特殊函數를 利用한 보의 解析에 관한 研究

指導敎授 王 之錫

金 亨權, 余 旭鍾

A study on the Analysis of Beams Using a Particular Function

目 次

** 참고 문헌 **

1) 稻垣, 伊藤, 高張力鋼 低溫用鋼의 熔接
産報出版 P.120
2) 中山, 松本, 稻垣, 建築鋼構造繼手의 各種
熔接方法에서의 熔接에 關한 硏究
熔接学会誌. Vol. 45, (1974) No.11, P1103
3) 菊田, 荒木, 鋼의 水素에 起因하는 破壞와
破面形態의 分析
Vol. 45, (1976) No.12, P985
4) 松井, 熔接欠陷의 発生機構와 防止対策
日本学術会議 熔接硏究連絡委員会,
熔接 symposium 資料 (1977). P1
5) 荒積, 金子秀夫, 三本木貢治, 樋口隆吉, 盛利貞,
鉄鋼의 熔接 (1974). P103
6) 荒積, 金子秀夫, 三本木貢治, 樋口隆吉, 盛利貞,
鉄鋼의 熔接 (1974). P107
7) 鉄鋼熔接部의 破面写真集,
黒木出版社, 大阪 P398~403, (1975).

1. 序 論

보(beam)란, 가늘고 긴 棒이 適当한 方法으로 支持되고 그 軸線에 수직인 荷重(橫荷重) 또는 偶力荷重을 받을때 이 棒을 일컫는다.

이 보의 応力이나 変形, 처짐등을 求하는데(以下, 解析이라 칭한다) 있어서는 지금까지 常例的으로 면적모멘트法, 3-Moment法, 重積分法, 경첩법 등의 方法들이 利用되어 왔다.

이 같은 方法들은 支点이 불과 두 세개 정도일때는 筆算으로 별 어려움 없이 보의 解析을 行할 수 있지만 아주 복잡한 形態의 荷重이 作用한다든지 支点이 네개 以上의 多支点 連續보일 경우에는 筆算으로 처리하기에 너무 복잡하고 어려운 解析이 된다.

本 研究에서는 하나의 特殊函數를 定義하고 이 函數를 利用하여 보의 解析을 行하므로써 實際의 境遇와 같이 彈性支点이나 여러 形態의 荷重이 作用할때, 또는 多數의 支持点을 갖는 경우에 보의 解析이 매우 쉽게 됨을 보이고, 또한 이 特殊函數를 利用하면 사람의 손으로는 거의 풀기가 不可能한 多支持点의 連續보의 解析도 Computer를 利用한 行列(Matrix) 活用으로 보다 쉽게 解析할 수가 있음을 보였다.

2. 剪斷力과 굽힘모멘트.

剪斷力 V와 굽힘모멘트 M의 부호는 약속에 依한 것이므로 各 著書마다 다를수가 있으나 本 論文에서는 아래와 같이 定義한다.

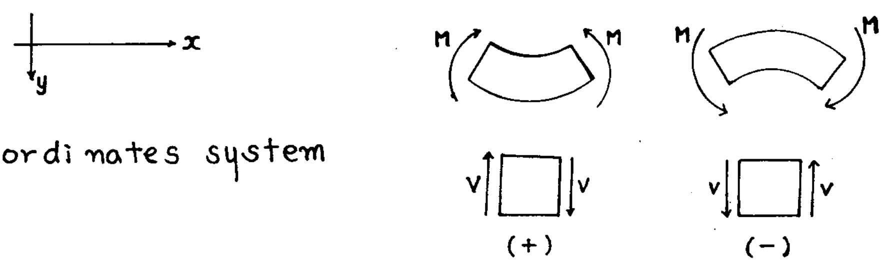


Fig.1 Signs of Bending Moment and Shear force.

剪斷力과 굽힘모멘트의 부호를 Fig.1과 같이 定義하면 分布荷重 ω, 剪斷力 V, 굽힘모멘트 M과의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{dV}{dx} = -\omega \qquad (1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad (3)$$

여기서, EI는 굽힘剛性係數이고 E는 Young係數이며, I는 斷面二次 Moment이며, 또한 y는 처짐이다.

3. 特殊函數

다음과 같이 定義되는 函數 $f(x)$를 생각한다.

$$f(x) = \langle x-a \rangle = \frac{x-a+|x-a|}{2} \qquad (4)$$

即, 上記 式은 꺾임 괄호안의 값이 음의 값을 가질 경우, $f(x)$의 값은 0(零)이 되며 양의 값을 가질 경우는 꺾임괄호가 없는 경우와 같은 값이 된다.

即, $x \leqq a$ 일때 $f(x) = 0$

$x \geqq a$ 일때 $f(x) = x-a$ 가 된다.

