

## 平行 二輪車의 速度制御에 關한 研究

하운수\* · 유영호\*\* · 하주식\*\*

### A Study on the Speed Control of the Running Robot with two Parallel Wheels

*Y. S. Ha, Y. H. Yu, J. S. Ha*

#### Abstract

A speed control method of the running robot with two parallel wheels is studied. For the optimal speed control the quadratic criterion function of the square integrals of the tracking error and the control input is used. By means of digital simulations, it is confirmed that, if there is no disturbance, the proposed method is very effective for controlling the running robot with two parallel wheels to keep its upright state stable. An effective ways to cope with the disturbance defect and conducting experiments using the actual robot are studing now.

#### 1. 서 론

최근 불안정한 시스템중의 하나인 도립진자(倒立振子)의 직립안정화에 관한 연구<sup>1)-3)</sup>에 힘입어, 차륜형 도립진자(車輪型 倒立振子)형태의 자립이동 로봇트 제어에 관한 연구 사례가 몇몇 연구자에 의해서 발표되고 있다. 그중에서도 이륜 도립진자형 로봇트(이륜차라 함)에 관한 연구로는, 同軸 二輪車의 자세제어문제에 대해서 차륜에 의한 영향을 무시하고 2차계통으로 근사화해, Routh - Hurwitz의 안정조건에 의해 비레이득을 구하는 고전제어 방식을 이용한 것<sup>4)</sup>과 평탄지 및 요철지면에 있어서의 주행제어의 실현을 위해서 자세검출 및 제어문제에 적응상태관측기를 이용하여 로봇트 제어에 필요한 정보를 얻어서 제어를 행하는 것<sup>5)</sup>이 있다. 또한 평행이륜차의 자세제어 및 주행 제

