

# 크랭크軸 縱方向스프링 常數의 近似的 計算方法에 關한 研究

王 之 錫

## A Study on Approximative calculation method of Cranksheft Axial Stiffness

Jee-Seok Wang

### 目 次

記號說明	實測値와 計算値의 比較
1. 序 論	3.2. 模型 크랭크軸에 있어서의 實 測値와 計算値의 比較
2. 隣接角의 影響을 考慮한 縱方向 스프링常數의 近似計算式	4. 模型크랭크에 依한 振動數의 實 測値와 計算値의 比較
2.1. 現在까지 發表된 近似計算式	4.1. 實驗裝置와 實驗方法
2.2. 理論의 由로 誘導된 近似計算式	4.2. 模型크랭크의 固有振動數의 計算
2.3. 隣接크랭크 接續角의 影響	5. 結 論
2.4. 實際의 크랭크軸에 새로운 近 似計算式의 適用하는 要領	參考文獻
3. 새로운 近似計算式의 計算結果 와 實測値와의 比較	附 錄
3.1. 實際의 크랭크軸에 있어서의	

### 記 號 說 明

$$a = l_j/2 + h/2$$

$A_p$  = 크랭크핀의 斷面積

$A_w$  = 크랭크암의 斷面積

$A_{wk}$  = 크랭크軸中心으로부터  $0.5R(k=1)$ ,  
 $0.75R(k=2)$ ,  $1.0R(k=3)$ 되는 곳의  $A_w$

$$b = (l_p + h)/2$$

$$B_o = l_j/EJ_1, B_k = h/3EJ_2, B_p = l_p/EJ_2,$$

$$B_{wk} = R/EJ_{2k}$$

$b'$  = 크랭크암의 幅

$$b'_k = \text{크랭크軸心으로부터 } 0.5R(k=1)$$

$$0.75R(k=2) \ 1.0R(k=3) \text{되는 곳의 } b'$$

$$d = (D_j + D_p)/2$$

$D_j$  = 자아날의 直徑

$D_p$  = 크랭크핀의 直徑

$E$  = 縱彈性係數

$f_x$  = 縱方向影響係數

$f_{xi}$  =  $i$ 번째의 크랭크의  $f_x$

$G$  = 橫彈性係數

$h$ = 크랭크암의 두께	$l_i$ = 자아날의 길이
$J = \pi d^4 / 64$	$l_p$ = 크랭크핀의 길이
$J_1$ = 자아날의 斷面二次모우멘트	$m_i$ = $i$ 번째 質量
$J_2$ = 크랭크핀의 斷面二次모우멘트	$R$ = 크랭크의 半徑
$J_z$ = 크랭크암의 $z$ 軸(그림 2에서 紙面에 垂直한 軸)둘레의 斷面2次모멘트	$S$ = 마지막 크랭크의 後端베어링으로부터 다음 支持베어링까지의 距離
$J_{z,k}$ = 크랭크軸中心으로부터 $0.5R(k=1)$ , $0.75R(k=2)$ , $1.0R(k=3)$ 되는 곳의 $J_z$	$\alpha$ = 隣接베어링間의 接續角 ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ )
$k_i$ = $i$ 번째 스프링 常數	$\alpha_{i+1}$ = $i$ 번째 크랭크와 $i+1$ 번째 크랭크와의 $\alpha$
$l = 2a + 2b$	$\alpha_{av} = (\alpha_i + \alpha_{i+1}) / 2$

### Abstract

The vibration problem in the shafting of marine Diesel engine is very important, especially in the directly coupled shaft system with propeller. Lately, the stiffness of the marine Diesel engine crank shaft has been decreased, for the cylinder bore and the stroke of Diesel engine have become larger and the number of cylinder has increased. And also, the exciting force of vibration has increased, as the rate of supercharging has been uprised and the size of propeller become larger. With the results of above facts, not only the torsional vibration but also the axial vibration that was neglected in the past, has become serious.

It is essential for the engine designer to be able to estimate the natural frequency of shaft system in design stage. The study of calculating of method torsional and axial spring constant which are necessary in calculating the natural frequency of shaft system, was accomplished by many investigators such as Timoshenko, Carter, Geiger, Ker Willson, Tuplin, Dorey, Draminsky, Anderson, Guglielmotti and Johnson, etc.

The fairly accurate torsional stiffness can be calculated by the formulae which were introduced by investigators mentioned above. For the axial spring constant, however, the calculating results of already published formulae are unreliable and the engine designer has much trouble to estimate the axial natural frequency of the engine shafting in design stage. As the published formulae were developed empirically, the calculating results of these empirical formulae for the newly designed crankshaft were unreliable.

Recently, a theoretical method that is applicable to calculate simultaneously the various natural frequencies of crankshaft system in design stage, and the approximate formulae of calculating the crankshaft spring constant were published. The former needs the electronic computer and the latter is possible to calculate manually. But the approximate formula does not take into consideration the effect of adjacent crank angles. The axial stiffness of crankshaft is influenced very much by adjacent crank angles. In this paper, a approximate formula which takes into consideration the effect of adjacent crank angles is developed to calculate the axial spring constant of the crankshaft. The newly developed formula was applied to some actual crankshafts and the results were compared with their measured values and also with

the results of published formulae.

A model crankshaft was built to compare its measured axial spring constant with calculated one and also its measured various natural frequencies were compared with calculated ones. All results showed fairly good coincidence.

## I. 序 論

推進軸과 直結된 디젤機關의 軸系振動에서 主로 問題가 되었던 것은 비틀림 振動이었다. 그러나 最近과 같이 船舶이 大形化 高速化됨에 따라 塔載하는 디젤機關도 大形化되어서, 行程이 커지고 실린더數가 많아졌으며 크랭크암의 길이가 길어지고 크랭크드로우數가 많아졌기때문에 軸系의 強度는 充分하게 設計되었지만 剛도가 심히 低下되고 그 結果 軸系의 固有振動數가 相當히 낮아지게 되었다. 뿐만아니라 높은 過給때문에 平均有效壓力이 높아짐과 아울러 실린더內의 壓力變化도 커지고 실린더 直徑이 커져서 軸系에 미치는 起動力이 增加하였고, 大形 푸로펠러를 使用하므로 푸로펠러의 週期的인 推力變動도 커져서 軸系에 미치는 縱方向起振力이 增加하였다. 따라서 軸系의 비틀림 振動은 勿論이고 從來에 別로 問題가 되지 아니하였던 縱振動과 縱비틀림 聯成振動이 크게 問題로 되었다.