(a) (b)

Fig. 2 The particular function and its derivative.

또한, $f'(x) = \langle x-a \rangle'$ 로 表示할수 있으며 이 函數는 Fig. 2 (b) 에서 보이는 바와 같이 $x=a$에서 2價인 不連續函數이다.

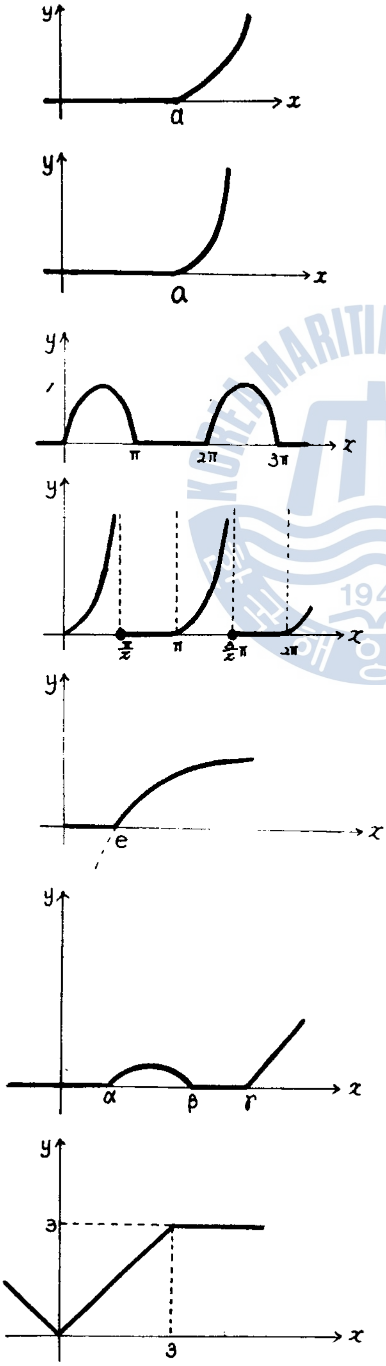
即, $\lim_{x \to a+} \langle x-a \rangle' = 1$

$\lim_{x \to a-} \langle x-a \rangle' = 0$ 이다.

한편 이 函數의 積分은 다음과 같이 된다.

$$\int_{-\infty}^{x} \langle x-a\rangle^{n} dx = \frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \quad n \geq 0 \qquad (5)$$

위에서, 定義한 函數를 利用하여 몇 가지 形態의 函數를 나타내면 Fig. 3 과 같다.



$f(x) = \langle x-a\rangle^2$

$f(x) = \langle x-a\rangle^3$

$f(x) = \langle \sin x\rangle$

$f(x) = \langle \tan x\rangle$

$f(x) = \langle \log_e x\rangle$

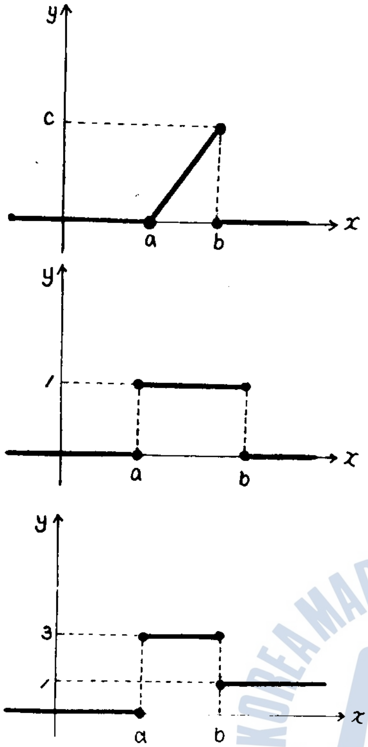
(但, $x > 0$)

$f(x) = \langle ax^3 + bx^2 + cx + d\rangle$

$= \langle a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\rangle$

(但, $a>0$, $\alpha<\beta<\gamma$)

$f(x) = |x - \langle x-3\rangle|$



$$f(x)=\frac{c}{b-a}\langle x-a\rangle\{\langle x-a\rangle^{0}-\langle x-b\rangle^{0}\}$$

(但, $a<b$)

$$f(x)=\langle x-a\rangle^{0}-\langle x-b\rangle^{0}$$

$$f(x)=3\langle x-a\rangle^{0}-2\langle x-b\rangle^{0}$$

Fig. 3 Various example of particular function.

4. 보의 解析에의 適用

앞에서 定義한 函數의 特殊한 성질을 利用하면 보의 解析에도 適用시킬 수 있다.

即, 多數의 荷重이 作用하는 보의 경우, 荷重의 作用点에서 剪断力이 不連續이 되므로 앞에서 定義한 函數를 利用하여 表示하면 解析이 簡單하여진다.

다음에 몇가지 例를 들어 說明하고자 한다.