\* 日本筑波大學大學院 電子情報工學專攻

\*\* 韓國海洋大學校 教授

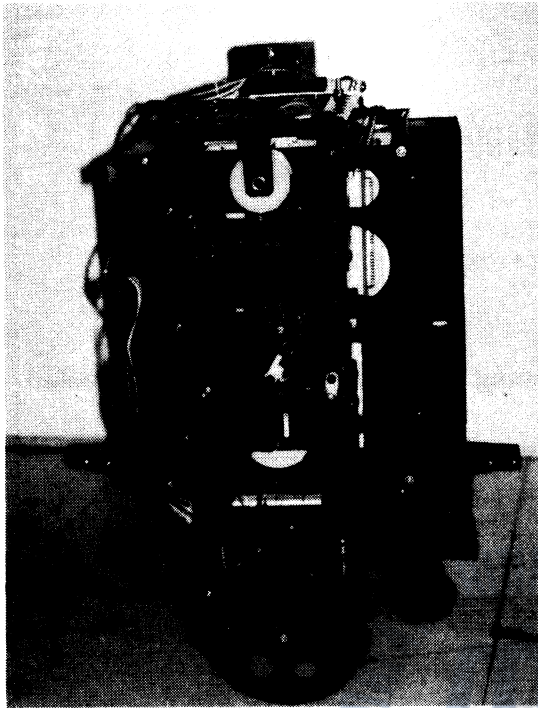


사진 1. 평행이륜차

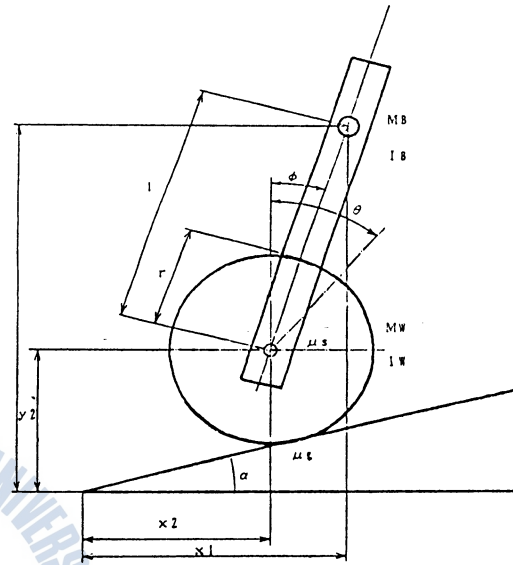


그림 1. 평행이륜차의 모델

어문제를 極配置手法에 의한 레귤레이터(Regulator)문제로 귀착시켜서 제어를 행하는 것<sup>6)</sup>도 있다. 이상의 연구등에서는 자세 검출방법의 유효성을 입증하기 위한 방법으로 이륜차의 도립상태를 유지하면서 목표지점까지 주행시키기 위한 자세와 거리제어에만 초점을 두고 있다. 그러나 로봇을 실제 환경에 응용하는 경우 단순히 목표지점까지 이동하는 것 뿐만 아니라, 어느정도의 짧은 시간내에 정확하게 목표지점에 도착할 수 있도록 하는가, 즉 로봇의 이동속도도 고려하지 않으면 안된다.

본 연구에서는 차륜형 도립진자형태의 로봇을 외란이 없는 한 안정된 자세를 유지하면서 요구되는 일정속도로 주행 가능하도록 하기 위해 주행속도의 기준입력(Reference input)에 비례하는 정상 상태에서의 로봇 본체의 기울기를 구하고 항상 그 값을 추종하도록 함으로써 로봇의 자세를 안정시키는 방법에 대해서 연구검토하고자 한다. 이를 위해 최적 레귤레이터이론을 응용해 추종오차와 제어 입력 편차에 대한 2차형식의 평가함수를 최소화 하는 최적 추종제어기를 설계한다. 상태 변수로는 로봇 본체의 기울어진 정도를 나타내는 각도(로봇 기울기 각도) 및 각속도, 차륜의 각속도만을 이용하고 있으며, 로봇 기울기 각도 및 각속도는 로봇 본체에 부착된 진동자이로(振動 Gyro)로부터 차륜의 각속도는 모터축에 부착된 로터리 엔코더(Rotary encoder)로부터 각각 얻는다.

## 2. 모델링

### 2-1. 평행이륜차의 다이내믹스

본 연구에서 대상으로 선정한 平行二輪車의 모습은 사진 1과 같다. 사진 1의 자립이동로봇에 대한 모델을 표시하면 그림 1과 같이 나타낼 수 있다. 그림 1과 같이 모델화 된 시스템을 상태방정식으로 표현하기 위해서는, 라그란지 운동방정식(Lagrange's dynamics equation)을 이용하면 편리하다. 운동방정식을 유도함에 있어서 다음과 같은 가정을 둔다.

1. 차륜은 경사면위를 미끄러짐 없이 구름 마찰하면서 운동을 한다.
2. 마찰로서는 속도에 비례하는 점성마찰만이 존재한다.
3. 평행이륜차의 운동해석은 좌우 차륜을 구별하지 않아도 가능하다.
4. 로봇의 본체는 강체이다.

이상의 가정에 근거하여 그림 1을 일반화 좌표로 표현하기 위해서 경사면과 차륜에 대해서 좀 더 상세하게 나타내면 그림 2와 같다.

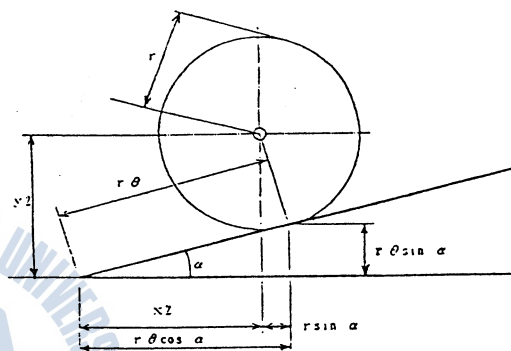


그림 2. 경사면과 차륜의 상세도

평행이륜차와 같은 시스템의 라그란지 운동방정식은 (2-1), (2-2)식으로 나타낼 수 있다.

$$d/dt(\partial T/\partial \dot{\phi}) - \partial T/\partial \phi + \partial U/\partial \phi + \partial D/\partial \dot{\phi} = Q_{\phi} \quad (2-1)$$

$$d/dt(\partial T/\partial \dot{\theta}) - \partial T/\partial \theta + \partial U/\partial \theta + \partial D/\partial \dot{\theta} = Q_{\theta} \quad (2-2)$$

단, 여기서

T : 운동에너지 (Kinetic energy)

U : 위치에너지 (Potential energy)

D : 손실에너지 함수 (Rayleigh dissipation function)

$Q_{\phi}$  : 일반화 외력

$Q_{\theta}$  : 일반화 외력

이다.

