E(X^3)$

證明 $0\leqq t\leqq 1$에서는

$$E(T_1)=\int_0^1 tg(t)dt=\frac{1}{2}-\int_0^1 t\int_0^t F(x)dx\,dt$$

$$=\frac{1}{2}-\int_0^1 F(x)dx\int_x^1 tdt=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{1}{2}(1-x^2)F(x)dx$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{6}\alpha_3,$$

$1 \leqq t \leqq 2$ 에서는

$$E(T_2)=\int_1^2 t\, g(t)\, dt=\int_1^2 t\int_0^{2-t} F(x)dx\, dt=\int_0^1 F(x)\int_1^{2-x} t\, dt\, dx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\alpha_1+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\alpha_3$$

이므로

$$E(T)=\frac{1}{6}-\alpha_1+\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3$$

이다.

例 1. 버스의 遲延時間 X $(0\leqq x\leqq 1)$에 대해서 密度 $f(x)=1$일 때 待期時間 T의 分布를 求해 보자. T의 密度 $g(t)$, 分布函數 $G(t)$는 X의 分布函數가 $F(x)=x$이므로 定理 1에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}1-\int_0^t x\, dx=1-\dfrac{t^2}{2} & (0\leqq t\leqq 1)\\ \int_0^{2-t} x\, dx=\dfrac{1}{2}(2-t)^2 & (1\leqq t\leqq 2)\end{cases}$$

이며,

$$G(t)=\begin{cases}\int_0^t\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)dt=t-\dfrac{1}{6}t^3 & (0\leqq t\leqq 2)\\ \dfrac{5}{6}+\int_1^{2-t}\dfrac{1}{2}(2-t)^2\, dt=1-\dfrac{1}{6}(2-t)^3 & (1\leqq t\leqq 2)\end{cases}$$

$$E(T)=\int_0^1\left(t-\frac{t^3}{2}\right)dt+\frac{1}{2}\int_1^2(4t-4t^2+t^3)\, dt=\frac{7}{12}$$

이다.

例 2. 遲延時間 X의 密度가 $0\leqq x\leqq 1$에 대해서 $f(x)=2x$이면 分布函數 $F(x)$는 $F(x)=x^2$이다. 그러므로 待期時間 T의 密度 $g(t)$, 分布函數 $G(t)$와 平均값 $E(T)$는

$$g(t)=\begin{cases}1-\int_0^t x^2\, dx=1-\dfrac{1}{3}t^3 & (0\leqq t\leqq 1)\\ \int_0^{2-t} x^2\, dx=\dfrac{1}{3}(2-t)^3 & (1\leqq t\leqq 2)\end{cases}$$

$$G(t)=\begin{cases}\int_0^t\left(1-\dfrac{1}{3}t^3\right) dt=t-\dfrac{1}{12}t^4 & (0\leqq t\leqq 1)\\ \dfrac{11}{12}+\dfrac{1}{3}\int_1^t(2-t)^3\, dt=1-\dfrac{1}{12}(2-t)^4 & (1\leqq t\leqq 2)\end{cases}$$

$$E(T)=\frac{5}{6}-\alpha_1+\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3=\frac{8}{15}$$

이다.

每時 0分에 오는 버스의 遲延時間의 分布에서 制限條件 $0\leqq X_k\leqq 1$을 없엔 경우의 待期時間 T의 分布를 생각한다. 그러나 여기서는 時間區間 $[0,2]$에 대해서 생각한다.

〔**定理 3**〕 버스의 遲延時間의 確率變數 X_k가 서로 獨立이고, 指數分布 즉 密度가 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$일 때 時點 $0<x<1$에 到着한 사람의 待期時間 T의 密度 $g(t)$, 分布 $G(t)$, 및 期待값 $E(T)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 1-t+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} & (0\leqq t\leqq 1) \\ 2-t-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(2-t)} & (1\leqq t\leqq 2) \end{cases}$$

$$G(t)=\begin{cases} \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)t-\frac{t^2}{2}-\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t} & (0\leqq t\leqq 1) \\ \left(2-\frac{1}{\lambda}\right)t-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda(2-t)}+\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}-1 & (1\leqq t\leqq 2) \end{cases}$$

$$E(T)=\frac{5}{6}-\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^3}+\frac{2}{\lambda^3}e^{-\lambda}$$

$$=\frac{5}{6}-\alpha_1+\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3+\frac{2}{\lambda^3}e^{-\lambda}$$

證明 $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, $\int_0^t(1-e^{-\lambda x})\,dx=t+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda}$ 및 $\int_0^{2-t}(1-e^{-\lambda x})\,dx=2-t-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(2-t)}$이므로 定理 1에 의하였 위의 結果를 얻는다.

이 때 $\int_0^2 g(t)dt=1$ 이다.

註. 이 때 注意할 것은 制限條件 $0\leqq X_k\leqq 1$이 있을 때와 없을 때는 結果가 다르다. 왜냐하면 制限條件이 없으면 $\int_0^1 F(x)\,dx=[xF(x)]_0^1-\int_0^1 xf(x)dx$에서 $[xF(x)]_0^1=F(1)\neq 1$이며 $\int_0^1 xf(x)dx\neq\alpha_1$인 까닭이다.

參 考 文 獻

1. Feller, W. An Introduction to Probability Theory and Its Application. Volume Ⅱ. John Wiley & Sons New Work, 1971.
2. Papoulis, A Probability Random Variables and Stochastic Processes. MaGraw Hill. London 1965.
3. Rohatgi, V.K. An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, 1976.