4.1 單純보 (Simple-supported beam)

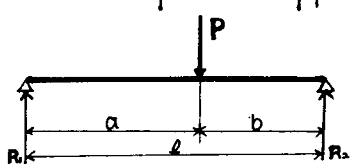


Fig. 4. Free body diagram of simple supported beam.

평형조건 ($\Sigma F = 0$, $\Sigma M = 0$) 으로 부터,

$$R_1 = \frac{b}{l}P \quad , \quad R_2 = \frac{a}{l}P$$ 가 된다.

따라서, $V = R_1\langle x\rangle^{\prime} - P\langle x-a\rangle^{\prime} + R_2\langle x-l\rangle^{\prime} + C_1$

$x = 0^+$ 일 때 $V = R_1$ 의 경계조건으로 부터

$C_1 = 0$ 이 된다.

$$\therefore M = R_1\langle x\rangle - P\langle x-a\rangle + R_2\langle x-l\rangle + C_2 = -EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

自由端에서의 Moment는 零이므로 $C_2 = 0$

$$\therefore EI\frac{dy}{dx} = -\frac{R_1}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{P}{2}\langle x-a\rangle^2 + C_3$$

$$EIy = -\frac{R_1}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3 + C_3x + C_4$$

$x = 0$, $x = l$ 일 때의 처짐은 없으므로 $C_4 = 0$, $C_3 = -\frac{Pb(l^2-a^2)}{6l}$

따라서, 彈性曲線은

$$y = \frac{1}{EI}\left\{-\frac{Pb}{6l}x^3 + \frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{Pb}{6l}(l^2-a^2)x\right\}$$

한편, 一般的으로 使用하는 重積法에 依한 解析은 다음과 같다.

1) $0 < x < a$ 인 경우 ; $M_x = \frac{Pb}{l}x$

2) $a < x < l$ 인 경우 ; $M_x = \frac{Pb}{l}x - P(x-a)$

$\therefore$ 1) $0 < x < a$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l}x$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Pb}{2l}x^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{Pb}{6l}x^3 + C_1x + C_2$$

2) $a < x < l$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l}x + P(x-a)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Pb}{2l}x^2 + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_3$$

$$EIy = -\frac{Pb}{6l}x^3 + \frac{P(x-a)^3}{6l} + C_3x + C_4.$$

여기서, C_1, C_2, C_3, C_4 는 다음의 조건에서 구할 수 있다.

(1) $x=0$, $y=0$　　(2) $x=l$, $y=0$

(3) $x=a$, $\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}$　　(4) $x=a$, $y_1=y_2$

$$\therefore C_2=C_4=0 \quad , \quad C_1=C_3=\frac{Pb}{6l}(l^2-b^2)$$

∴ 1) 에서 , $EIy=\frac{Pb}{6l}x(l^2-b^2-x^2)$

2) 에서 , $EIy=\frac{Pb}{6l}\left\{\frac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3\right\}$

4.2 集中荷重과 等分布荷重을 同時에 받는 連續보.

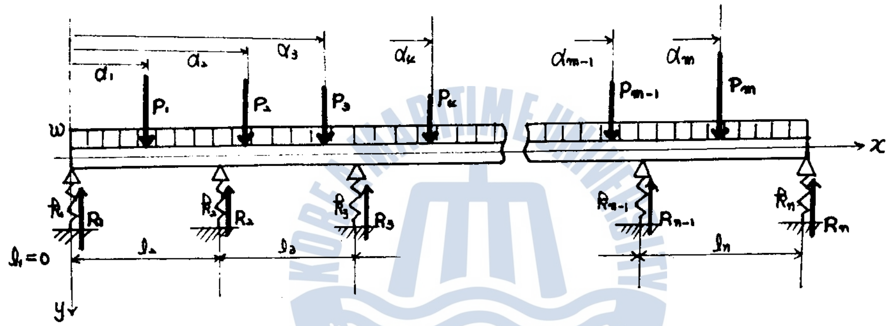


Fig. 5 Free body diagram of continous beam.

실제의 연속보에 있어서는 강성지점이 아니고 彈性支点이므로 위의 Fig. 5 와 같이 表示된다.