그림 1,2로부터 T, U, D를 각각 구하면

$$T = M_w (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) / 2 + M_b (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + I_w \dot{\theta}^2 / 2 + I_b \dot{\phi}^2 / 2 + I_M \{\eta(\dot{\theta} - \dot{\phi})\}^2 / 2 \quad (2-3)$$

$$U = M_w g y_2 + M_b g y_1$$

$$= M_w g (r\theta \sin \alpha + r \cos \alpha) + M_b g (r\theta \sin \alpha + r \cos \alpha + l \cos \phi) \quad (2-4)$$

$$D = \mu_s (\dot{\phi} - \dot{\theta})^2 / 2 + \mu_g \dot{\theta}^2 / 2 \quad (2-5)$$

(2-3)식 부터 (2-5)식을 (2-1)식 및 (2-2)식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 비선형 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$(M_b I^2 + \eta^2 I_M) \ddot{\phi} + \{ (M_b r l \cos(\phi + \alpha) - \eta^2 I_M) \ddot{\theta} - M_b l \sin \phi + \mu_s (\dot{\phi} - \dot{\theta}) \} = -\eta \tau_t U \quad (2-6)$$

$$\{ (M_b r l \cos(\phi + \alpha) - \eta^2 I_M) \ddot{\phi} + (M_b + M_w) r^2 + I_w + \eta^2 I_M \} \ddot{\theta} - M_b r l \sin(\phi + \alpha) \dot{\phi}^2 + g r (M_b + M_w) \sin \alpha + \mu_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}) + \mu_g \dot{\theta} = \eta \tau_t U \quad (2-7)$$

(2-6), (2-7)식의 각 상수 및 변수는 표 1과 같다.

표 1. 상수 및 변수

기호	구분	정의내용	값	단 위
M <sub>b</sub>		본체의 중량	12.20	[kg]
M <sub>w</sub>		차륜의 중량	0.51	[kg]
I <sub>b</sub>		본체의 관성모멘트	0.45	[kg.m <sup>2</sup> ]
I <sub>w</sub>		차륜의 관성모멘트	5.14E-4	[kg.m <sup>2</sup> ]
I <sub>M</sub>		모터전기자의 관성모멘트	3.2E-6	[kg.m <sup>2</sup> ]
r		차륜의 반경	0.062	[m]
l		차축의 중심에거 무게중심까지의 거리	0.143	[m]
μ <sub>s</sub>		차축의 마찰계수	0.04	[N.m/(rad/sec)]
μ <sub>g</sub>		차륜과 정지면의 마찰계수	0.038	
τ <sub>t</sub>		모터토크상수	0.02	[N.m/A]
η		차륜과 모터사이의 감속기어비	39 : 1	
g		중력가속도	9.8	[m/sec <sup>2</sup> ]
φ		로봇 본체의 기울기 각	*	[rad]
θ		차륜의 각 변위	*	[rad]
α		경사면이 이루는 각	*	[rad]
u		모터의 입력전류	*	[A]

\* 표는 변수임을 나타냄.

여기서, 로봇트가 주행할 때 본체의 기울기가 직립상태로부터 크게 벗어나지 않는 범위내에서 자세를 안정시키는 것을 고려해 동작점(φ=0)부근에서 선형근사화하는 동시에 로봇트가 평면만을 주행하는 것으로 제한하면 (2-6), (2-7)식으로부터 (2-8), (2-9)식을 얻을 수 있다.

