

彈性支點을 가진 보의 解法에 關한 研究

金喜澈 · 閔右泓 · 王之錫 · 朴錫柱 · 金義珩

A study on the analytic method of elastically supported beams

Kim, Hee Cheol · Min, Woo Hong · Wang, Jee Seok · Park, Sok Ju · Kim, Ue Kan

< 目 次 >

Abstract	2·4 보의 解析例
1. 序 論	3. 彈性支點을 가진 보의 解析
2. 單位階段函數를 應用한 보의 解析	4. 剪斷力에 의한 처짐
2·1 基本方程式	5. 實 驗
2·2 單位階段函數	6. 結 論
2·3 剪斷力과 굽힘모우멘트	參考文獻



Abstract

The analytic method of beams using the unit step function is presented in this paper. It was proved that the method of analysis presented in this paper was much simpler and more time-saving than the conventional method of analysis.

A model of beam which can represent not only rigidly supported beams but also elastically supported beams regardless of the number of supports was chosen and the computer program analyzing the model of beam was developed.

In order to verify the availability of the computer program developed in this paper, elastically supported continuous beams were manufactured and the deflections by various loading conditions were measured changing the spring constants and the spans of elastic supports. A very good agreement between the values measured and the calculated was convinced.

記 號 說 明

w ; 分布荷重(Kg/mm)
 V ; 剪斷力(Kg)
 M ; 굽힘모우멘트(Kg-mm)
 E ; 彈性係數(Kg/mm²)
 I ; 斷面二次모우멘트(mm⁴)
 EI ; 굽힘剛性係數(Kg-mm²)

$U(x)$; 單位階段函數
 C_1, C_2, C_3, C_4 ; 積分常數
 x, y ; 座標系(mm)
 y ; 굽힘모우멘트에 의한 처짐(mm)
 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$; 集中荷重(Kg)
 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$; 支點의 反力(Kg)

$M_1, M_2, M_3 \dots M_m$; 모우멘트(Kg-mm)	y_s ; 剪斷力에 의한 처짐(mm)
$l_1, l_2, l_3 \dots l_n$; 支點의 位置(mm)	y_t ; 全처짐(mm)
$x_1, x_2, x_3 \dots x_m$; 集中荷重의 位置(mm)	A ; 斷面積(mm ²)
$d_1, d_2, d_3 \dots d_m$; 모우멘트의 位置(mm)	u ; 單位體積當의 彈性變形에 너지(Kg-mm)
m ; 集中荷重의 數	G ; 剪斷彈性係數(Kg/mm ²)
n ; 支點의 數	τ ; 剪斷應力(Kg/mm ²)
m' ; 모우멘트의 數	$b(y)$; 斷面에서 中立軸으로부터 거리 y 인 點의 中立軸方向 넓이(mm)
w_0 ; 等分布荷重(Kg/mm)	$Q(y)$; 斷面에서 中立軸으로부터 거리가 y 보다 큰 部分의 中立軸에 關한 斷面一次모우멘트(mm ³)
$k_1, k_2, k_3 \dots k_n$; 彈性支點의 스프링定數(Kg/mm)	f_s ; 剪斷形狀係數
K_L ; 左端의 回轉스프링定數(Kg-mm)	A_{web} ; 垂直板의 斷面積(mm ²)
K_R ; 右端의 回轉스프링定數(Kg-mm)	
M_L ; 左端의 反作用모우멘트(Kg-mm)	
M_R ; 右端의 反作用모우멘트(Kg-mm)	

1. 序 論

힘에 比例하는 變位가 發生하며 變位에 比例하는 反力을 주는 彈性支點에 의하여 支持된 보는, 힘을 받아도 전혀 變位가 생기지 않은 剛性支點에 의하여 支持된 보와는 다른 舉動을 보일 것이 豫想된다. 靜定보인 境遇는 支點의 反力이 彈性支點이든 剛性支點이든 다같이 때문에 反力을 求하는 問題가 어렵지 않다. 따라서 靜定보의 境遇는 彈性支點을 가진 보라 하더라도 支點의 變位를 쉽게 求할 수 있으므로 그 解析이 까다롭지 않다. 그러나 彈性支點을 가진 不靜定보의 境遇는 支點의 反力이 보의 굽힘剛性係數뿐만 아니라 支點들의 스프링定數들에 의하여서도 달라진다. 즉 보의 變形뿐만 아니라 支點들의 變位들도 計算하여야 反力을 求할 수 있고 剪斷力, 굽힘모우멘트, 처짐角, 처짐을 求하는 보의 解析이 可能하여진다. 그러므로 보의 解析이 매우 複雜하게 되는데 이는 過剩拘束의 數가 많을수록 幾何級數의 數가 增加하는 方程式들을 取扱해야 되기 때문이다.

本研究에서는 均一斷面보에 대하여 單位階段函數를 利用함으로써 보의 種類, 支點의 種類 및 數, 荷重의 種類 및 數 等에 關係없이 모든 보의 解析이 簡便하게 됨을 보이고, 모든 보를 나타낼 수 있는 模型을 定하여 이 보의 解析이 電算프로그램으로 作成될 수 있도록 하였다. 그리하여 어느 特定한 보가 주어지면 이 보에 맞는 入力데이터만 주어 그 보의 解析이 可能하도록 하였다.

또한 彈性支點을 가진 連續보를 製作하고 支點의 數와 스프링定數, 荷重의 數와 크기, 支點의 間隔 等을 여러가지로 變化시키면서 처짐을 實測하여 本研究에서 開發한 電算프로그램에 의한 計算結果와 比較하였다.

2. 單位階段函數를 應用한 보의 解析

2.1 基本方程式

보의 解析에 關한 方程式들은 座標系를 어떻게 取하느냐에 따라서 달라질 뿐만 아니라 剪斷力,

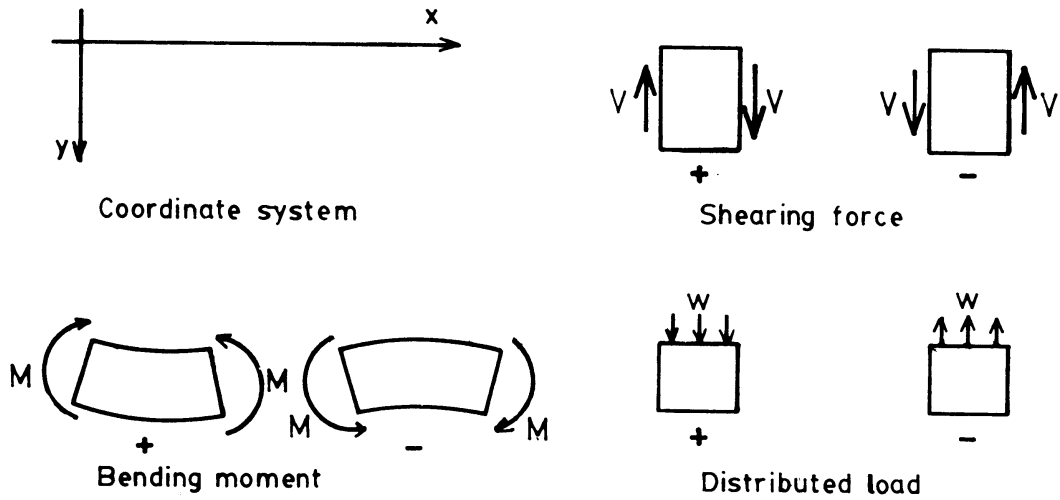


Fig. 1. Coordinate system, and the signs of shearing force, bending moment and distributed load.

굽힘모우멘트, 分布荷重의 부호를 어떻게 定하느냐에 따라서도 달라지므로, 方程式들을 確實하게 하기 위하여 座標系와 剪斷力, 굽힘모우멘트 및 分布荷重의 부호를 Fig. 1 과 같이 定한다. 그러면 分布荷重 w , 剪斷力 V , 굽힘모우멘트 M 의 關係式들은 다음과 같다.¹⁾

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{1}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{3}$$

여기서 EI 는 굽힘剛性係數로서 E 는 彈性係數이고 I 는 斷面二次모우멘트이다.

2·2 單位階段函數

單位階段函數(unit step function)는 다음과 같이 定義된다.²⁾

$$U(x-a) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases} \tag{4}$$

이 函數는 $x=a$ 에서 二價인 不連續函數이다. 즉

$$\lim_{x \rightarrow a^+} U(x-a) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} U(x-a) = 0 \tag{5}$$

이 된다.