$\frac{dV}{dx}=-\omega$ 이므로

$$V=-\omega x+R_1\langle x-l_1\rangle^0+R_2\langle x-(l_1+l_2)\rangle^0+\cdots+R_n\langle x-(l_1+l_2+\cdots+l_n)\rangle^0$$
$$-\{P_1\langle x-a_1\rangle^0+P_2\langle x-a_2\rangle^0+\cdots+P_m\langle x-a_m\rangle^0\}+C_1$$

여기서, $L_k=\sum_{i=1}^{k}l_i$ 라 하면

$$M=-\frac{\omega}{2}x^2+\sum_{i=1}^{n}R_i\langle x-L_i\rangle-\sum_{j=1}^{m}P_j\langle x-a_j\rangle+C_2$$

自由端 ($x=0$) 에서는 Moment 가 0 이므로 $C_2=0$

$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M$ 이므로

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{\omega}{6}x^3-\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i\langle x-L_i\rangle^2}{2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{P_j\langle x-a_j\rangle^2}{2}+C_3 \quad \cdots ①$$

$$EIy=\frac{\omega}{24}x^4-\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i\langle x-L_i\rangle^3}{6}+\sum_{j=1}^{m}\frac{P_j\langle x-a_j\rangle^3}{6}+C_3x+C_4 \cdots ②$$

평형 조건으로 부터.

$$\Sigma F = 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} R_i - \sum_{j=1}^{m} P_j - \omega L_n = 0 \qquad \cdots (a)$$

$$\Sigma M = 0 \; ; \; \sum_{j=1}^{m} P_j \cdot \alpha_j + \frac{\omega}{2} L_n^2 - \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot L_i = 0 \qquad \cdots (b)$$

* boundary condition *

1) $x = 0 \; (= L_1) \; ; \; y_{x=L_1} = \frac{R_1}{k_1}$

2) $x = L_2 \; ; \; y_{x=L_2} = \frac{R_2}{k_2}$

⋮

n) $x = L_n \; ; \; y_{x=L_n} = \frac{R_n}{k_n}$

卽, 式 (a), (b) 와 境界條件 1) ~ n) 으로 부터 未知數 $C_3, C_4, R_1, R_2 \cdots R_n$ 을 구할 수 있다.

1) $x = L_1$ 일때 , $y = \frac{R_1}{k_1}$

$$\therefore y = \frac{C_4}{EI} = \frac{R_1}{k_1} \qquad \therefore C_4 = \frac{EIR_1}{k_1}$$

2) $x = L_2$ 일때 , $y = \frac{R_2}{k_2}$

$$y = \frac{1}{EI}\left\{ \frac{\omega}{24} L_2^4 - \frac{R_1}{6} L_2^3 + \sum_{j=1}^{m} P_j \langle L_2 - \alpha_j \rangle^3 + C_3 \cdot L_2 + \frac{R_1}{k_1} EI \right\} = \frac{R_2}{k_2}$$

$$\therefore C_3 = -\frac{EI}{L_2}\left\{ \frac{R_1}{k_1} - \frac{R_2}{k_2} \right\} - \frac{L_2^2}{6}\left\{ \frac{\omega}{4} L_2 - R_1 \right\} - \frac{1}{6L_2} \sum_{j=1}^{m} P_j \langle L_2 - \alpha_j \rangle^3$$

$$\therefore EIy = \frac{\omega}{24} x^4 - \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i \langle x - L_i \rangle^3}{6} + \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j \langle x - \alpha_j \rangle^3}{6}$$

$$- \left\{ \frac{EI}{L_2}\left(\frac{R_1}{k_1} - \frac{R_2}{k_2} \right) + \frac{L_2^2}{6}\left(\frac{\omega L_2}{4} - R_1 \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j \langle L_2 - \alpha_j \rangle^3}{6L_2} \right\} x + \frac{R_1 \cdot EI}{k_1}$$

$$= \frac{\omega}{24} x^4 - \frac{\omega}{24} L_2^3 \cdot x - \frac{x}{6L_2} \sum_{j=1}^{m} P_j \langle L_2 - \alpha_j \rangle^3 + \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j \langle x - \alpha_j \rangle^3}{6}$$

$$- R_1 \left\{ \frac{\langle x \rangle^3}{6} + \frac{EI}{L_2 \cdot k_1} x - \frac{L_2^2}{6} x - \frac{EI}{k_1} \right\} - R_2 \left\{ \frac{\langle x - L_2 \rangle^3}{6} - \frac{EI x}{L_2 \cdot k_2} \right\} - \sum_{i=3}^{n} \frac{R_i \langle x - L_i \rangle^3}{6}$$

위의 式으로 부터,

$$h(x) = \left\{ \frac{\omega}{24} x^4 - \frac{\omega}{24} L_2^3 \cdot x - \frac{x}{6L_2} \sum_{j=1}^{m} P_j \langle L_2 - \alpha_j \rangle^3 + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{m} P_j \langle x - \alpha \rangle^3 \right\} \frac{1}{EI}$$

$$f(x) = \left\{ \frac{\langle x \rangle^3}{6} - \frac{EI}{L_2 \cdot k_1} x + \frac{L_2^2}{6} x + \frac{EI}{k_1} \right\} \frac{1}{EI}$$

$$g(x) = \left\{ \frac{1}{6} \langle x - L_2 \rangle^3 - \frac{EI}{L_2 \cdot k_2} x \right\} \cdot \frac{1}{EI}$$