機關設計者가 事前에 設計하고자하는 機關軸系의 固有振動數를 正確하게 把握한다는 것은 매우 重要한 일이다. 固有振動數를 計算하기 爲한 軸系의 비틀림 常數 및 縱方向스프링常數에 關한 研究는 오래前부터 行하여져 왔다. 비틀림 常數의 研究는 主로 Timoshenko, Carter, Geiger, Ker Wilson, Tuplin等을 비롯하여 많은 사람들에 依하여 研究되었고 이들이 發表한 近似計算式에 依하여 비틀림 常數가 求하여지고, 軸系의 비틀림 固有振動數가 計算되었는데, 비틀림 振動에 關한 諸問題는 2次大戰終了時까지 原則的인 解決을 보았다고 생각된다. 한편 縱方向스프링常數에 關한 研究는 Dorey, Draminsky, Arderson, Guglielmotti, Johnson等에 依하여 研究되었으며 비틀림振動에 比하면 別로 많지 않다. 지금까지 軸系의 固有振動數를 計算하는데는 上記의 여러 사람들의 近似式이 使用되어 왔는데 이 計算式들은 既存 크랭크軸系에 對한 測定值를 適대로 하여 약간의 理論을 加味한 經驗式이기때문에 크랭크軸의 形狀이 從來의 것과 相異하면 잘 맞지 않고, 같은 크랭크軸이라 하여도 各者의 計算式에 따라 그 計算값이 差異가 일어난다. 특히 縱振動의 計算式은 그 差異가 심하고 實測值와의 誤差도 매우 크다.

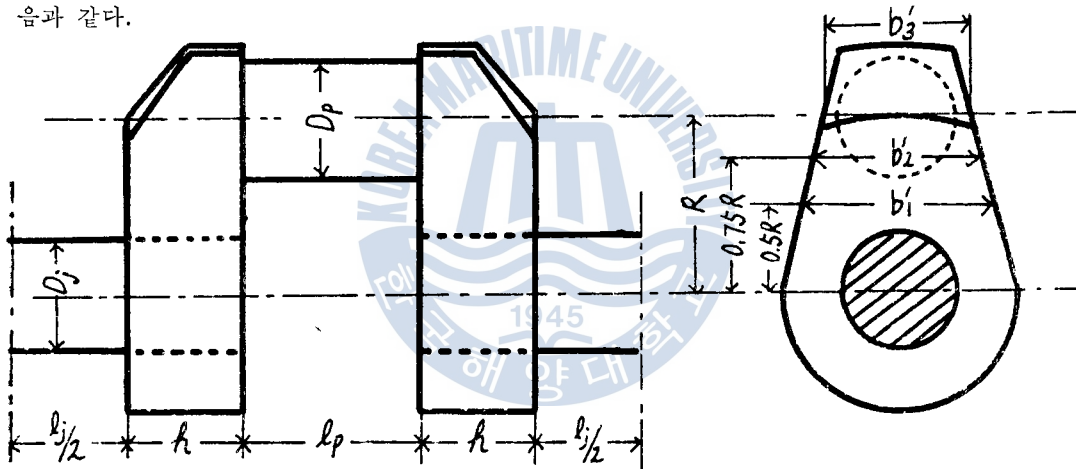
最近에 이르러 純理論的 方法에 依하여 設計段階에서 크랭크軸系의 여러 振動을 同時に 計算할 수 있는 方法이 發表되었으며, 비틀림 振動 또는 縱振動을 個別的으로 計算할 수 있는 近似式도 發表된 바있다. 그러나 여러 振動을 同時に 計算할 수 있는 方法은 電子計算機의 利用이 不可避하며 비틀림 振動과 縱振動을 個別的으로 計算하는 方法은 筆算에 依한 計算도 可能하나 隣接크랭크 間의 接續角度를 考慮하지 않았기때문에 이것의 影響이 큰 縱振動에 對하여서는 再考의 餘地가 많다.

本論文에서는 筆算에 依한 計算이 可能하고 隣接크랭크間의 接續角度的 影響을 考慮한 새로운 縱方向스프링常數의 近似式을 誘導하고 이 式의 信賴性을 檢討하기 爲하여 模型크랭크軸系를 만들어서 實測値와 計算値를 比較檢討하였으며 그 結果를 利用하여 模型크랭크軸系의 諸振動數를 計算하여 實測結果와 比較하였다. 또한 現 與件下에서 實際의 크랭크軸系에 對한 實測이 不可能하기때문에 이미 發表된 바있는 數個의 크랭크軸系에 對한 實測値와 本式에 依한 計算値를 比較하여 보았고 나아가서 이미 發表된 여러 近似式에 依한 結果와도 比較檢討을 行하였다.

## 2. 隣接角의 影響을 考慮한 縱方向스프링常數의 近似計算式

### 2.1. 現在까지 發表된 經驗的 計算式

지금까지 發表된 縱方向스프링 常數의 經驗式을 比較檢討하기 爲기 再整理하여 表示하면 다음과 같다.



[그림 1]

그림 1 과 같은  $i$ 제번 크랭크드로우의 縱方向스프링 常數의 逆數 즉 縱方向影響係數  $f_{xi}$ 는 다음 式들로 求하여지며 이것의 逆數가 縱方向스프링常數이다.

(1) Dorey의 式<sup>1),2)</sup>

$$f_{xi} = R^2(P_1 k_1 B_p + k_2 B_{w1}) \dots \dots \dots (1)$$

여기서,  $P_1 = 1.65$  (組立式 크랭크)

$P_1 = 1.625$  (半組立式 크랭크)

$$k_1 = 0.5 + \frac{\alpha}{360^\circ}, \quad k_2 = 0.1667 + \frac{\alpha}{360^\circ}$$

(2) Dramansky의 式<sup>1),3)</sup>

$$f_{xi} = R^2 \left\{ (B_p + Bh) \left(1 - \frac{k_3}{2}\right) + B_{w2} \left(\frac{2}{3} - \frac{k_3}{2}\right) \right\} + \frac{l_p + l_j}{EA_p} + \frac{2R}{GA_{w2}} \dots \dots \dots (2)$$

여기서

$$k_3 = 1 + \cos\alpha$$

(3) Anderson의 式<sup>1), 4)</sup>

$$f_{xi} = R^2 \left\{ P_2 k_4 B_p + (\lambda_A^2 k_4 - \frac{1}{3} \lambda_A^3) B_{w1} \right\} + \frac{l_p + l_j}{EA_p} + \frac{2(R-d)}{GA_{w1}} \dots\dots\dots (3)$$