$$(M_b I^2 + I_b + \eta^2 I_M) \ddot{\phi} + \{ M_b r l - \eta^2 I_M \} \ddot{\theta} - M_b g l \phi + \mu_s (\dot{\phi} - \dot{\theta}) = -\eta \tau_t U \quad (2-8)$$

$$\{ M_b r l - \eta^2 I_M \} \dot{\phi} + \{ (M_b + M_w) r^2 + I_w + \eta^2 I_M \} \ddot{\theta} - \mu_s \dot{\phi} + (\mu_s + \mu_g) \dot{\theta} = \eta \tau_t U \quad (2-9)$$

## 2.2. 상태방정식에 의한 표현 및 가제어성 검토

(2-8), (2-9)식에서 로봇트 본체의 기울기 각도 φ 및 각 속도 φ̇를 각각 x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, 차륜의 속도 θ를 x<sub>3</sub>로

정의하면, (2-10)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M_b l^2 + I_b + \eta^2 I_M & M_b r l - \eta^2 I_M \\ 0 & M_b r l - \eta^2 I_M & (M_b + M_w) r^2 + I_w + \eta^2 I_M \end{bmatrix} \dot{X} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ M_b g l & -\mu_s & \mu_s \\ 0 & \mu_s & -(\mu_s + \mu_g) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -\eta \tau_t U \\ \eta \tau_t U \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

(2-10)식 좌변의 행렬에 대한 소행렬을

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_b l^2 + I_b + \eta^2 I_M & M_b r l - \eta^2 I_M \\ M_b r l - \eta^2 I_M & (M_b + M_w) r^2 + I_w + \eta^2 I_M \end{bmatrix}$$

로 정의하고 소행렬의  $\det \Delta$ 를  $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$  이라 놓으면 (2-10)식은 (2-11), (2-12)식의 상태방정식으로 표현 할 수 있다.

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2-11)$$

$$Y = CX \quad (2-12)$$

단,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_3 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \\ a_5 a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} M_b g l / \Delta & -a_{21} M_b g l / \Delta \\ -\mu_s (a_{12} + a_{22}) / \Delta & \mu_s (a_{11} + a_{21}) / \Delta \\ (\mu_s a_{22} + (\mu_s + \mu_g) a_{12}) / \Delta & (-\mu_s a_{21} + (\mu_s + \mu_g) a_{11}) / \Delta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_{12} + a_{22}) \eta \tau_t / \Delta \\ (a_{11} + a_{21}) \eta \tau_t / \Delta \end{bmatrix}$$

이다.

(2-11)식으로 표현되는 시스템의 가제어성을 검토하면, 가제어행렬

$$[BAB \ A^2 B] \\ = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & a_3 b_1 + a_5 b_2 \\ b_1 & a_3 b_1 + a_5 b_2 & a_1 b_1 + a_3^2 b_1 + a_3 a_5 b_2 + a_5 (a_4 b_1 + a_6 b_2) \\ b_2 & a_4 b_1 + a_6 b_2 & a_2 b_1 + a_4 (a_3 b_1 + a_6 b_2) + a_6 a_4 b_1 + a_6 b_2 \end{bmatrix}$$

의 rank가 3이므로 이 시스템이 가제어임을 알 수 있다.

### 3. 최적제어기 설계

제어기는 로봇트가 주행중 목표치변화, 파라메타 변동 및 모델링 오차에도 불구하고 요구되는 설계사양을 만족하면서 정상편차 없이 목표치에 잘 추종하도록 설계되지 않으면 안된다. 이와같은 제어기를 설계함에 있어서, 극배치 수법으로 안정조건을 구하기 보다는 전상태의 하중을 고려할 수 있는 동시에 안정화 자유도의 결정이 손쉬운 점에서 유리한 최적 레귤레이터 이론을 적용하는 것으로 한다. 이때 차륜의 각 속도의 기준입력( $y_r$ )에 비례하는 로봇트 본체 기울기의 정상상태 값  $x_{1s}$ 를 구해  $x_{1i}$ 이  $x_{1s}$ 로 부터 벗어 났을 때, 짧은시간내에  $x_{1s}$ 값으로 되돌아 오도록 추종오차  $\Delta x_1$ 에 대한 하중을 크게함으로써 로봇트가 안정된 자세를 유지하도록 하고 있다. 제어기를 설계함에 있어 목표치 변화가 계단상인 것으로 간주해서 정상상태의 상태 벡터  $X_s$  및 제어입력  $u_s$ 의 값을 구하기 위해 (2-11), (2-12)식을 (3-1), (3-2)식과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$0 = AX_s + Bu_s \quad (3-1)$$

$$y_r = CX_s \quad (3-2)$$

(3-1), (3-2)식을 정리하면 (3-3)식과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_s \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_r \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

여기서  $\det \begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ 이면, 임의의  $y_r$ 에 대한 정상상태값을 구할 수 있다.