라 두면 彈性曲線은 아래와 같이 나타내어 진다.

$$y = -\sum_{i=3}^{m} \frac{R_i \langle x - L_i \rangle^3}{6EI} + R_1 \cdot f(x) + R_2 \cdot g(x) + h(x)$$

다시, 경계조건을 使用하면,

3) $x = L_3$ 일때, $y = \frac{R_3}{k_3}$

$$y_{x=L_3} = h(L_3) + R_1 \cdot f(L_3) + R_2 \cdot g(L_3) - \sum_{i=3}^{m} \frac{R_i \langle L_3 - L_3 \rangle^3}{6EI} = \frac{R_3}{k_3}$$

(以下, $h(L_i)$, $f(L_i)$, $g(L_i)$는 편의상 h_i, f_i, g_i로 表記)

4) $x = L_4$ 일때, $y = \frac{R_4}{k_4}$

$$y_{x=L_4} = h_4 + R_1 \cdot f_4 + R_2 \cdot g_4 - \frac{R_3}{6EI} \langle L_4 - L_3 \rangle^3 = \frac{R_4}{k_4}$$

5) $x = L_5$ 일때, $y = \frac{R_5}{k_5}$

$$y_{x=L_5} = h_5 + R_1 \cdot f_5 + R_2 \cdot g_5 - \frac{R_3}{6EI} \langle L_5 - L_3 \rangle^3 - \frac{R_4}{6EI} \langle L_5 - L_4 \rangle^3 = \frac{R_5}{k_5}$$

6) $x = L_6$ 일때, $y = \frac{R_6}{k_6}$

$$y_{x=L_6} = h_6 + R_1 \cdot f_6 + R_2 \cdot g_6 - \frac{1}{6EI} \{ R_3 \langle L_6 - L_3 \rangle^3 + R_4 \langle L_6 - L_4 \rangle^3 + R_5 \langle L_6 - L_5 \rangle^3 \} = \frac{R_6}{k_6}$$

$\vdots$

n−1) $x = L_{n-1}$ 일때, $y = \frac{R_{n-1}}{k_{n-1}}$

$$y_{x=L_{n-1}} = h_{n-1} + R_1 f_{n-1} + R_2 \cdot g_{n-2} - \frac{1}{6EI} \{ R_3 \langle L_{n-1} - L_3 \rangle^3 + R_4 \langle L_{n-1} - L_4 \rangle^3 + \cdots$$
$$\cdots + R_{n-1} \langle L_{n-1} - L_{n-1} \rangle^3 \} = \frac{R_{n-1}}{k_{n-1}}$$

n) $x = L_n$ 일때, $y = \frac{R_n}{k_n}$

$$y_{x=L_n} = h_n + R_1 \cdot f_n + R_2 \cdot g_n - \frac{1}{6EI} \{ R_3 \langle L_n - L_3 \rangle^3 + R_4 \langle L_n - L_4 \rangle^3 + \cdots$$
$$\cdots + R_{n-1} \langle L_n - L_{n-1} \rangle^3 + R_n \langle L_n - L_n \rangle^3 \} = \frac{R_n}{k_n}$$

또한, 평형조건에서

$\Sigma F = 0$; $R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{j=1}^{m} P_j + \omega L_n$

$\therefore -h_1 = \sum_{j=1}^{m} P_j + \omega \cdot L_n$ 이라 두고,

$\Sigma M = 0$; $R_1 \cdot L_1 + R_2 \cdot L_2 + \cdots + R_n \cdot L_n = \sum_{j=1}^{m} P_j \cdot \alpha_j + \frac{\omega}{2} L_n^2$

$\therefore -h_2 = \sum_{j=1}^{m} P_j \cdot \alpha_j + \frac{\omega}{2} L_n^2$ 이라면,

(a)式 은 $R_1 + R_2 + \cdots\cdots + R_n + h_1 = 0$ $\cdots$ (a)'

(b)式 은 $R_1 \cdot L_1 + R_2 \cdot L_2 + \cdots\cdots + R_n \cdot L_n + h_2 = 0$ $\cdots$ (b)'

그러므로, 위의 (a)', (b)' 式과 경계조건으로 부터 얻은 3) ~ n) 까지의 式으로 n원 一次 연립방정식을 세울수 있으며, n차 정방행렬을 이용해서 R_1, $R_2, \cdots$ R_n을 구할 수 있다.