여기서

$$P_2 = 1.1 \text{ (組立式 및 半組立式 크랭크軸)}$$

$$k_4 = 0.75 - 0.25 \cos\alpha$$

$$\lambda_A = 1 - 0.28d/R$$

(4) Guglielmotti의 式<sup>1), 5)</sup>

$$f_{xi} = R^2 (k_5 B_p + 0.6 \lambda_g^2 k_5 B_{w3}) \dots\dots\dots (4)$$

여기서

$$k_5 = 2/3 - (1/3)\cos\alpha, \quad \lambda_g = 1 - 0.44D/R$$

(5) Jonson의 式<sup>1), 6)</sup>

$$f_{xi} = R^2 (k_6 B_a + k_7 B_p + k_8 B_{w1}) \dots\dots\dots (5)$$

여기서,

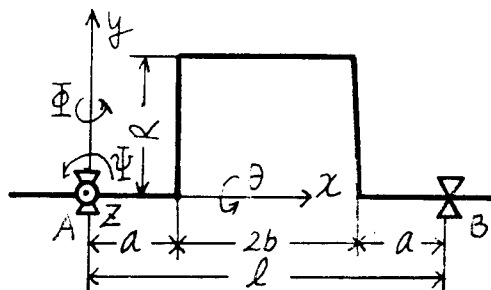
$$k_6 = (1/6)\cos(\alpha/2)$$

$$k_7 = 1 - (1/6)\cos(\alpha/2)$$

$$k_8 = 2/3 - (1/6)\cos(\alpha/2)$$

2.2. 理論的으로 誘導된 近似計算式

以上에서 紹介된 式들은 實驗結果를 加味한 經驗式이어서 크랭크形狀이 從來의 것과 相異하면 잘 맞지 않는다. 따라서 어떠한 크랭크軸에도 適用할 수 있기 위해서는 設計段階에서 圖面에 提示된 主要寸法만으로 計算이 可能한 理論式이 要望되는데 이것을 다음에 紹介한다”



[그림 2]

單一크랭크의 座標軸을 그림 2와 같이 定하고 縱方向影響係數(x軸方向)를  $f_x$ 라하면,

$$f_x = \frac{2R_b}{EJ} \left( R - \frac{\xi_x}{n} \right) + \frac{R^2}{EJ_x} \left( \frac{2R}{3} - \frac{\xi_x}{n} \right) \dots\dots\dots (6)$$

여기서  $\xi_x/n$ 는 x軸方向으로 單位힘이 作用할 때 隣接크랭크로부터 받는 모우멘트이며  $n$ 는 隣接크랭크角度에 따라 決定되는 常數이고 普通  $n=3/2$ 를 取한다.

$\xi_x$ 는 隣接크랭크角度가  $0^\circ$ 인 때 隣接크랭크로부터 받는 모우멘트로서 다음과 같이 計算되는 값이다.

$$\xi_x = \frac{f_{\Psi x}}{f_{\Psi\Psi}}$$

$$f_{\Psi x} = \frac{\alpha' a}{EJl^2} \left[ \frac{1+\rho}{3} \{a^2 + l^2 + l(a+2b) + (a+2b)^2\} - l^2 \right]$$

$$+ \frac{2b}{EJl^2} \left[ l^2 R - (a+b)l \{ (1+\rho)R + \alpha' \} + \frac{\alpha'(1+\rho)}{3} \{ (a+2b)^2 + a(a+2b) + a^2 \} \right]$$

$$+ \frac{R}{EJl^2} \left[ \{ l - (1+\rho)a \} \left( \frac{lR}{2} - \alpha'a \right) + \{ l\rho - (1+\rho)a \} \left\{ \alpha'(l-a) - \frac{lR}{2} \right\} \right]$$

$$f_{\Psi\Psi} = \frac{l}{EJ} \left\{ \frac{(1+\rho)^2}{3} - \rho \right\} + \frac{R}{EJl^2} \left[ \{ l^2 - (1+\rho)a \}^2 + \{ l\rho - (1+\rho)a \}^2 \right]$$

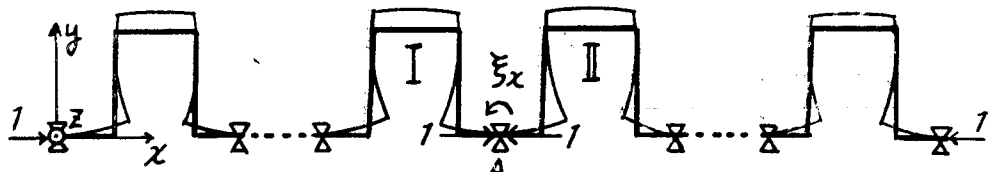
$$\alpha' = \frac{\frac{R}{2} \left( \frac{2b}{J} + \frac{R}{J_z} \right)}{R + \frac{R \{ a^2 + (l-a)^2 \}}{J_z l^2}}$$

$$\rho = \frac{\frac{l}{6J} - \frac{2Rd(a-l)}{J_z l^2}}{\frac{l}{3J} + \frac{R \{ a^2 + (l+a)^2 \}}{J_z l^2}}$$

여기서  $f_{\Psi x}$  및  $f_{\Psi\Psi}$ 는 그림 2에서 B端을 固定하고 A端에서 x軸方向의 單位힘 및 z軸둘레의 單位모우멘트를 作用시켰을 때 各各 A端이 이루는 角이다.

### 2.3. 隣接크랭크接續角의 影響

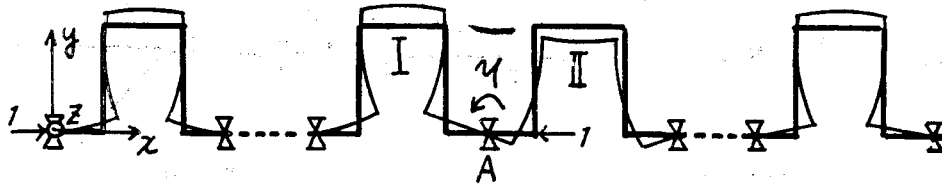
(6)式에서  $n$ 의 값은 隣接크랭크와의 接續角의 크기 如何에 關係없이  $\frac{3}{2}$ 의 값을 取하도록 決定하고 있으나 이미 指摘한 바와 같이 縱方向스프링常數는 隣接크랭크와의 角에 依하여 影響을 크게 받으므로 좀더 正確한 計算을 위하여서는 이것의 影響을 考慮에 넣어서 計算할 必要가 있다. 本章에서는 이  $n$ 값이 接續角 $\alpha$ 에 따라 어떻게 變하는가를 考察하여 본다. 隣接크랭크의 接續角이  $0^\circ$ 인 크랭크軸에서 크랭크모우數가 무수히 많다고 한다.