따라서  $X_s, u_s$ 는 (3-4)식과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} X_s \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(a_6 b_1 - a_5 b_2) / (a_1 b_2 - a_2 b_1)] y_r \\ 0 \\ y_r \\ [(a_1 a_6 - a_2 a_5) / (a_2 b_1 - a_1 b_2)] y_r \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

(2-11), (2-12)식 및 (3-1), (3-2)식으로 부터 출력  $y$ 와 기준입력  $y_r$ 의 오차 성분에 대한 시스템을 표시하면 (3-5), (3-6)식과 같이 된다.

$$\Delta \dot{X} = A\Delta X + B\Delta u \quad (3-5)$$

$$\Delta y = C\Delta X \quad (3-6)$$

$$\text{단, } \left. \begin{array}{l} X - X_s = \Delta X \\ u - u_s = \Delta u \\ y - y_r = \Delta y \end{array} \right\} \quad (3-7)$$

이다.

(3-5), (3-6)식에서  $\Delta \dot{X}$ 가 0이므로  $\Delta X$ ,  $\Delta u$ 가 0이 되지 않으면 안된다. 따라서

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta X = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta y = \lim_{t \rightarrow \infty} y - y_r = 0$$

로 되어 이 시스템은 정상편차 없이 목표치에 추종할 수 있다.

추종오차와 제어입력 편차에 대한 2차형식의 평가함수 J는 (3-8)식과 같다.

$$J = \int_0^{\infty} (\Delta X^T Q \Delta X + \Delta u^T R \Delta u) dt \quad (3-8)$$

단,  $Q=Q^T \geq 0$ ,  $R > 0$ 이다.

(6-1), (6-2)식으로 표현되는 시스템을 안정 시키면서 평가함수 J를 최소로 하는 제어입력  $\Delta u$ 는 (3-9)식과 같이 된다.

$$\Delta u = -K \Delta X \quad (3-9)$$

여기서  $K=B^T R^{-1} P$ 이고 P는 Riccati행렬 방정식  $A^T P + PA + Q - PBR - B^T P = 0$ 의 해이다.

(3-7)식 및 (3-9)식으로부터 u에 관해 정리하면 (3-10)식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u &= u_s - K \Delta X \\ &= u_s - K(X - X_s) \\ &= u_s - k_1(x_1 - x_{1s}) - k_2(x_2 - x_{2s}) - k_3(x_3 - x_{3s}) \end{aligned} \quad (3-10)$$

(3-10)식과 같은 상태 피드백을 갖는 제어시스템의 블록선도는 그림 3과 같이 나타낼 수 있다. 단,  $X_s = f(y_r)$ ,  $u_s = g(y_r)$ 이다.