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & \cdots & L_{n-1} & L_n \\
f_3 & g_3 & -\frac{1}{k_3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
f_4 & g_4 & -\frac{\langle L_4-L_3\rangle^3}{6EI} & -\frac{1}{k_4} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
f_5 & g_5 & -\frac{\langle L_5-L_3\rangle^3}{6EI} & -\frac{\langle L_5-L_3\rangle^3}{6EI} & -\frac{1}{k_5} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
f_i & g_i & -\frac{\langle L_i-L_3\rangle^3}{6EI} & -\frac{\langle L_i-L_4\rangle^3}{6EI} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
f_{n-2} & g_{n-2} & -\frac{\langle L_{n-2}-L_3\rangle^3}{6EI} & -\frac{\langle L_{n-2}-L_4\rangle^3}{6EI} & \cdots & -\frac{1}{k_{n-2}} & 0 & 0 \\
f_{n-1} & g_{n-1} & -\frac{\langle L_{n-1}-L_3\rangle^3}{6EI} & -\frac{\langle L_{n-1}-L_4\rangle^3}{6EI} & \cdots & -\frac{\langle L_{n-1}-L_{n-2}\rangle^3}{6EI} & -\frac{1}{k_{n-1}} & 0 \\
f_n & g_n & -\frac{\langle L_n-L_3\rangle^3}{6EI} & -\frac{\langle L_n-L_4\rangle^3}{6EI} & \cdots & -\frac{\langle L_n-L_{n-2}\rangle^3}{6EI} & -\frac{\langle L_n-L_{n-1}\rangle^3}{6EI} & -\frac{1}{k_n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -h_1 \\ -h_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ -h_n \end{pmatrix}
$$

※ 別表 1.에 첨부된 Computer Program은 위의 一般的인 경우의 解法이며, 出力된 값은 간단한 4支点 連續보에 等分布 荷重이 作用하고 있을때의 두가지 경우를 Data 입력해서 얻은 값이다.

5. 結 論

이상의 考察을 통해, 特殊函數를 利用하여 보의 解析에 効率的인 方法을 제시했다.

특히 節 4.2의 경우와 같이 荷重関係가 복잡할 때 더욱 有効함은 앞에서 서술한 바이다.

그러나, 앞서 考察된 내용은 断面이 일정한 境遇에 局限시킬 수 밖에 없었음을 밝혀두는 바이다.

이 문제는 실제 構造物에 직접 適用시킬 수 없는 가장 큰 限界로 여겨지며 따라서 이 点에

대한 충분한 硏究가 계속 이루어져야 할 것으로 생각되며 수학적 재음미를 통해서 이 장벽도 넘을 수 있을 것으로 생각된다.

그리고, 앞서 다룬 彈性支点의 多支点보의 解析에 대한 一例는 균일斷面 連續보에는 상당히 有用할 것으로 여겨진다.

◦ 參考文獻

1) S. H. Crandall, N. C. Dahl & T. J Lardner, "An Introduction to the Mechanics of Solids"
2) S. P. Timoshenko & D. H. Young, "Elements of Strength of Materials"
3) 宋 森弘, 共著 材料力学, 東明社, 서울, 1979
4) 李 東煥, 張 東一, 應用力学, 文佑社, 서울 1981