[그림 3]

지금 그림 3에서와 같이 힘과 모우멘트의 方向을 座標軸과 一致시킨 다음 크랭크軸의 一端

에서  $x$ 軸方向으로 單位힘을 作用시키고 그 反力を 他端에서 받을 때 任意의 크랭크 I이 그의 隣接크랭크 II로부터 받는 모우멘트는  $\xi_x$ 인데 이것을 解析하여 보기 위하여 다음과 같이 생각 하기로 한다. 우선 A端에  $x$ 軸方向의 單位힘 2個를 서로 反對方向으로 作用시켜도 全體의 系 에는 아무런 變化도 없다. 이것을 그림 4와 같이 크랭크軸의 左端에서  $x$ 軸方向으로 單位힘이 作



[그림 4]

用하고 그 反력을 A端에서 받는다고 생각하고 다음에 그림 5와 같이 A端에서 單位힘이  $x$ 軸方 向으로 作用하고 그 反력을 크랭크軸의 右端에서 받는 것으로 나누어서 생각하기로 한다.

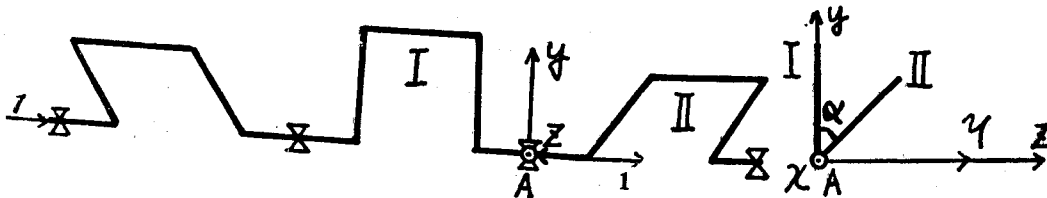


[그림 5]

처음의 境遇에 크랭크 II가 A端에서 크랭크 I에 주는 모우멘트를  $\eta$ 라 하고 두번째 境遇에 크 랭크 I이 크랭크 II에 주는 모우멘트를  $-\eta'$ 라 하면 두번째 境遇에 크랭크 II가 크랭크 I에 주는 모우멘트는  $-\eta'$ 와는 크기는 같고 方向만 反對이므로  $\eta'$ 이다. 두가지 境遇에 있어서 크랭크 II가 크랭크 I에 주는 모우멘트를 벡터的으로 合하면, 그림 3에서와 같이 一端에서 單位힘이 作用하 고 그 反력을 他端에서 받을 때 크랭크 I이 크랭크 II로부터 받는 모우멘트가 되는데,  $\eta$ 와  $\eta'$ 는 方向이 같기 때문에 代數的으로 合하면 되므로,

$$\eta + \eta' = \xi_x \dots \dots \dots (7)$$

그런데 크랭크角度가  $\alpha$ 인 境遇에는 두 모우멘트의 方向이 一致하지 않고  $\alpha$ 의 角을 가지게 된다. 이 境遇에 隣接크랭크間의 作用모우멘트는 그림 6-a, b와 같다.

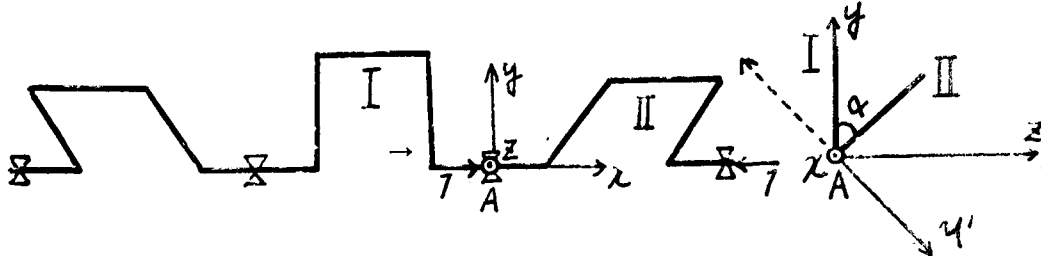


[그림 6-a]

[그림 6-b]

먼저 그림 6-a와 같이 크랭크軸의 左端에서  $x$ 軸方向으로 單位힘이 作用하고 그 反력을 A端에 서 받을 때 크랭크 II가 크랭크 I에 주는 모우멘트는 크기가  $\eta$ 이고 方向은 그림 6-b에 나타난 바

와 같이 크랭크 I에 垂直이다. 다음에 그림 7-a에서와 같이 A에서 x軸方向으로 單位힘이 作用하고 그 反力을 크랭크軸右端에서 받을 때 크랭크 I이 크랭크 II에 주는 모우멘트는 크기가 η'이



[그림 7-a]

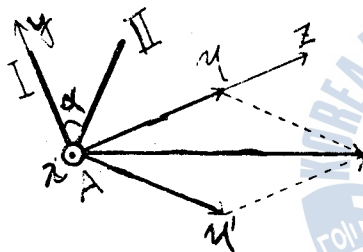
[그림 7-b]

고 方向은 그림 7-b에서와 같이 点線화살표 方向이다. 따라서 크랭크 II가 크랭크 I에 주는 모우멘트는 이와 크기가 같고 方向이 反對이므로 그림 7-b의 實線화살표이다. 두가지 境遇에 있

어서 크랭크 II가 A端에서 크랭크 I에 주는 모우멘트의 方向은 그림 8과 같고 그 크기는

$$\sqrt{\eta^2 + \eta'^2 + 2\eta\eta'\cos\alpha}$$
이다.