單位階段函數의 積分은 다음과 같이 된다.

$$\int U(x-a) dx = (x-a)U(x-a) + C_1 \tag{6}$$

$$\int (x-a)U(x-a) dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 U(x-a) + C_2 \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{2}(x-a)^2 U(x-a) dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 U(x-a) + C_1 \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{6}(x-a)^3 U(x-a) dx = \frac{1}{24}(x-a)^4 U(x-a) + C_2 \quad (9)$$

여기서 C_1, C_2, C_3, C_4 는 積分常數이다.

單位階段函數를 利用하면 여러가지 不連續函數를 比較的 簡單하게 表示할 수가 있는데, Fig. 2 에 單位階段函數와 그의 積分 및 몇가지 不連續函數를 나타내었다.

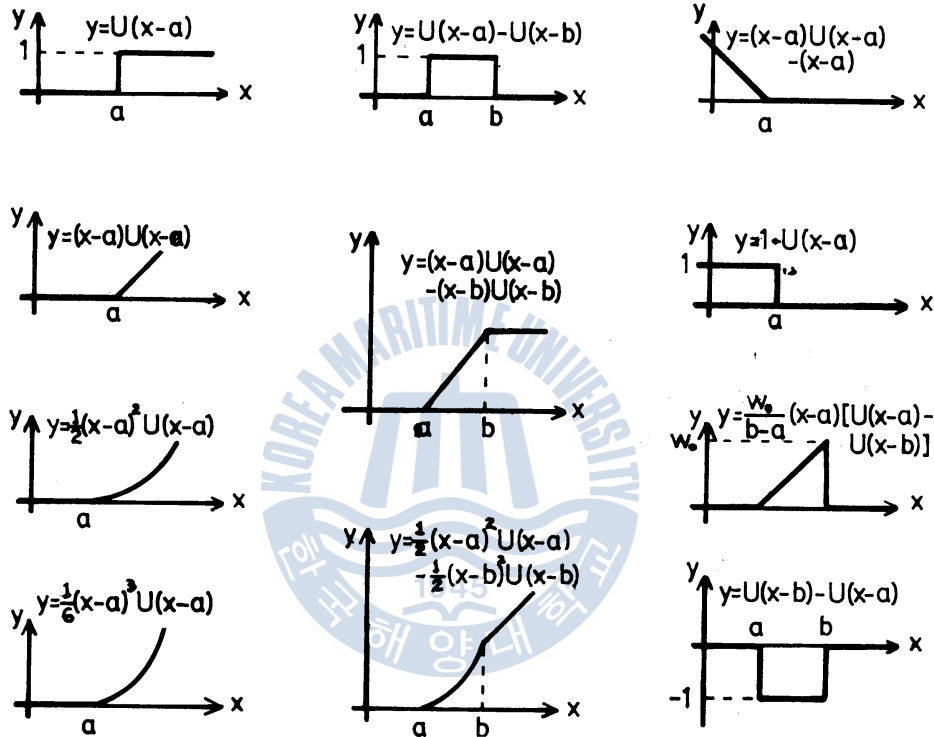


Fig. 2. Unit step function and its integration, some discontinuous functions.

2.3 剪斷力과 굽힘모우멘트

보에 分布荷重만이 作用할 때는 剪斷力의 分布가 連續函數이기 때문에 別問題가 안되나, 集中荷重이 作用할 때는 剪斷力의 分布가 集中荷重의 作用點에서 不連續이 되고, 區間에 따라 剪斷力의 크기가 달라져서 剪斷力과 굽힘모우멘트의 表示가 複雜하게 되는데, 單位階段函數를 利用하면 比較的 簡單하게 이들을 表示할 수가 있다. 또한 모우멘트가 作用할 때도 굽힘모우멘트의 分布는 모우멘트의 作用點에서 不連續이 되고 굽힘모우멘트의 表示가 複雜하게 되는데 單位階段函數를 써서 簡單하게 表示할 수가 있다. 一例로써 Fig. 3에 보이는 바와 같은 連續보에 集中荷重 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 와 反力 R_1, R_2, R_3, R_4 및 모우멘트 M_1, M_2, M_3 가 作用할 때, 左端으로부터 거리 x 인 斷面의 剪斷力 V 와 굽힘모우멘트 M 은 平衡條件 ($\sum F=0, \sum M=0$)으로부터 다음과 같이 된다.

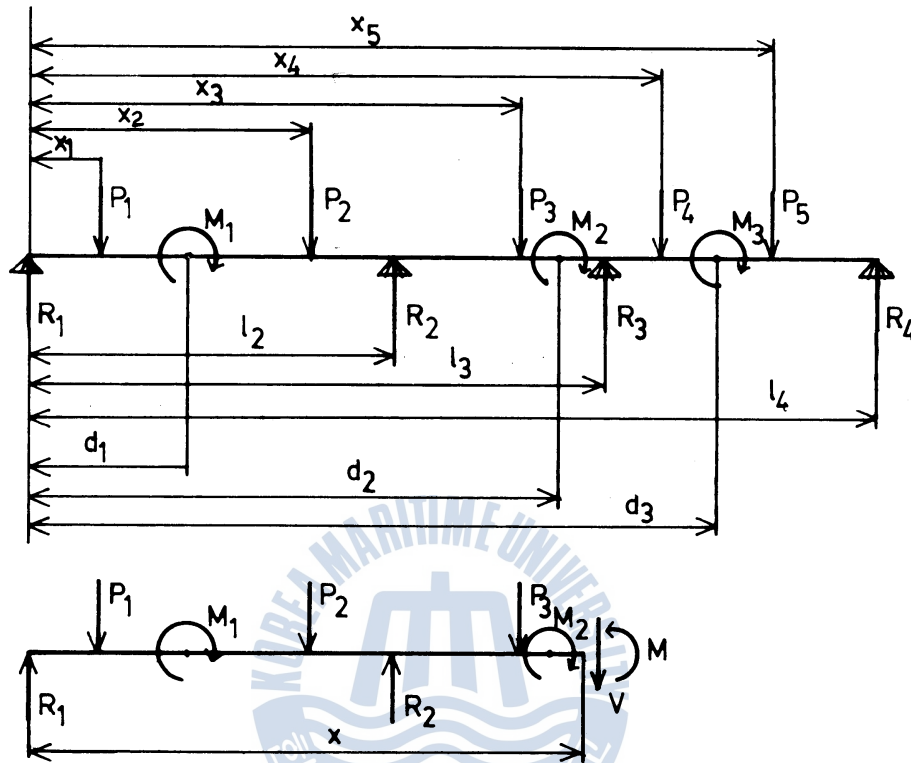


Fig. 3. A continuous beam.

$$\begin{aligned}
 V &= R_1 + R_2 U(x-l_2) + R_3 U(x-l_3) - P_1 U(x-x_1) - P_2 U(x-x_2) \\
 &\quad - P_3 U(x-x_3) - P_4 U(x-x_4) - P_5 U(x-x_5) \\
 &= \sum_{i=1}^4 R_i U(x-l_i) - \sum_{i=1}^5 P_i U(x-x_i) \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$M = \sum_{i=1}^4 R_i (x-l_i) U(x-l_i) - \sum_{i=1}^5 P_i (x-x_i) U(x-x_i) + \sum_{i=1}^3 M_i U(x-d_i) \tag{11}$$

이 連續보의 境遇 x 는 區間 $0 \leq x \leq l_4$ 에서만 定義되므로 $U(x)$ 는 恒常 1이고 $U(x-l_i)$ 는 恒常 0이므로 $R_1 U(x) = R_1$ 이 되어 $R_4 U(x-l_4) = 0$ 이 된다.

이와 같이 어느 斷面에 作用하는 剪斷力과 굽힘모우멘트를 單位階段函數를 利用하여 表示하면 集中荷重과 모우멘트 및 反力들의 크기뿐만 아니라 作用點의 位置도 同時에 表示할 수 있어 아주 便利하다.

2.4 보의 解析例

單位階段函數를 利用하면 剪斷力과 굽힘모우멘트를 簡單히 表示할 수 있을뿐만 아니라 처짐角과 처짐도 從來의 解法에 比하여 더 쉽게 求하여지고 簡單히 表示될 수가 있는데 그 例를 들면 다음과 같다.