※ 別表 1.

```
ISN    STNO.   SOURCE STATEMENT

       C       PROGRAMED BY M4 THE MEMBER OF SMESG
               DIMENSION X(50),X1(50),X2(50),P(50),ALPA(50),KK(50)
               DIMENSION V1(15,15),V2(15,15),V3(50),V4(50),V5(50),V6(50)
               DIMENSION V7(50),V8(50),SUM1(50),H(50),F(50),G(50)
               DIMENSION A(20,20),B(20,20),HH(50),HG(50)
               REAL II,KK
             9 READ(7,10) NN,M,W,E,D,N
            10 FORMAT(2I5,3F10.0,I5)
               IF(NN.EQ.0) GO TO 11
               READ(7,15) (X(I),I=1,NN)
               READ(7,15) (KK(I),I=1,NN)
               READ(7,15) (P(I),I=1,M)
               READ(7,15) (ALPA(I),I=1,M)
            15 FORMAT(8F10.0)
               L=NN-1
               DO 200 I=1,L
               J=I+1
               X1(I)=X(J)-X(I)
           200 CONTINUE
               DO 211 I=1,NN
           211 SUM1(I)=0
               SUM2=0
               SUM3=0.
               SUM4=0.
               IF(M.EQ.0) GO TO 100
            99 DO 205 I=1,NN
               DO 205 J=1,M
               V1(I,J)=X(I)-ALPA(J)
               IF(V1(I,J).LT.0) V1(I,J)=0
               V2(I,J)=P(J)*V1(I,J)**3/6.0
           205 SUM1(I)=SUM1(I)+V2(I,J)
               DO 210 I=1,M
               V3(I)=X(2)-ALPA(I)
               IF(V3(I).LT.0) V3(I)=0
               V4(I)=V3(I)**3
           210 SUM2=SUM2+V4(I)
```

```
C       FOR H(1),H(2)**
        DO 206 I=1,M
        SUM3=SUM3+P(I)
        SUM4=SUM4+P(I)*ALPA(I)
    206 CONTINUE
C       FOR COEFFICIENTS **
    100 II=3.1415926*D**4/64.0
        Z0=E*II
        Z1=Z0/(X(2)*KK(1))
        Z2=X(2)**2/6.0
        Z3=Z0/KK(1)
        DO 220 I=1,NN
        V5(I)=X(I)-X(2)
        IF(V5(I).LT.0) V5(I)=0
    220 CONTINUE
C       FOR H(I),F(I),G(I) **
        H(1)=-(SUM3+W*X(NN))
        H(2)=-(SUM4+W*X(NN)**2/2.0)
        DO 215 I=1,NN
        F(I)=(X(I)**3/6.0+Z1*X(I)-Z2*X(I)-Z3)/Z0
        G(I)=(V5(I)**3/6.0-Z1*X(I))/Z0
    215 CONTINUE
C       FOR A-MATRIX **
        DO 225 I=1,2
        HG(I)=-H(I)
        DO 225 J=1,NN
        IF(I.EQ.1) A(I,J)=1
        IF(I.EQ.2) A(I,J)=X(J)
    225 CONTINUE
        DO 226 I=3,NN
        DO 226 J=1,2
        IF(J.EQ.1) A(I,J)=F(I)
        IF(J.EQ.2) A(I,J)=G(I)
    226 CONTINUE
        DO 227 I=3,NN
        H(I)=(-W*X(I)**4/24.0+W*X(2)**3*X(I)/24.0+SUM2*X(I)/(6.0*X(2))-
       1SUM1(I))/Z0
        HG(I)=-H(I)
        DO 227 J=3,NN
        IF(I.EQ.J) A(I,J)=1.0/KK(I)
        IF(I.LT.J) A(I,J)=0
        IF(I.GT.J) A(I,J)=(X(I)-X(J))**3/(6.0*Z0)
    227 CONTINUE
        WRITE(8,48)
     48 FORMAT(///10X,'A-MATRIX')
        DO 228 I=1,NN
    228 WRITE(8,49) (A(I,J),J=1,NN)
     49 FORMAT(10X,10E15.6)
        WRITE(8,50)
     50 FORMAT(10X,'H(I)',20X,'F(I)',20X,'G(I)')
        WRITE(8,55) (H(I),F(I),G(I),I=1,NN)
     55 FORMAT(5X,E15.6,9X,E15.6,9X,E15.6)
        CALL INVERS(A,NN,HG,N,DET)
        DO 230 I=1,NN
        HH(I)=HG(I)
        DO 230 J=1,NN
        B(I,J)=A(I,J)
    230 CONTINUE
        WRITE(8,56)
     56 FORMAT(10X,'A-INVERSE')
        DO 235 I=1,NN
    235 WRITE(8,57) (B(I,J),J=1,NN)
     57 FORMAT(10X,10E15.6)
        WRITE(8,60)
     60 FORMAT(//,10X,'HH(I)')
        WRITE(8,65) (HH(I),I=1,NN)
     65 FORMAT(10X,10E15.6)
        GO TO 9
     11 STOP
        END
```

```
ISN     STNO.   SOURCE STATEMENT

  1             SUBROUTINE INVERS(A,N,B,M,DET)
        C       THIS PROGRAM IS FOR MATRIX INVERSION AND SIMULTANEOUS
        C       LINEAR EQUATIONS
  2             DIMENSION A(20,20),B(20,20),IPVOT(30),INDEX(30,2),PIVOT(30)
  3             EQUIVALENCE(IROW,JROW),(ICOL,JCOL)
        C       FOLLOWING 3 STATEMENTS FOR INITIALIZATION
  4             DET=1.0
  5             DO 17 J=1,N
  6          17 IPVOT(J)=0
  7             DO 135 I=1,N
        C       FOLLOWING 12 STATEMENTS FOR SEARCH FOR PIVOT ELEMENT
  8             T=0
  9             DO 9 J=1,N
 10             IF(IPVOT(J).EQ.1) GO TO 9
 11          13 DO 23 K=1,N
 12             IF(IPVOT(K)-1) 43,23,81
 13          43 IF(ABS(T).GE.ABS(A(J,K))) GO TO 23
 14          83 IROW=J
 15             ICOL=K
 16             T=A(J,K)
 17          23 CONTINUE
 18           9 CONTINUE
 19             IPVOT(ICOL)=IPVOT(ICOL)+1
        C       FOLLOWING 15 STATEMENTS TO PUT PIVOT ELEMENT ON DIAGONAL
 20             IF(IROW.EQ.ICOL) GO TO 109
 21          73 DET=-DET
 22             DO 12 L=1,N
 23             T=A(IROW,L)
 24             A(IROW,L)=A(ICOL,L)
 25          12 A(ICOL,L)=T
 26             IF(M.LE.0) GO TO 109
 27          33 DO 2 L=1,M
 28             T=B(IROW,L)
 29             B(IROW,L)=B(ICOL,L)
 30           2 B(ICOL,L)=T
 31         109 INDEX(I,1)=IROW
 32             INDEX(I,2)=ICOL
 33             PIVOT(I)=A(ICOL,ICOL)
 34             DET=DET*PIVOT(I)
        C       FOLLOWING 6 STATEMENTS TO DIVIDE PIVOT ROW BY PIVOT ELEMENT
 35             A(ICOL,ICOL)=1.0
 36             DO 205 L=1,N
 37         205 A(ICOL,L)=A(ICOL,L)/PIVOT(I)
 38             IF(M.LE.0) GO TO 347
 39          66 DO 52 L=1,M
 40          52 B(ICOL,L)=B(ICOL,L)/PIVOT(I)
        C       FOLLOWING 10 STATEMENTS TO REDUCE NON-PIVOT ROWS
 41         347 DO 135 L1=1,N
 42             IF(L1.EQ.ICOL) GO TO 135
 43          21 T=A(L1,ICOL)
 44             A(L1,ICOL)=0
 45             DO 89 L=1,N
 46          89 A(L1,L)=A(L1,L)-A(ICOL,L)*T
 47             IF(M.LE.0) GO TO 135
 48          18 DO 68 L=1,M
 49          68 B(L1,L)=B(L1,L)-B(ICOL,L)*T
 50         135 CONTINUE
 51         222 DO 3 I=1,N
 52             L=N-I+1
 53             IF(INDEX(L,1).EQ.INDEX(L,2)) GO TO 3
 54          19 JROW=INDEX(L,1)
 55             JCOL=INDEX(L,2)
 56             DO 549 K=1,N
 57             T=A(K,JROW)
 58             A(K,JROW)=A(K,JCOL)
 59             A(K,JCOL)=T
 60         549 CONTINUE
 61           3 CONTINUE
 62          81 RETURN
 63             END
```