그런데  $\eta = \xi_x/2$ 이므로 (證明 附錄1) (7)式에서  $\eta' = \xi_x/2$ 이며



[그림 8]

$$\sqrt{\eta^2 + \eta'^2 + 2\eta\eta'\cos\alpha} = \frac{\xi_x}{\sqrt{1 + \cos\alpha}}$$

그러므로

$$n = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos\alpha}}$$

따라서 (6)式은 다음과 같이 된다.

$$f_x = \frac{2Rb}{EJ} \left( R - \frac{\xi_x}{\sqrt{1 + \cos\alpha}} \right) + \frac{R^2}{EJ_x} \left( \frac{2R}{3} - \frac{\xi_x}{\sqrt{1 + \cos\alpha}} \right) \dots\dots\dots(8)$$

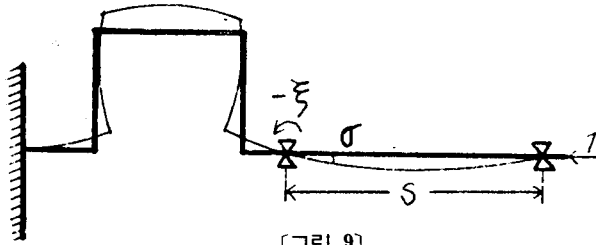
2.4. 實際의 크랭크軸에 새로운 近似計算式을 利用하는 要領

어떤 크랭크軸에 있어서 任意的 크랭크드로우의 縱方向影響係數는 隣接角의 影響뿐만 아니라 그 드로우의 位置, 드로우의 數, 中間軸 및 推進軸의 길이, 베어링과 베어링사이의 距離, 推力 베어링의 位置 等의 影響을 받으므로 嚴密한 縱方向影響係數의 計算은 各 크랭크軸마다 固有한 計算을 해야하나, 近似的인 計算은 比較的 影響을 적게 받는 事項을 一般的인 크랭크軸에 가깝게 假定하고 計算하면 모든 크랭크軸에 對하여 一律的인 計算式이 可能한데 (8)式이 그것이다. 따라서 (8)式을 實際의 크랭크軸에 適用시킬 때는 다음과 같은 事項을 考慮할 必要가 있다.

마지막 크랭크드로우는 後端에 드러스트軸이 接續되고 드러스트베어링과 터어닝기어가 있다. 그러므로 마지막 크랭크드로우가 드러스트軸으로부터 받는 모우멘트는 드러스트베어링의 位置,



마지막 크랭크드로우의 後端메인베어링으로부터 다음 드러스트軸 支持베어링까지의 距離, 中間軸의 길이 및 支持베어링의 간격 (Span) 등에 따라 달라진다. 一例로서 그림 9 와 같은 크랭크



[그림 9]

드로우에서 後端메인베어링으로부터 드러스트軸 支持베어링까지의 距離를 S라 하고 드러스트軸의 直徑과 材質이 자아날의 그것과 같다고 한다. 드러스트軸에서 單位힘이 作用할 때 크랭크드로우가 드러스트軸으로부터 받는 모우멘트

를  $-\xi$ 라 하고 자아날의 角度를  $\sigma$ 라 하면 다음 關係가 成立한다.

$$f_{\Psi x} - \xi f_{\Psi \Psi} = \sigma$$

$$\sigma = \frac{\xi S}{3EJ}$$

따라서

$$\xi = \frac{f_{\Psi x}}{f_{\Psi \Psi} + \frac{S}{3EJ}} = \frac{\xi_x}{1 + \frac{S}{3EJ} \cdot \frac{1}{f_{\Psi \Psi}}}$$

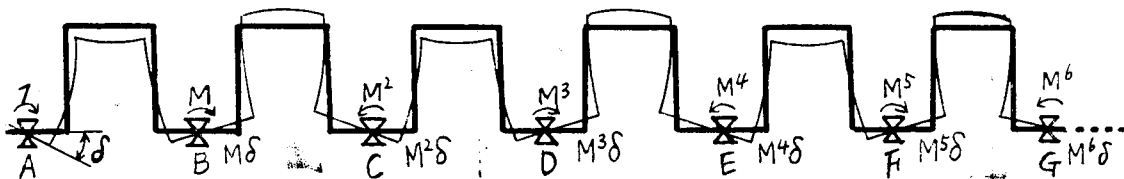
그러므로

$$n = 1 + \frac{S}{3EJ} \cdot \frac{1}{f_{\Psi \Psi}} \dots \dots \dots (9)$$

그런데 普通의 軸系는 마지막 크랭크드로우 後端에 드러스트베어링이 機關과 一體로 組立되어 있고 그 다음에 터어닝기어가 連結되는 構造이거나, 마지막 크랭크드로우 後端에 터어닝기어가 먼저 오고 그 다음에 드러스트베어링이 連結되는 構造이다. 어느 것이나 支持베어링이 兩側에 있기 때문에 一般의 程度로  $\frac{l}{2} \leq S \leq l$ 이며 이 값을 (9)式에 代入하면 n의 값은 1.3~1.5 程度이므로 마지막 크랭크드로우 後端에 隣接角度 90°의 크랭크드로우가 接續되었다고 看做하면 된다.

또 2.3章과 附錄 I 에서 크랭크드로우가 무수히 많다고 假定하고 式을 誘導하였으나 實際는 그렇지 않다. 그러나 實際의 크랭크軸에 適用하여도 支障이 없음을 보이면 다음과 같다. 그림 10에 表示한 바와 같이 隣接 크랭크接續角이 0°인 크랭크軸에서 一端 A에 單位모우멘트를 加할 때 各 자아날 A, B, C, D, E, .....가 이루는 角의 크기는, 자아날 A가 이루는 角을  $\delta$ 라 하면,  $\delta, M\delta, M^2\delta, M^3\delta, M^4\delta, M^5\delta, \dots$ 로서 等比級數를 이루고 公比는 M이며 (附錄 4 參照)

$$M = \frac{\Psi - \sqrt{\Psi^2 - \Psi'^2}}{\Psi'}$$



[그림 10]

$$\Psi = \frac{l}{3EJ} + \frac{R\{(l-a)^2 + a^2\}}{EJ_z l^2}$$

$$\Psi' = \frac{l}{6EJ} + \frac{Ra(a+2b)}{EJ_z l^2}$$

한편 각 자아날에서 크랭크로우 相互間에 授受하는 모우멘트는  $1, M, M^2, M^3, M^4, M^5, \dots$  으로서 역시 等比級數이며 公比는  $M$ 이다.  $M$ 는 크랭크軸에 따라 다르나 1보다 적으며, 다음章에서 나오는 그림11의 (A) 크랭크軸은  $M=0.1786$ , (B) 크랭크軸은  $M=0.2099$ , (C) 크랭크軸은  $M=0.1917$ 이고 그림 16의 模型크랭크軸은  $M=0.24$ 로 一般的으로  $M$ 의 값은 大端히 적으므로 그의 累乘은 더욱 적어져서 그림 10의 C나 D의 자아날은 모우멘트의 授受가 거의 零이고 角度도 零으로 보아도 큰 誤差는 없다. 嚴密히는 無限大째번 자아날에서 모우멘트의 授受가 零이나 實際는 3~4째번의 자아날에서 모우멘트의 授受는 最初의 값의 1%未滿이며 零에 아주 가까우므로 最少한 실린더數가 4~6以上인 船用機關에서는 2.3章에서 誘導한 式을 아무런 支障없이 實際의 크랭크軸에 適用할수 있다.