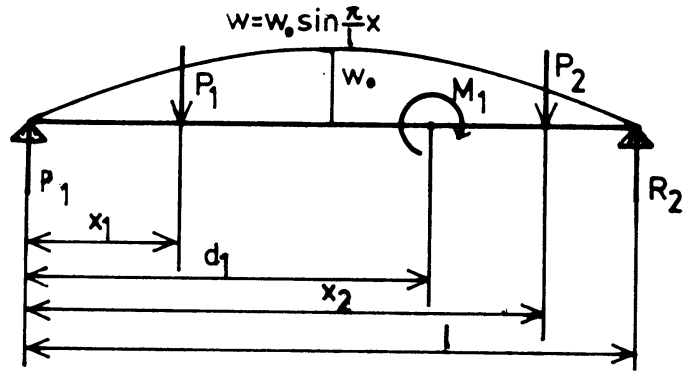


Fig. 4. A simple beam.

Fig. 4와 같이 길이가 l 인 單純보에 分布荷重 $w = w_0 \sin \frac{\pi}{l}x$ 와 集中荷重 P_1, P_2 및 모우멘트 M_1 이 作用할 때, 反力 R_1, R_2 는 다음과 같다.

$$R_1 = \frac{w_0 l}{\pi} + \frac{P_1(l-x_1)}{l} + \frac{P_2(l-x_2)}{l} - \frac{M_1}{l} \quad (12)$$

$$R_2 = \frac{w_0 l}{\pi} + \frac{P_1 x_1}{l} + \frac{P_2 x_2}{l} + \frac{M_1}{l}$$

한편 式 (1)로부터

$$\frac{dV}{dx} = -w = -w_0 \sin \frac{\pi}{l}x \quad (13)$$

이 式을 積分하면 剪斷力 V 의 分布를 求할 수 있다.

$$V = \frac{w_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi}{l}x + C_1 + R_1 - P_1 U(x-x_1) - P_2 U(x-x_2) \quad (14)$$

C_1 은 積分常數로서 境界條件에 의하여 求한다. 境界條件으로 $x=0$ 일 때 $V=R_1$ 이므로 $C_1 = -w_0 l / \pi$ 가 된다. 이것을 式 (14)에 代入하면

$$V = \frac{w_0 l}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{l}x - 1 \right) + R_1 - P_1 U(x-x_1) - P_2 U(x-x_2) \quad (14')$$

이 式을 式 (2)에 代入하고 積分을 하면 굽힘모우멘트 M 이 求하여진다.

$$M = \frac{w_0 l}{\pi} \left(-\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l}x - x \right) + C_2 + R_1 x - P_1 (x-x_1) U(x-x_1) - P_2 (x-x_2) U(x-x_2) + M_1 U(x-d_1) \quad (15)$$

C_2 도 積分常數로서 境界條件에 의하여 求한다. 境界條件은 $x=0$ 일 때 $M=0$ 이므로 $C_2=0$ 이 된다. 따라서 굽힘모우멘트 M 의 分布는 다음과 같이 된다.

$$M = \frac{w_0 l}{\pi} \left(-\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l}x - x \right) + R_1 x - P_1 (x-x_1) U(x-x_1) - P_2 (x-x_2) U(x-x_2) + M_1 U(x-d_1) \quad (15)'$$

이 式을 式 (3)에 代入하여 積分하면 처짐角 $\frac{dy}{dx}$ 가 求하여지고 한번 더 積分하면 처짐 y 가 求하여진다.

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{w_0 l}{\pi} \left\{ \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cos \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} x^2 \right\} - \frac{R_1}{2} x^2 + \frac{P_1}{2} (x-x_1)^2 U(x-x_1) + \frac{P_2}{2} (x-x_2)^2 U(x-x_2) - M_1 (x-d_1) U(x-d_1) + C_3 \quad (16)$$

$$EI y = \frac{w_0 l}{\pi} \left\{ \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{6} x^3 \right\} - \frac{R_1}{6} x^3 + \frac{P_1}{6} (x-x_1)^3 U(x-x_1) + \frac{P_2}{6} (x-x_2)^3 U(x-x_2) - \frac{M_1}{2} (x-d_1)^2 U(x-d_1) + C_3 x + C_4 \quad (17)$$

C_3, C_4 는 積分常數로서 境界條件에 의하여 求한다. 境界條件은 $x=0$ 일 때 $y=0$, $x=l$ 일 때 $y=0$ 이다. 이 條件들로부터 C_3, C_4 를 求하면

$$C_3 = \frac{M_1(l-d_1)^2}{2l} - \frac{P_1(l-x_1)^3 + P_2(l-x_2)^3}{6l} + \frac{R_1 l^2}{6} - \frac{w_0 l^3}{6\pi} \quad (18)$$

$$C_4 = 0$$

式 (18)의 積分常數와 式 (12)의 反力 R_1 을 式 (16), (17)에 代入하여 처짐角과 처짐을 求한다.

以上은 靜定보의 境遇에 대하여 例를 들었으나, 不靜定보의 境遇도 비슷한 方法으로 解析이 可能하다.

이와 같이 單位階段函數를 利用하면 荷重이나 反力の 作用點에서 처짐角과 처짐이 連續이어야 한다는 境界條件이 스스로 滿足되어 積分常數의 數호가 훨씬 적어지므로 支點의 反力, 剪斷力, 굽힘모우멘트, 처짐角, 처짐을 求하는 보의 解析이 훨씬 쉽고 그의 表示가 簡單하게 됨을 알 수 있다.

3. 彈性支點을 가진 보의 解析

完全한 意味의 剛體는 存在할 수 없고 모든 物體는 外力을 加하면 變形하는 變形體이다. 더우기 工學에서 다루는 大部分의 材料는 彈性體이므로 彈性體위에 彈性支點을 가진 보의 舉動은 剛體위에 剛性支點을 가진 보의 舉動과는 差異가 있을 것이 豫想된다. 따라서 本研究에서는 보의 모든 支點이 힘에 比例하는 變位가 發生한다고 보고, 보에 關한 靜的인 解析을 하여 어떠한 보에도 適用할 수 있도록 電算프로그램을 開發하고자 한다. 물론 彈性支點의 스프링定數를 無限大로 놓으면 剛性支點을 가진 보가 되므로 이 때의 보의 舉動은 지금까지 確立된 보에 關한 理論과 一致한다.

Fig. 5 (a)는 모든 보를 나타내는 模型圖이고 同圖 (b)는 自由物體線圖이다. 이 보의 支點은 n 개이고 各支點의 스프링定數는 $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ 이며 支點들의 位置는 左端으로부터 各各 거리 $l_1 (=0), l_2, l_3, \dots, l_n$ 되는 點이다. 左端과 右端은 彈性固定支點(Elastically Built-in Supports)으로 모우멘트에 比例하는 角變位를 하며, 그 比例常數를 各各 K_L, K_R 이라 한다. 그러므로 K_L 이 0이면 左端은 單純支點이 되고 K_L 이 ∞ 이면 左端은 固定支點이 된다. 이 보에는 左端으로부터 거리 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ 인 點에 各各 集中荷重 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$ 이 作用하고, 左端으로부터 거리 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_m$ 인 點에 各各 모우멘트 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_m$ 가 作用한다. 또한 이 보는 w_0 의 等分布荷重을 받는다고 한다. 이 보가 左端 및 右端에서 받는 反作用모우멘트를 各各 M_L, M_R 이라 하고 各支點에서 받는 反力을 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ 이라 한다.