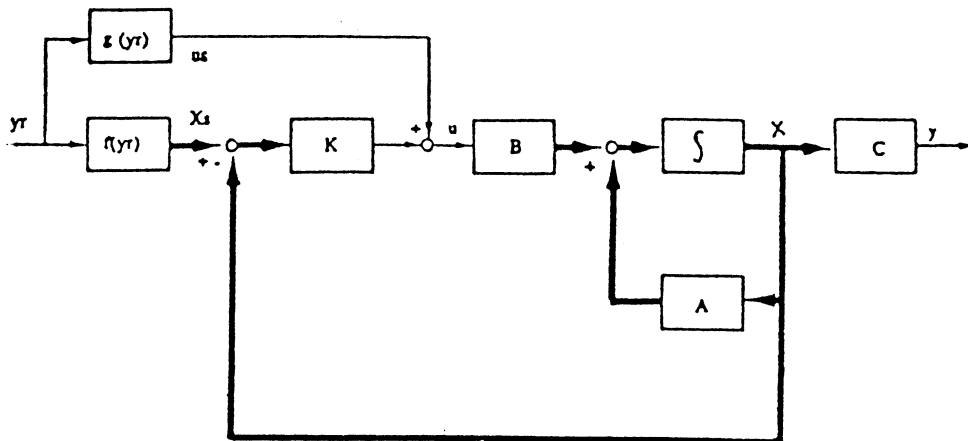


그림 3. 최적 추종제어계의 블록선도

## 4. 시뮬레이션

### 4.1 퍼라미터의 결정

표 1과 같이 실험을 통해 구해진 각 퍼라미터의 값들을 (2-11)식에 대입하여, 행렬 A, B의 각 요소를 구하면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 33.6 & -0.23 & 0.29 \\ -63.8 & 1.17 & -1.99 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.5 \\ 23 \end{bmatrix}$$

### 4.2 시뮬레이션 결과

시뮬레이션을 행함에 있어 독립진자형태의 자립이동 로봇트의 특성을 고려해, 다음과 같은 제어기의 설계 사양을 제시했다.

1. 시스템을  $\phi=0$  근방에서 선형근사화 하였으므로 로봇트 본체의 기울기 각도가  $|\phi| \leq 5^\circ$  일 것.
2. 2% 정정시간(Settling time)  $T_s \leq 2(\text{sec})$  일 것.
3. 전원(DC 12V)과 모터의 소비전력(10W)을 고려해 제어입력(Control input)  $|u| \leq 0.8(\text{A})$  일 것 (단,순간전류치는 무시).
4. 모델링 오차 및 운전중 파라메타의 변동에도 정상편차 없이 목표치에 추종할 것.(단,시스템에 외란은 존재하지 않는 것으로 간주한다.)

이상의 사양을 만족하는 응답을 갖는 폐루프계의 극을 찾기 위해 하중행렬 Q, R의 계수를 변화시켜가면서 반복 시뮬레이션 한 결과  $Q = \text{diag}\{100, 0, 1, 100\}$ ,  $R=2,000$ 일때 만족할 만한 결과가 나왔다. 이때 폐루프의 극  $\lambda_1 = -7.932$ ,  $\lambda_2 = -5.213$ ,  $\lambda_3 = -2.874$ 이었다.

다음의 응답시뮬레이션은 이때의 값을 이용한 것이다. 그림 4는 로봇트의 주행속도 0 상태( $t=0$ )에서 목표치를 5(rad/sec)까지 변화 시켰을 때 차륜의 각속도  $x_3$ , 로봇트본체의 기울기  $x_1$  및 제어입

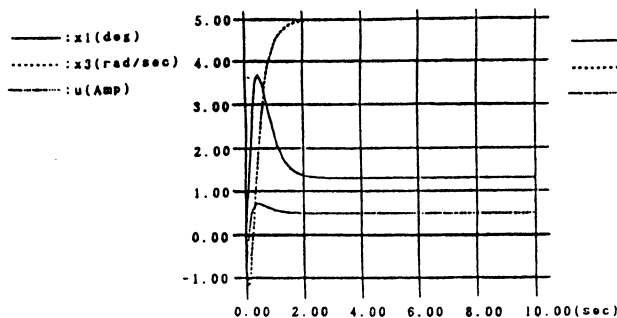


그림 4. 계단상의 입력에 대한 응답( $y^r=5 \text{ rad/sec}$ )

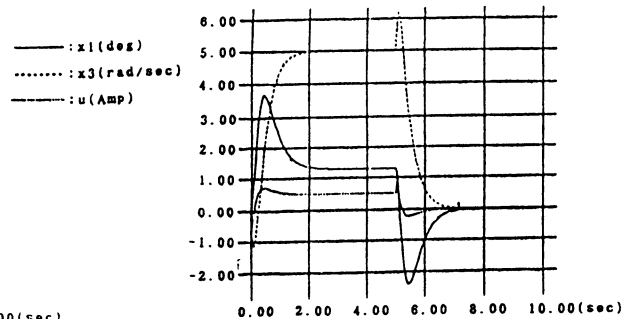


그림 5. 계단상의 입력에 대한 응답( $y^r=0 \rightarrow 5 \rightarrow 0 \text{ rad/sec}$ )