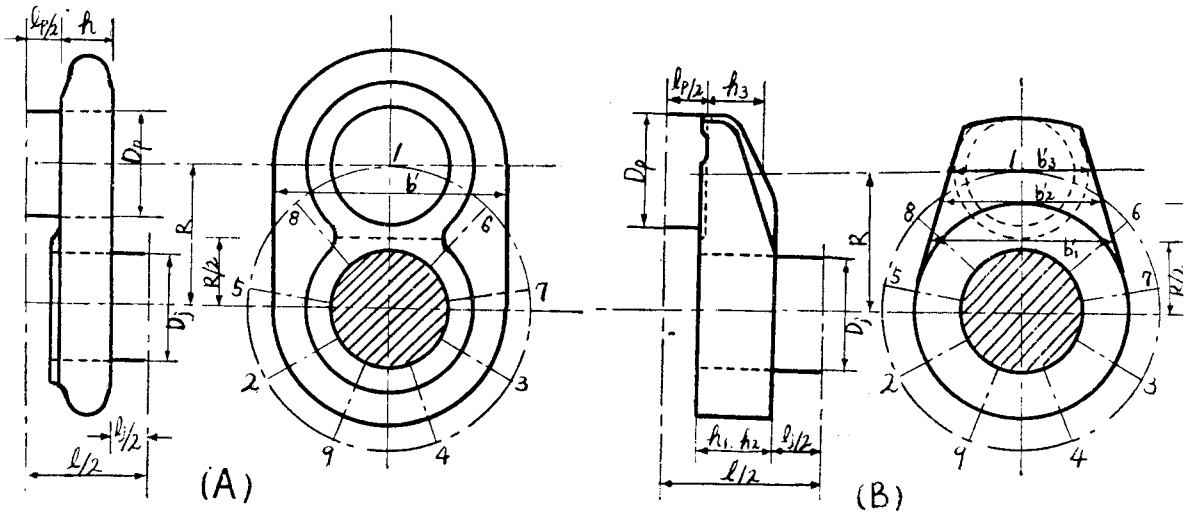
### 3. 새로운 近似計算式의 計算結果와 實測值와의 比較

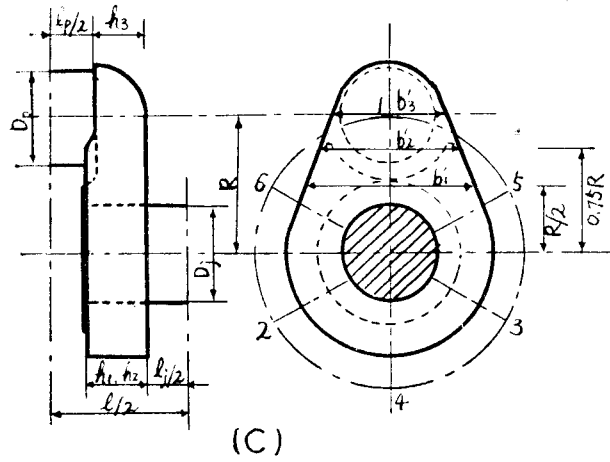
#### 3.1. 實際의 크랭크軸에 있어서의 實測值와 計算值의 比較

그림 11의 (A), (B), (C)와 表 1에서 表示한 크랭크軸의 縱方向影響係數를 N. J. Visser<sup>1)</sup>가 여러 近似式을 利用하여 計算하고 實測도 하였는데 그의 結果와 前章에서 誘導한 새로운 近似式으로 計算한 結果를 그림 12, 13, 14와 表 2, 3, 4에 表示하였다.

그림 12와 表 2에 있어서 實測值에 가까운 값을 주는 것은 Anderson의 式이며 다음이 筆者의 式이며 그 差는 다른 式에 比하여 매우 작다. 特히 8~9點은 實測值는 줄어드는데도 不拘하고 筆者의 計算值를 除外하고는 모두 增加하는 것으로 나타난다.

그림 13과 表 3에 있어서는 筆者의 式이 가장 實測值에 가까운 結果를 보이며 다음이 Guglielmotti의 式에 依한 結果이다.



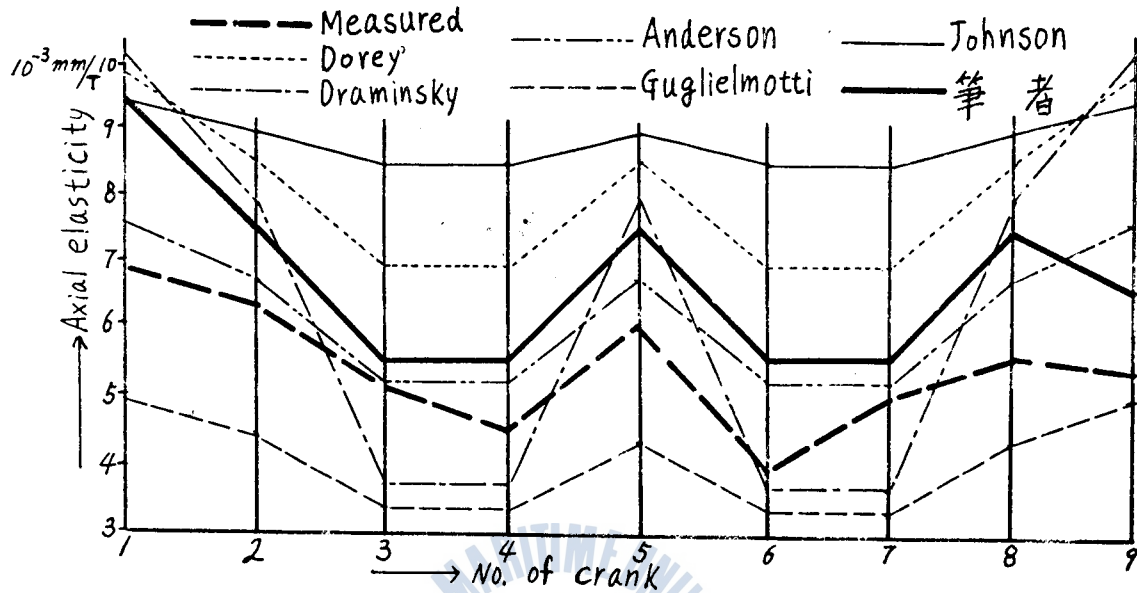


(C)