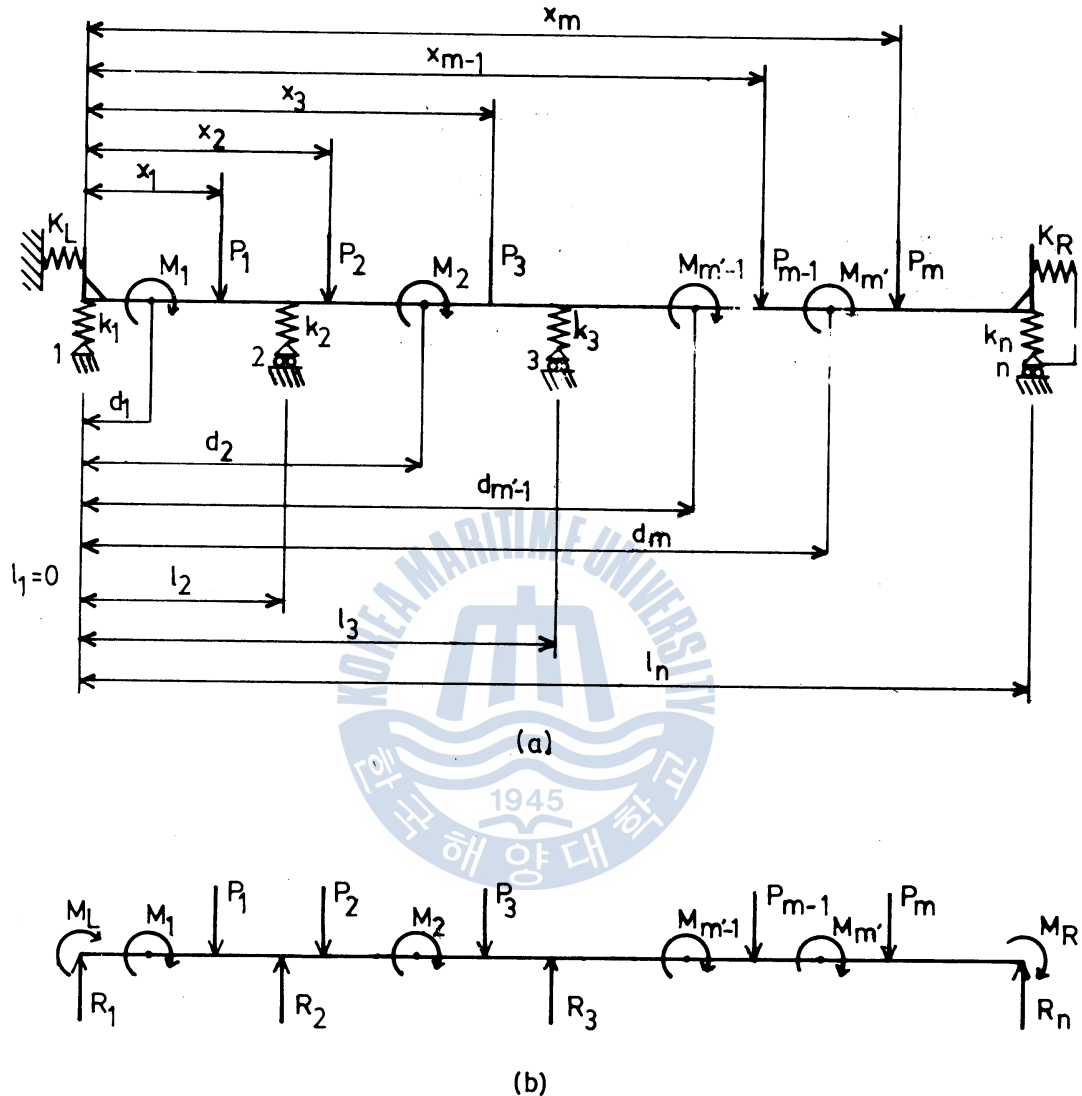


Fig. 5. (a) A model of beam.
 (b) Free body diagram.

보의 모델을 이와 같이 나타내면 彈性支點을 가진 모든 보뿐만 아니라 剛性支點을 가진 모든 보도 이 모델으로써 表示할 수가 있다. 例를 들면 길이가 l 인 외팔보의 境遇는 $n=2, k_1=0, K_L=0, k_2=\infty, K_R=\infty, l_n=l$ 이라 놓으면 된다. 여러가지 보를 이 모델으로 나타낼 때 各支點의 스프링定數와 支點의 數를 Fig. 6에 나타내었다.

모든 보를 Fig. 5의 모델으로 나타낼 수 있으므로 이 보를 解析하여 電算프로그램으로 作成하여 놓고 各各의 境遇에 맞는 入力데이터를 주면 어떠한 보의 解析도 可能하다.

式 (1)로부터

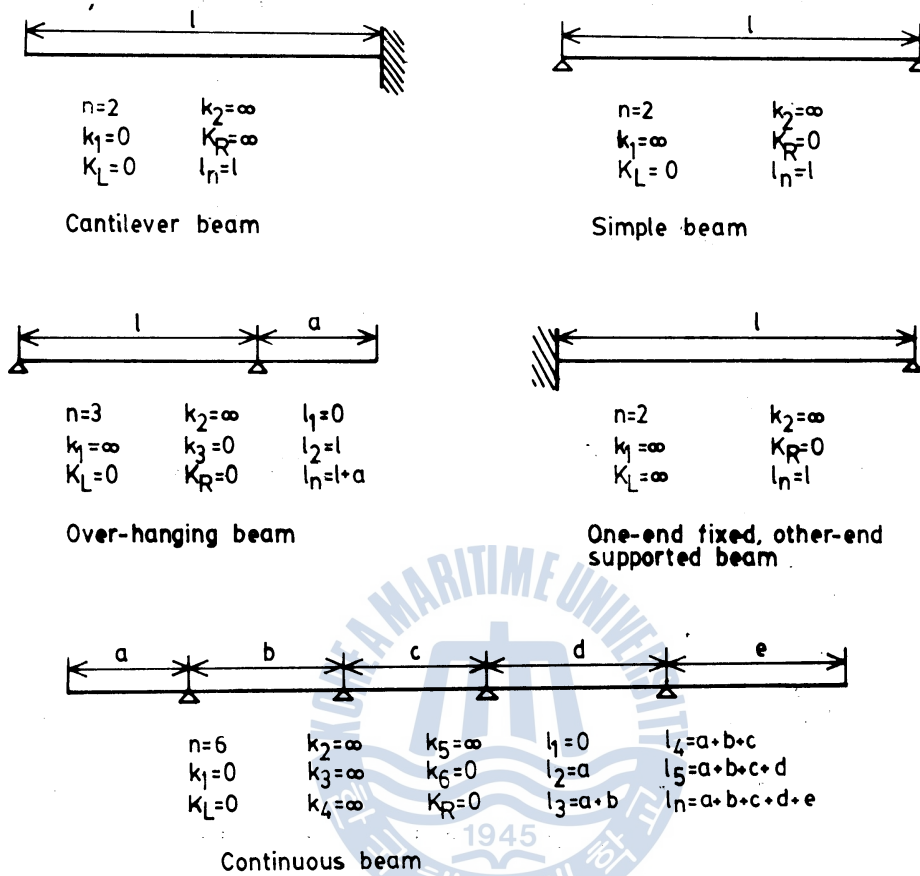


Fig. 6. Some examples of rigidly supported beams represented with the model.

$$\frac{dV}{dx} = -w = -w_0 \quad (19)$$

이 式을 積分하면 剪斷力 V 를 求할 수 있다.

$$V = -w_0 x + C_1 + \sum_{j=1}^n R_j U(x-l_j) - \sum_{k=1}^m P_k U(x-x_k) \quad (20)$$

境界條件으로 $\lim_{x \rightarrow l_1^+} V = R_1$ 을 利用하면 $C_1=0$ 이 됨을 알 수 있다.

式 (20)에 $C_1=0$ 을 代入하고 이것을 式 (2)에 代入하면

$$\frac{dM}{dx} = V = -w_0 x + \sum_{j=1}^n R_j U(x-l_j) - \sum_{k=1}^m P_k U(x-x_k) \quad (21)$$

이 式을 積分하면 굽힘모우멘트 M 을 求할 수 있다.

$$M = -\frac{w_0}{2} x^2 + \sum_{j=1}^n R_j (x-l_j) U(x-l_j) - \sum_{k=1}^m P_k (x-x_k) U(x-x_k) + C_2 \\ + M_L + \sum_{k=1}^{m'} M_k U(x-d_k) \quad (22)$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} M = M_L$ 이므로 $C_3 = 0$ 이어야 한다. $C_2 = 0$ 을 式 (22)에 代入하고 이것을 式 (3)에 代入하면

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -M_L + \frac{w_0}{2} x^2 - \sum_{j=1}^n R_j (x-l_j) U(x-l_j) + \sum_{k=1}^m P_k (x-x_k) U(x-x_k) - \sum_{k=1}^{m'} M_k U(x-d_k) \quad (23)$$

이 式을 2번 積分함으로써 처짐角 $\frac{dy}{dx}$ 와 처짐 y 를 求할 수 있다. 均一斷面보라고 하면 EI 는 常數이므로

$$EI \frac{dy}{dx} = -M_L x + \frac{w_0}{6} x^3 - \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{2} (x-l_j)^2 U(x-l_j) + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{2} (x-x_k)^2 U(x-x_k) - \sum_{k=1}^{m'} M_k (x-d_k) U(x-d_k) + C_3 \quad (24)$$

$$EI y = -\frac{M_L}{2} x^2 + \frac{w_0}{24} x^4 - \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{6} (x-l_j)^3 U(x-l_j) + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{6} (x-x_k)^3 U(x-x_k) - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (x-d_k)^2 U(x-d_k) + C_3 x + C_4 \quad (25)$$

境界條件은 다음과 같다.

$$k_i(y)_{x=l_i} = R_i, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (26)$$

$$-K_L \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = M_L \quad (27)$$

$$-K_R \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l_n} = M_R \quad (28)$$