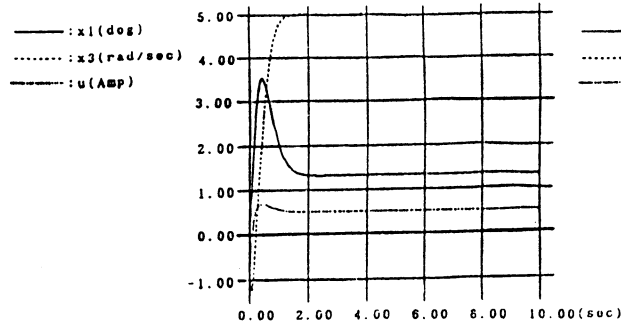


그림 6. 퍼라미터 변동시의 응답(+10% 변동)

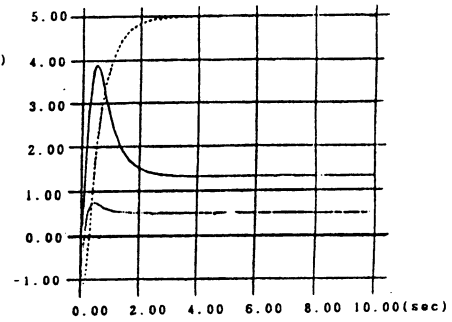


그림 7. 퍼라미터 변동시의 응답(-10% 변동)

력  $u$ 를 나타낸 것이다. 이때  $t=0$ 부근에서 나타난 현상은, 로봇트가 목표 속도까지 가속하는데 필요한 기울기를 만들기 위하여 일단 후퇴하는 부분으로 보여진다. 그림 5는 목표치를  $0(\text{rad/sec}) \rightarrow 5(\text{rad/sec}) \rightarrow 0(\text{rad/sec})$ 과 같이 변화 시켰을때의 응답을 나타내는데,  $t=5$ 에서 목표치를 0로 감소시켰을 때, 로봇트가 관성력으로 부터 안정된 자세를 유지하기 위해 일단 속도를 증가시켜 뒷쪽으로 기울어지게 하는 부분으로 보인다. 그림 6, 7은 시스템의 퍼라미터 변동에 대한 응답으로서 정상편차 없이 목표에 잘 추종하고 있음을 보여준다.

## 5. 결 론

이상의 연구로서 차륜형 독립진자 형태의 자립 이동로봇도 외란이 없는 한 안정된 자세를 유지하면서 요구되는 속도로 일정하게 주행시킬 수 있음을 알았다. 이 시뮬레이션 결과를 근거로 본 연구에서 제시한 속도제어 방법을 실제 로봇트에 적용할 경우, 로봇트가 주어진 목표지점에 가능한 한 빠른 시간내에 도착하기 위해서 출발점에서 어느 구간까지는 가속한 후 일정한 속도로 주행해서 목표지점 근방에서 감속하면서 정확한 목표지점에 정지하는 계획주행제어가 가능하게 될 것이다. 또한 이것은 장차 센서를 기반으로 한 장애물 회피 및 경로계획등에 의한 주행을 실현하기 위한 기초가 될 것이다.

## 참고문헌

- 1) 林, 嘉納, 増淵: 倒立振子の姿勢制御, 計測自動制御學會論文集, 13-5(1977).
- 2) 杉江, 井上, 木村: 結合倒立振子の安定化制御, 計測自動制御學會論文集, 14-5(1978).
- 3) 梶原, 小菅, 古田: 傾斜: されたレール上の重倒立振子の位置制御, 計測自動制御 學會論文集, 15-7(1979).
- 4) 山藤, 河村: 同軸二輪車の姿勢制御, JRSC, Vol.7, No.4.
- 5) 松本, 梶田, 谷: 第9回ロボット學會學術講演會豫告集.
- 6) 小柳, 飯田, 油田: 車輪型倒立振子タイプの自立移動ロボット, 第6回知能ロボットシンポジウム豫告集