[그림 11]

[表 1. 크랭크軸 치수]

Item	(A) Crankshaft	(B) Crankshaft	(C) Crankshaft	Dimension
$l_j$	37	50	40.5	cm
$A_p$	2780	3020	2380	cm <sup>2</sup>
$A_{w1}$	3610	4050	3020	cm <sup>2</sup>
$A_{w2}$	3610	3650	2330	cm <sup>2</sup>
$B_a$	29.6	32.8	42.9	10 <sup>-12</sup> /kgcm
$B_h$	7.7	8.9	10.4	10 <sup>-12</sup> /kgcm
$B_p$	29.6	20.0	42.9	10 <sup>-12</sup> /kgcm
$B_{w1}$	188	67	142	10 <sup>-12</sup> /kgcm
$B_{w2}$	188	74	218	10 <sup>-12</sup> /kgcm
$B_{w3}$	188	242	270	10 <sup>-12</sup> /kgcm
$d$	59	62	55	cm
$h_2$	29	40.5	29.5	cm
$J_1$	59.5	72.5	44.9	10 <sup>4</sup> cm <sup>4</sup>
$J_2$	59.5	72.5	44.9	10 <sup>4</sup> cm <sup>4</sup>
$J_{z1}$	20.3	55.4	26.0	10 <sup>4</sup> cm <sup>4</sup>
$J_{z2}$	20.3	49.8	16.9	10 <sup>4</sup> cm <sup>4</sup>
$J_{z3}$	20.3	15.2	13.6	10 <sup>4</sup> cm <sup>4</sup>
$n$	9	9	6	
$l_p$	37	42.6	40.5	cm
$R$	80	77.5	77.5	cm



[ 그림 12 ]

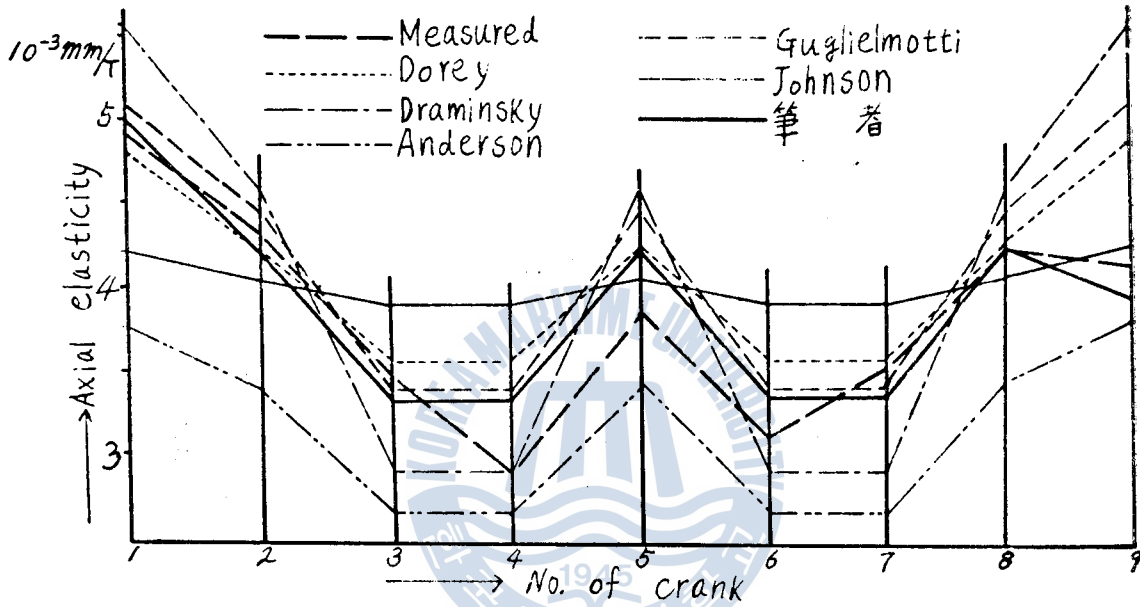
[ 表 2. (A) 크랭크軸의 實測値와 計算値, 單位  $10^{-3}mm/ton$  ]

Crank number	Measured	Formulae					
		Dorey	Draminsky	Anderson	Guglielmotti	Johnson	筆者
1	6.92	9.87	10.15	7.63	4.93	9.38	9.39
2	6.27	8.60	7.88	6.75	4.31	8.89	7.54
3	5.05	6.93	3.70	5.13	3.27	8.36	5.47
4	4.40	6.93	3.70	5.13	3.27	8.36	5.47
5	6.00	8.60	7.88	6.75	4.31	8.89	7.54
6	3.85	6.93	3.70	5.13	3.27	8.36	5.47
7	4.90	6.93	3.70	5.13	3.27	8.36	5.47
8	5.50	8.60	7.88	6.75	4.31	8.89	7.54
9	5.33	9.87	10.15	7.63	4.93	9.38	6.70

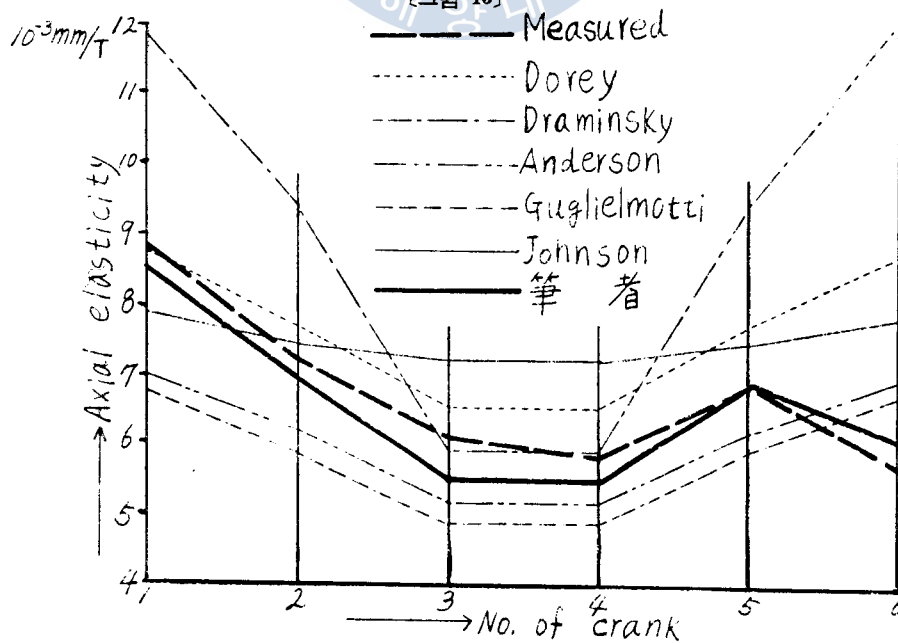
[ 表 3. (B) 크랭크軸의 實測値와 計算値, 單位  $10^{-3}mm/ton$  ]