式 (25)를 式 (26)에 代入하고 式 (24)를 式 (27) 및 (28)에 代入하여 整理하면

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{1}{6} (l_i-l_j)^3 U(l_i-l_j) R_j + \frac{EI}{k_i} R_i + \frac{1}{2} l_i^2 M_L - l_i C_3 - C_4 \\ & = \frac{w_0}{24} l_i^4 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{6} (l_i-x_k)^3 U(l_i-x_k) - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (l_i-d_k)^2 U(l_i-d_k) \end{aligned} \quad (29)$$

$i=1, 2, 3, \dots, n$

$$-\frac{EI}{K_L} M_L + C_3 = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (l_n-l_j)^2 R_j + l_n M_L - \frac{EI}{K_R} M_R - C_3 \\ & = \frac{w_0}{6} l_n^3 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{2} (l_n-x_k)^2 - \sum_{k=1}^{m'} M_k (l_n-d_k) \end{aligned} \quad (31)$$

한편 平衡條件으로부터 다음 式이 成立한다.

$$\sum_{j=1}^n R_j = \sum_{k=1}^m P_k + w_0 l_n \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^n l_j R_j - M_L - M_R = \sum_{k=1}^{m'} M_k + \sum_{k=1}^m P_k x_k + \frac{w_0}{2} l_n^2 \quad (33)$$

式 (29)로부터 求한 n 개의 式과 式 (30), (31), (32), (33), 도합 $n+4$ 개의 式으로부터 $n+4$ 개의

未知數 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n, M_L, M_R, C_3, C_4$ 를 求할 수 있다. 따라서 이들 式들을 매트릭스形態로 고쳐쓰면

$$\begin{pmatrix} [G_{11}]^{n \times n} & [G_{12}]^{n \times 4} \\ [G_{21}]^{4 \times n} & [G_{22}]^{4 \times 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \\ M_L \\ M_R \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \\ A_{n+1} \\ A_{n+2} \\ A_{n+3} \\ A_{n+4} \end{pmatrix} \quad (34)$$

여기서 $[G_{11}]$ 은 $n \times n$ 正方매트릭스로 主對角線의 i 째번 成分은 EI/k_i 이고 主對角線 上部成分들은 全部 0 이며 主對角線 下部(i, j) 成分은 $(l_i - l_j)^3/6$ 이다. $[G_{12}]$ 는 $n \times 4$ 매트릭스로

$$[G_{12}] = \begin{pmatrix} l_1^3/2 & 0 & -l_1 & -1 \\ l_2^3/2 & 0 & -l_2 & -1 \\ l_3^3/2 & 0 & -l_3 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_n^3/2 & 0 & -l_n & -1 \end{pmatrix}$$

이며 $[G_{21}]$ 은 $4 \times n$ 매트릭스로

$$[G_{21}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (l_n - l_1)^2/2 & (l_n - l_2)^2/2 & (l_n - l_3)^2/2 & \dots & (l_n - l_{n-1})^2/2 & (l_n - l_n)^2/2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_{n-1} & l_n \end{pmatrix}$$

이다. 또한 $[G_{22}]$ 는 4×4 正方매트릭스로

$$[G_{22}] = \begin{pmatrix} EI/K_L & 0 & 1 & 0 \\ l_n & -EI/K_R & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이다. 式(34) 右邊의 各成分은 다음과 같다.

$$A_i = \frac{w_0}{24} l_i^4 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{6} (l_i - x_k)^3 U(l_i - x_k) - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (l_i - d_k)^2 U(l_i - d_k)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$A_{n+1} = 0, \quad A_{n+2} = \frac{w_0}{6} l_n^3 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{2} (l_n - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{m'} M_k (l_n - d_k)$$

$$A_{n+3} = \sum_{k=1}^m P_k + w_0 l_n, \quad A_{n+4} = \sum_{k=1}^{m'} M_k + \sum_{k=1}^m P_k x_k + \frac{w_0}{2} l_n^2$$

이렇게 하여 式 (34)로부터 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n, M_L, M_R, C_3, C_4$ 를 求할 수 있고 이들을 式 (21), (23), (24), (25)에 代入함으로써 各各 剪斷力, 굽힘모멘트, 처짐角, 처짐을 求할 수 있다. 여기서 注意할 點은 k_i, K_L, K_R 이 0 이어서는 안된다는 點이다. 만약 이들중 어느 하나라도 0이 되면

式 (34)는 풀리지 않게 된다. 따라서 이 境遇에는 다음 2가지 方法中 어느 하나를 택하여 조치를 取한다. 첫째 方法은 이들중 어느 것이 0이면 0을 代入하지 말고 實用上 0이라고 看做할 수 있는 아주 작은 數를 代入하면 된다. 둘째 方法은 k_i 가 0이면 R_i 가 0이고 K_L 이 0이면 M_L 이 0이며 K_R 가 0이면 M_R 가 0이라는 事實에 注目하여 式 (34)를 修正한다. 즉 k_i 가 0이면 매트릭스 $[G]$ 의 i 번째 行을 全部 0으로 하고 主對角線의 i 번째 成分만 1로 하고 A_i 를 0으로 한다. K_L 이 0이면 매트릭스 $[G]$ 의 $n+1$ 번째 行을 全部 0으로 하고 主對角線의 $n+1$ 번째 成分만 1로 한다. K_R 가 0이면 매트릭스 $[G]$ 의 $n+2$ 번째 行을 全部 0으로 하고 主對角線의 $n+2$ 번째 成分만 1로 하고 A_{n+2} 를 0으로 한다.

以上에서는 彈性支點을 가진 보에 集中荷重과 모우멘트 및 보의 全長이에 걸쳐서 等分布荷重이 作用한다고 보고 解析을 하였는데, 만약 不等分布荷重이 作用할 때는 不等分布荷重이 作用하는 區間을 짧게 分割하여 各要素에서 作用하는 集中荷重으로 代치하여 解析하는 方法이 있고, 不等分布荷重을 Fourier 級數로 展開하여 解析하는 方法이 있는데 어느 것이나 무방할 것이라 본다.

4. 剪斷力에 의한 처짐

前節에서 誘導한 式들은 剪斷力에 의한 처짐角과 처짐을 無視하였다. 一般的으로 圓形斷面이나 四角形斷面과 같이 中立軸 近處에 材料가 充滿되어 있는 形態의 斷面을 가진 보의 剪斷力에 의한 처짐이 굽힘모우멘트에 의한 처짐에 比하여 無視할 수 있을 程度로 작기 때문에³⁾ 前節에서 誘導한 式들을 그대로 使用할 수 있다. 그러나 管이나 口形斷面, I形斷面, H形斷面, C形斷面 등과 같이 中立軸 近處에 材料가 充分치 못한 形態의 斷面을 가진 보의 境遇는 剪斷力에 의한 처짐을 無視할 수 없다.³⁾ 따라서 여기서는 剪斷力에 의한 처짐을 考慮하여 彈性支點을 가진 보의 解析을 하려고 한다.

剪斷力에 의한 처짐을 y_s 라 하고 Fig. 7에 보이는 바와 같이 보의 미소길이 dx 가 剪斷力 V 에 의하여 처지는 量을 dy_s 라 하면 에너지 平衡에 의하여

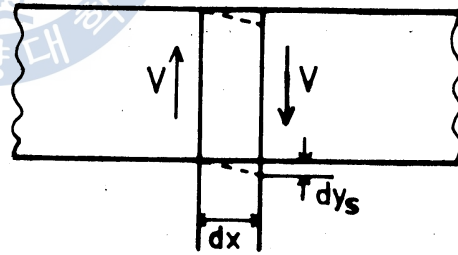


Fig. 7. Deflection of an element dx by shearing force.

$$\frac{1}{2} V dy_s = \int_A u dA dx \quad (35)$$

여기서 A 는 보의 斷面積이고 u 는 剪斷應力에 의한 單位體積當의 彈性變形에너지로 G 를 剪斷彈性係數라 하면 $u = \tau^2 / (2G)$ 가 되고 이것을 式 (35)에 代入하여 整理하면

$$\frac{dy_s}{dx} = \frac{1}{VG} \int_A \tau^2 dA \quad (36)$$

가 된다.

中立軸으로부터 거리 y 인 點의 剪斷應力은 다음과 같다.⁴⁾

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib(y)} \tag{37}$$

여기서 $b(y)$ 는 그 點의 中立軸方向 넓이이고, $Q(y)$ 는 斷面의 中立軸을 基準으로 하여 그 點이 있는 쪽에서 거리가 y 보다 큰 部分의 中立軸에 關한 斷面一次모우멘트이다.