(1

A-MATRIX

0.100000E 01	0.100000E 01	0.100000E 01	0.100000E 01
0.000000E 00	0.400000E 02	0.900000E 02	0.150000E 03
0.140133E-01	-0.221766E-01	0.100000E-01	0.000000E 00
0.356099E-01	-0.340568E-01	0.558771E-03	0.100000E-01

H(I)	F(I)	G(I)
-0.450000E 03	-0.100000E-01	0.000000E 00
-0.337500E 05	-0.194018E-08	-0.100000E-01
-0.116120E 00	0.140133E-01	-0.221766E-01
-0.963588E 00	0.356099E-01	-0.340568E-01

A-INVERSE

0.533230E 00	-0.473549E-02	-0.116931E 02	0.177094E 02
0.472516E 00	-0.282991E-02	-0.215140E 02	-0.480295E 01
0.300646E 00	0.360226E-03	0.686752E 02	-0.354680E 02
-0.306392E 00	0.720517E-02	-0.354680E 02	0.225616E 02

HH(I)

0.958374E 02	0.109996E 03	0.121247E 03	0.122920E 03

(2

A-MATRIX

0.100000E 01	0.100000E 01	0.100000E 01	0.100000E 01
0.000000E 00	0.100000E 03	0.200000E 03	0.300000E 03
0.255214E-01	-0.174131E-01	0.100000E-01	0.000000E 00
0.820856E-01	-0.930477E-02	0.258690E-02	0.100000E-01

H(I)	F(I)	G(I)
-0.900000E 03	-0.100000E-01	0.000000E 00
-0.135000E 06	-0.388035E-08	-0.999999E-02
-0.270072E 01	0.255214E-01	-0.174131E-01
-0.151101E 02	0.820856E-01	-0.930477E-02

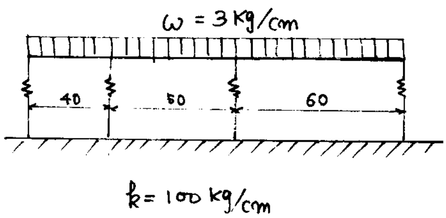
A-INVERSE

0.166881E 00	-0.907660E-03	-0.126191E 01	0.105417E 02
0.781882E 00	-0.256421E-02	-0.265776E 02	-0.126193E 01
0.935595E 00	-0.214860E-02	0.569409E 02	-0.291014E 02
-0.884357E 00	0.562047E-02	-0.291014E 02	0.198215E 02

HH(I)

0.183537E 03	0.266679E 03	0.266031E 03	0.183753E 03

(1 의 경우



(2 의 경우