式 (37)을 式 (36)에 代入하여 整理하면

$$\frac{dy_s}{dx} = -\frac{f_s}{G} \frac{V}{A} \tag{38}$$

가 된다. 여기서 f_s 는 剪斷形狀係數(form factor for shear)³⁾라 불리우는 無次元의 量으로 斷面의 形狀에 따라 決定되는 常數이며 다음과 같이 計算된다.

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \tag{39}$$

예를 들면 四角形斷面의 境遇는 $f_s=6/5$ 이고 圓形斷面의 境遇는 $f_s=10/9$ 이며 두께가 얇은 管은 $f_s=2$ 이다. 또한 I 形斷面이나 H 形斷面, 口形斷面의 境遇는 $f_s=A/A_{web}$ 이다. 여기서 A_{web} 는 垂直板의 斷面積이다. 例에서 알 수 있는 바와 같이 中立面 近處에 材料가 充滿되어 있는 形狀의 斷面은 f_s 의 값이 작고 따라서 剪斷力에 의한 처짐이 작으나 中立軸 近處에 材料가 貧弱한 形狀의 斷面은 f_s 의 값이 크고 따라서 剪斷力에 의한 처짐도 크다.

全처짐을 y_t 라 하면

$$y_t = y + y_s, \quad EI \frac{dy_t}{dx} = EI \frac{dy}{dx} + EI \frac{dy_s}{dx} \tag{40}$$

式 (21)의 剪斷力 V 를 式 (38)에 代入하고 이것과 式 (24)를 式 (40)에 代入하여 整理하면 全처짐 角 $\frac{dy_t}{dx}$ 와 全처짐 y_t 를 求할 수 있다.

$$\begin{aligned} EI \frac{dy_t}{dx} = & -M_L x + \frac{w_0}{6} x^3 - \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{2} (x-l_j)^2 U(x-l_j) + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{2} (x-x_k)^2 U(x-x_k) \\ & - \sum_{k=1}^{m'} M_k (x-d_k) U(x-d_k) + C_3 + \frac{EI f_s}{GA} \left\{ -w_0 x + \sum_{j=1}^n R_j U(x-l_j) \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m P_k U(x-x_k) \right\} \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} EI y_t = & -\frac{M_L}{2} x^2 + \frac{w_0}{24} x^4 - \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{6} (x-l_j)^3 U(x-l_j) + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{6} (x-x_k)^3 U(x-x_k) \\ & - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (x-d_k)^2 U(x-d_k) + C_3 x + C_4 \\ & + \frac{EI f_s}{GA} \left\{ -\frac{w_0}{2} x^2 + \sum_{j=1}^n R_j (x-l_j) U(x-l_j) - \sum_{k=1}^m P_k (x-x_k) U(x-x_k) \right\} \end{aligned} \tag{42}$$

前節에서와 같은 方法으로 式 (26), (27), (28)의 境界條件과 式 (32), (33)의 平衡條件을 利用하면 $n+4$ 개의 式을 얻을 수 있고 이들로부터 $n+4$ 개의 未知數 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n, M_L, M_R, C_3, C_4$ 를 求할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{(l_i-l_j)^3}{6} U(l_i-l_j) - \frac{EI f_s}{GA} (l_i-l_j) U(l_i-l_j) \right\} R_j + \frac{EI}{k_i} R_i + \frac{l_i^2}{2} M_L - l_i C_3 - C_4$$

$$= \frac{w_0}{24} l_i^4 - \frac{EIf_s}{GA} \frac{w_0}{2} l_i^3 + \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{P_k}{6} (l_i - x_k)^3 U(l_i - x_k) - \frac{EIf_s}{GA} P_k (l_i - x_k) U(l_i - x_k) \right\} - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (l_i - d_k)^2 U(l_i - d_k) \quad (43)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{EIf_s}{GA} R_1 + \frac{EI}{K_L} M_L + C_3 = 0 \quad (44)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{(l_n - l_j)^2}{2} R_j + \frac{EIf_s}{GA} R_n + l_n M_L - \frac{EI}{K_R} M_R - C_3 = \frac{w_0}{6} l_n^3 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{2} (l_n - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{m'} M_k (l_n - d_k) \quad (45)$$

$$\sum_{j=1}^n R_j = \sum_{k=1}^m P_k + w_0 l_n \quad (46)$$

$$\sum_{j=1}^n l_j R_j - M_L - M_R = \sum_{k=1}^{m'} M_k + \sum_{k=1}^m P_k x_k + \frac{w_0}{L} l_n^2 \quad (47)$$

式 (43), (44), (45), (46), (47)을 매트릭스形態로 고쳐 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} [H_{11}] \\ [H_{21}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [H_{12}] \\ [H_{22}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \\ M_L \\ M_R \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \\ B_{n+1} \\ B_{n+2} \\ B_{n+3} \\ B_{n+4} \end{pmatrix} \quad (48)$$

여기서 $[H_{11}]$ 은 $n \times n$ 正方매트릭스로 主對角線 成分과 그의 上部成分들은 $[G_{11}]$ 의 그것들과 같고 主對角線 下部 (i, j) 成分은 $(l_i - l_j)^3/6 - EIf_s(l_i - l_j)/(GA)$ 이다. $[H_{12}]$ 는 $[G_{12}]$ 와 같고, $[H_{21}]$ 은 $(1, 1)$ 成分과 $(2, n)$ 成分이 $EIf_s/(GA)$ 이고 나머지 成分들은 $[G_{21}]$ 의 그것들과 같다. 또한 $[H_{22}]$ 는 $[G_{22}]$ 와 같고 B_i 는 다음과 같다.

$$B_i = A_i - \frac{EIf_s}{GA} \frac{w_0}{2} l_i^2 - \frac{EIf_s}{GA} \sum_{k=1}^m P_k (l_i - x_k) U(l_i - x_k)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$B_{n+1} = A_{n+1}, \quad B_{n+2} = A_{n+2}, \quad B_{n+3} = A_{n+3}, \quad B_{n+4} = A_{n+4}$$

式 (48)에서 $f_s=0$ 이라 놓으면 이것은 式 (34)와 完全히 一致함을 알 수 있다. 따라서 式 (48)에 의한 電算프로그램을 作成하고 만약 剪斷力에 의한 처짐을 無視하고자 할 때에는 $f_s=0$ 을 代入하면 된다.

여기서도 k_i, K_L, K_R 中 0인 것이 있으면 前節에서와 같은 方法으로 매트릭스 $[H]$ 와 벡터 $\{B\}$ 를 修正해야 한다.

式 (48)을 풀어서 求한 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n, M_L, M_R, C_3, C_4$ 를 式 (21)에 代入하면 剪斷力을, 式

(23)에 代入하면 굽힘모우멘트를, 式 (41)에 代入하면 처짐角을, 式 (42)에 代入하면 처짐을 求할 수 있다.

5. 實 驗

本研究에서 開發한 電算프로그램을 檢證하기 위하여 彈性支點을 가진 連續보를 製作하고, 支點의 數와 支點의 스프링定數를 變化시켜 가며 여러가지 荷重條件에 대한 처짐을 測定하고 計算結果와 比較하였다.

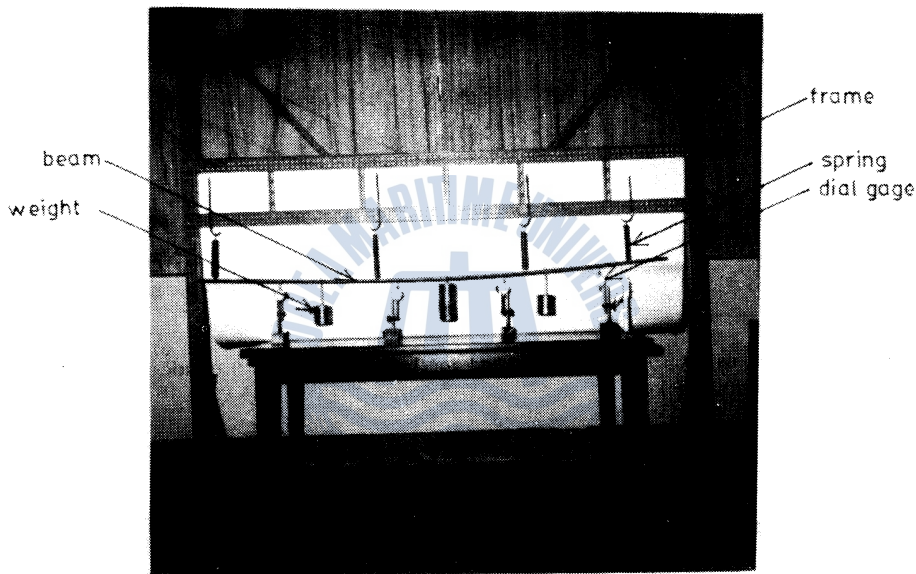


Fig. 8. Experimental structure.

Fig. 8 과 같이 形鋼을 利用하여 構造物을 組立하고 길이 가 똑같은 스프링을 500~1,500mm 의 간격으로 3~5개 매달아서 여기에 圓形斷面보를 設置하였다. 따라서 이들 스프링이 彈性支點의 役割을 하도록 하였고 스프링의 높이는 볼트와 너트를 利用하여 調節할 수 있도록 하였다.

各스프링은 길이는 다같지만 線材의 直徑과 스프링直徑이 제각기 다르기 때문에 스프링定數가 相異하다. 圓形斷面보를 設置하기 前에 各스프링의 스프링定數를 測定하였는데 構造物에 매달아 놓은 狀態에서 測定함으로써 構造物의 彈性도 考慮되도록 하였다. 스프링定數의 測定은 錘와 스톱워치를 利用한 動的 測定을 行하였다. 즉 質量·스프링系의 固有振動數를 測定하여 스프링定數로 換算하였다.

圓形斷面보의 材料는 길이 가 2,170mm, 直徑이 16mm 인 黃銅棒($E=8,300 \text{ kg/mm}^2$)과 길이 가 1,980mm, 直徑이 14mm 인 軟鋼棒($E=21,000 \text{ kg/mm}^2$)이었다. 錘를 利用하여 集中荷重을 2~3개 作用시키고 다이알게이지로 처짐을 測定하였다. 처짐의 測定位置는 左端으로부터 거리 300mm, 800mm, 1,300mm, 1,800mm(또는 1,900mm)인 4點이었다. 集中荷重의 크기, 數, 位置, 支點의 스프

령定數, 數, 位置 등을 여러가지로 바꾸면서 처짐들을 測定하였다.

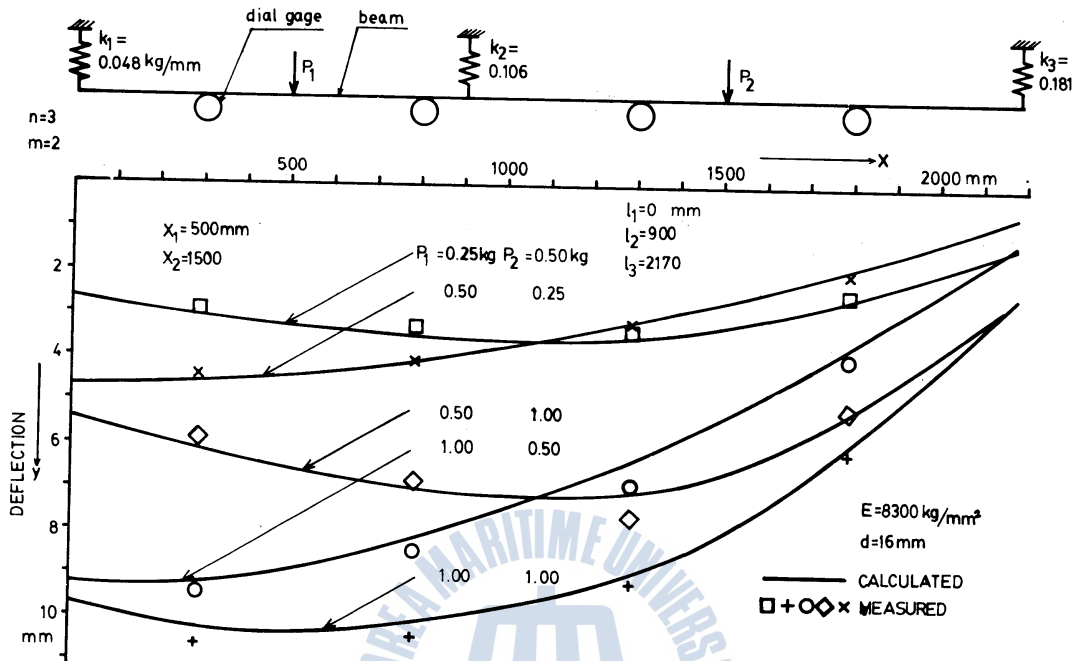


Fig. 9. Deflections measured and calculated for brass beam with 3 elastic supports and 2 concentrated loads.

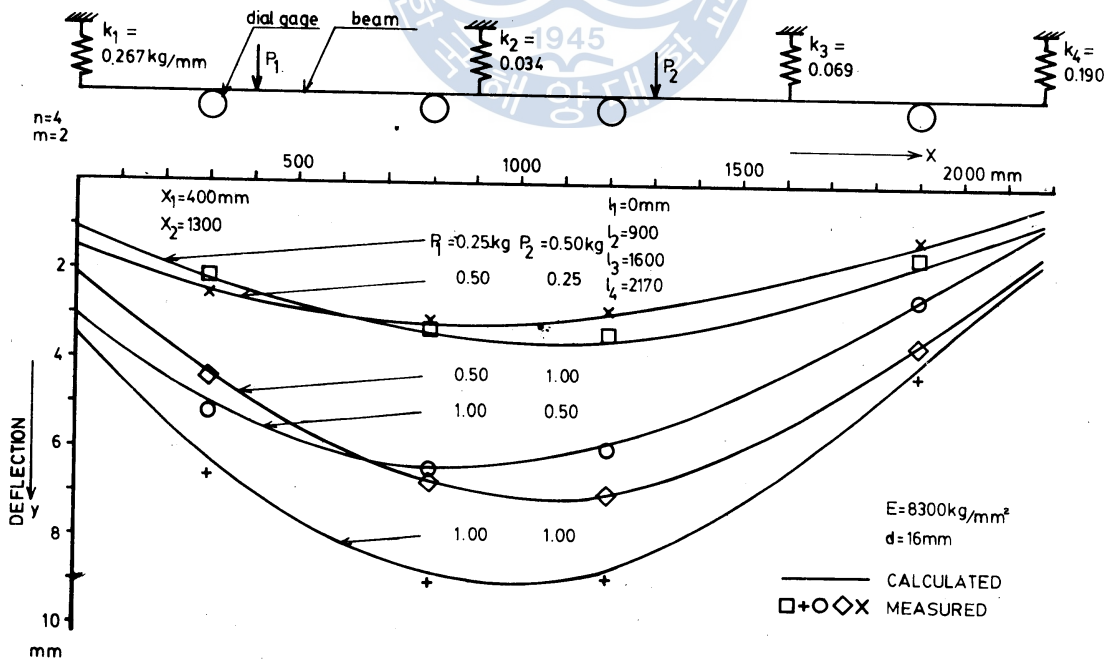


Fig. 10. Deflections measured and calculated for brass beam with 4 elastic supports and 2 concentrated loads.

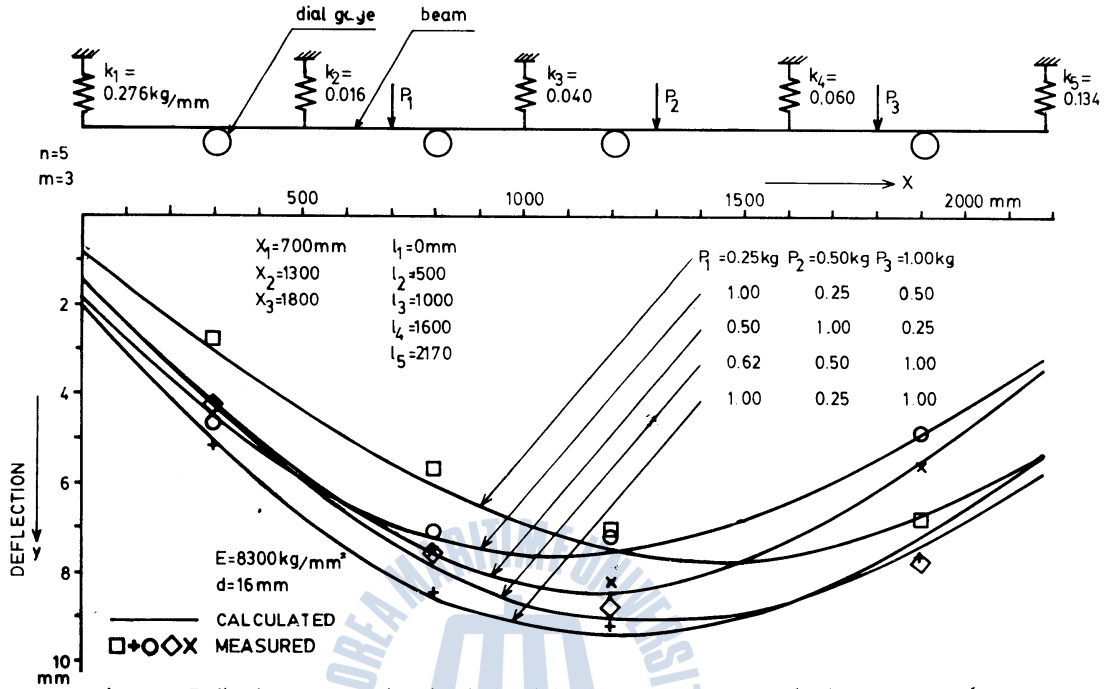


Fig. 11. Deflections measured and calculated for brass beam with 5 elastic supports and 3 concentrated loads.

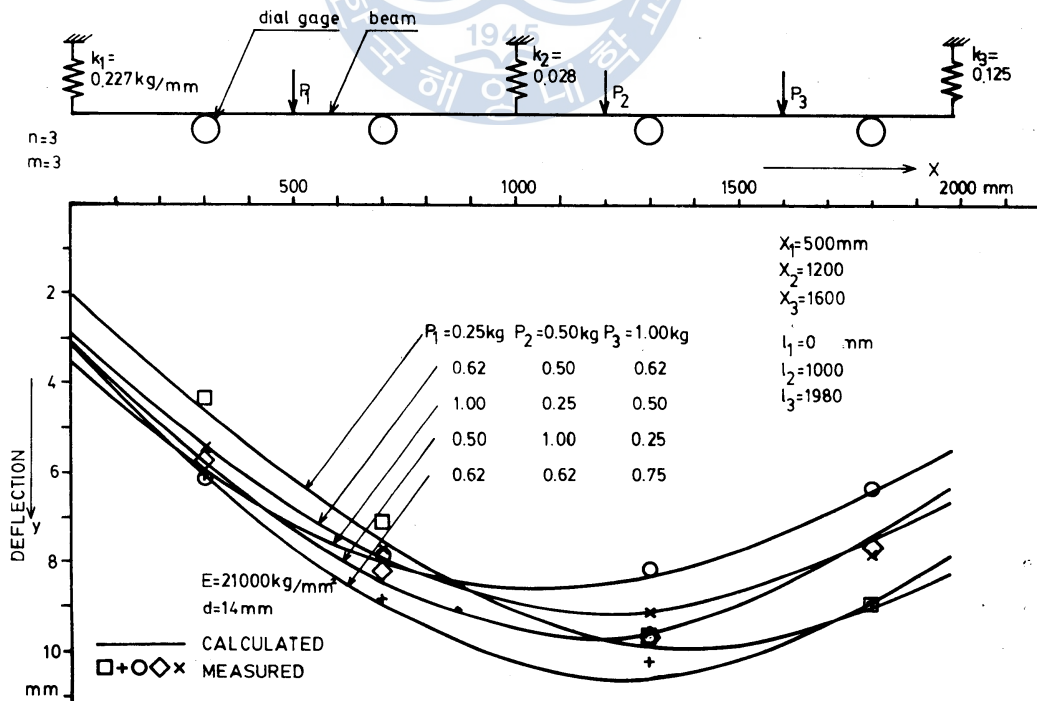


Fig. 12. Deflections measured and calculated for steel beam with 3 elastic supports and 3 concentrated loads.

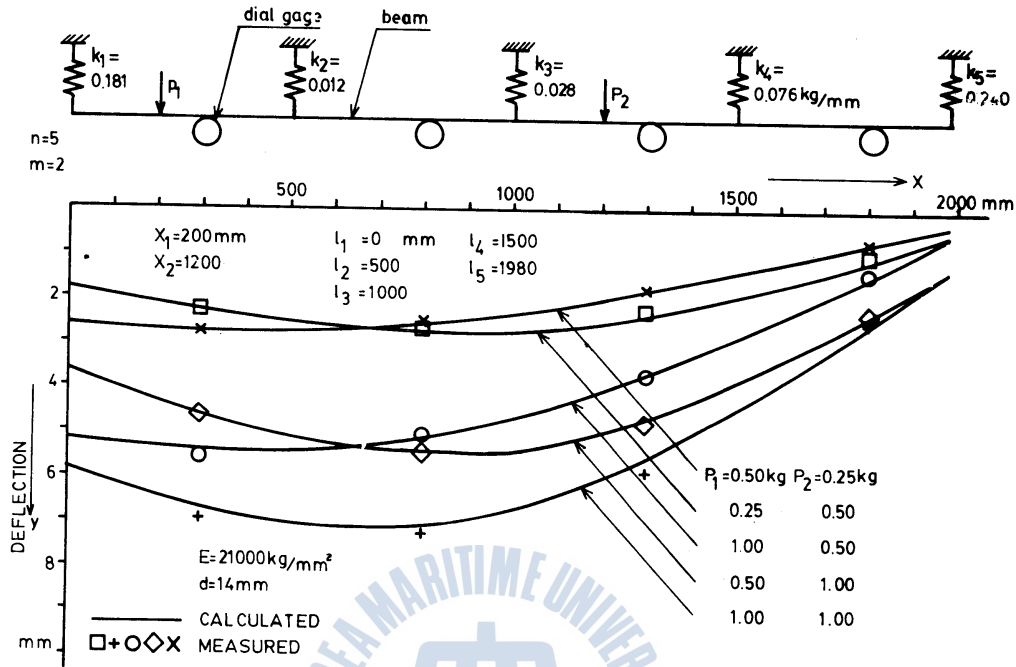


Fig. 13. Deflections measured and calculated for steel beam with 5 elastic supports and 2 concentrated loads.

Fig. 9, 10, 11은 黃銅棒의 連續보에 대하여, Fig. 12, 13은 軟鋼棒의 連續보에 대하여 支點의 스프링定數, 數, 位置, 集中荷重의 數, 크기, 位置, 처짐의 計算値와 實測値를 圖示한 것이다. 그림의 實線으로 表示된 曲線이 計算値이고 여러가지 點으로 表示된 것이 實測値이다. 그림에 보이는 바와 같이 計算値와 實測値는 약간의 誤差가 發生하는 境遇도 있으나 그 誤差는 그다지 크지 않고 全般的으로 매우 잘 一致함을 알 수 있다. 또한 그림들에서 明白한 바와 같이 彈性支點을 가진 보의 靜的인 舉動은 剛性支點을 가진 보와는 전혀 다르다는 것을 알 수 있다.

6. 結 論

彈性支點을 가진 보에 있어서 支點의 反力 및 反作用모우멘트, 剪斷力, 굽힘모우멘트, 처짐角, 처짐을 求하는 보의 解析을 單位階段函數를 利用하여 實施한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

- 1) 여러가지 不連續函數를 單位階段函數를 利用하여 表示하면 매우 簡潔해진다.
- 2) 單位階段函數를 利用하면 보의 解析이 훨씬 簡便해지고 時間도 節約된다.
- 3) 彈性支點을 가진 보든, 剛性支點을 가진 보든, 또는 支點數가 몇개이든지 모든 보는 Fig. 5의 模型으로 나타낼 수 있고 따라서 이 보를 解析하는 電算프로그램을 作成하면 모든 보의 解析이 可能하다.
- 4) 彈性支點을 가진 보도 單位階段函數를 利用하여 解析할 수 있고 그렇게 하면 훨씬 簡便해진다.

- 5) 本研究에서 開發한 電算프로그램에 의하면 彈性支點을 가진 보의 解析을 위한 精度 높은 計算을 할 수 있다.
- 6) 彈性支點을 가진 보는 剛性支點을 가진 보와는 그 靜的인 舉動이 전혀 다르다.

參 考 文 獻

- 1) S. P. Timoshenko, D. H. Young, "Elements of Strength of Materials", 5th edition, Tower press, 1968.
- 2) C. Ray Wylie, "Advanced Engineering Mathematics", 4th edition, McGraw-Hill Kogakusha, 1975.
- 3) S. P. Timoshenko, James M. Gere, "Mechanics of Materials", 朴榮祖外 4 人 共譯, 清文閣, 1981.
- 4) Stephen H. Crandall, Norman C. Dahl, Thomas J. Lardner, "An Introduction to the Mechanics of Solids", 2nd edition, McGraw-Hill, 1978.