Crank number	Measured	Formulae					
		Dorey	Draminsky	Anderson	Gugliemoti	Johnson	筆者
1	4.93	4.84	5.43	3.80	5.08	4.19	5.00
2	4.32	4.28	4.54	3.38	4.44	4.04	4.25
3	3.48	3.53	2.92	2.70	3.38	3.87	3.35
4	2.92	3.53	2.92	2.70	3.38	3.87	3.35

5	3.83	4.28	4.54	3.38	4.44	4.04	4.25
6	3.14	3.53	2.92	2.70	3.38	3.87	3.35
7	3.51	3.53	2.92	2.70	3.38	3.87	3.35
8	4.23	4.28	4.54	3.38	4.44	4.04	4.25
9	4.14	4.84	5.43	3.80	5.08	4.19	3.88



[그림 13]



[그림 14]

〔表 4. (C) 크랭크軸의 實測値와 計算値, 單位  $10^{-3}mm/ton$ 〕

Crank number	Measured	Formulae					筆者
		Dorey	Draminsky	Anderson	Guglielmotti	Johanson	
1	8.82	8.79	11.88	6.98	6.80	7.89	8.46
2	7.35	7.73	9.38	6.22	5.94	7.55	6.90
3	6.08	6.68	5.97	5.19	4.85	7.26	5.55
4	5.88	6.68	5.97	5.19	4.85	7.26	5.55
5	6.90	7.73	9.38	6.22	5.94	7.55	6.90
6	5.71	8.79	11.88	6.98	6.80	7.89	6.19

그리고 이 경우에 있어서도 8~9점에 있어 實測値와 筆者의 式에 依한 結果는 적어지는데도 不拘하고 Guglielmotti의 式에 依한 結果는 反對로 急激히 增加함을 보이고 있다.

그림 14와 表 4에 있어서는 筆者의 式에 依한 結果以外에는 모두 實測値와 相當히 큰 誤差를 보이고 있다.

以上の 3가지 경우를 綜合하여 보면 筆者의 式을 除外하고는 信賴할 만한 結果를 주지 못하고 있음을 알 수 있으며 더구나 그림 11(A)는 全組立, 그림 11(B), (C)는 半組立式 크랭크軸으로서 3個의 크랭크軸이 相異한 值數와 形狀을 갖고 있음에도 不拘하고 平均적으로 實測値에 가까운 값을 주는 것은 이 計算式의 信賴度를 어느 程度 保證한다고 볼 수 있을 것이다.

### 3.2. 模型크랭크에 있어서의 實測値와 計算値의 比較

表 7과 그림 16에서 表示한 模型크랭크軸의 縱方向影響係數를 여러 計算式에 依하여 計算하고 實測하였는데 表 6은 그 結果를 나타낸다. 이 影響係數의 實測은 그림 15에 보이는 바와 같이 2kg의 錘와 다이알게이지를 利用하여 크랭크암間의 距離의 變化를 測定하였다. 表 5는 각 크랭크드로우에 對하여 測定한 값이다.

表 6에서 보이는 바와 같이 計算結果는 筆者의 式에 依하면 約 1.4%程度 작게 나타나며 다음이 Draminsky, Gugliemotti, Anderson, Johnson, Dorey의 式의 順序로 5~78%程度 크게 주어진다. 이 境遇에 있어서도 筆者의 式이 가장 正確한 結果를 주며 이 程度의 誤差를 갖는 스프링 常數를 利用하여 共振振動數를 計算하면 다른 要素가 正確할 境遇 그의 誤差는 0.7% 以內로 되므로 實用上 아무 支障이 없다.

〔表 5. 模型크랭크 縱方向影響係數 實測値〕

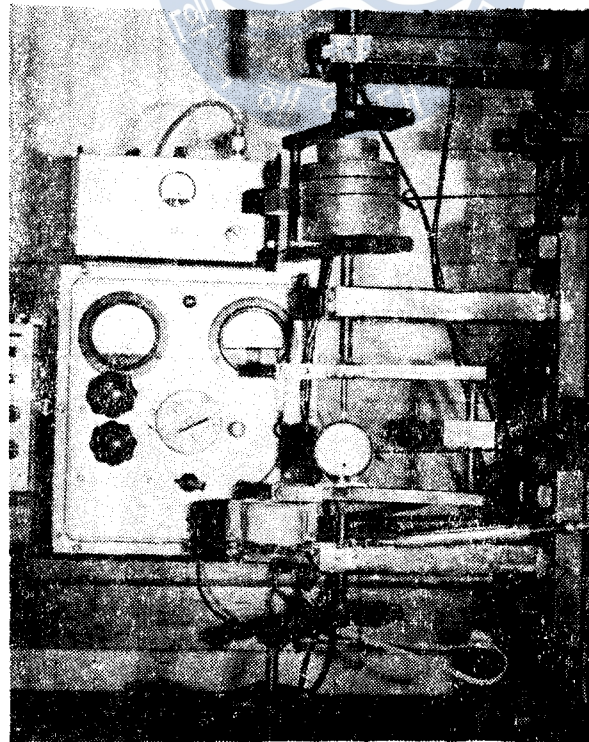
(單位  $1/100mm$ )

回	數	No.1 크랭크	No.2 크랭크	No.3 크랭크
1		11.75	10.25	11.5
2		12	11.5	11.25
3		12.25	10.5	10

4	11.5	11.25	12
5	12	10	10.75
6	12.75	10.75	11
7	11	10	11.25
計	83.25	74.25	77.75
平 均	11.89285	10.60715	11.10715

[表 6. 模型크랭크 縱方向影響係數 計算值]

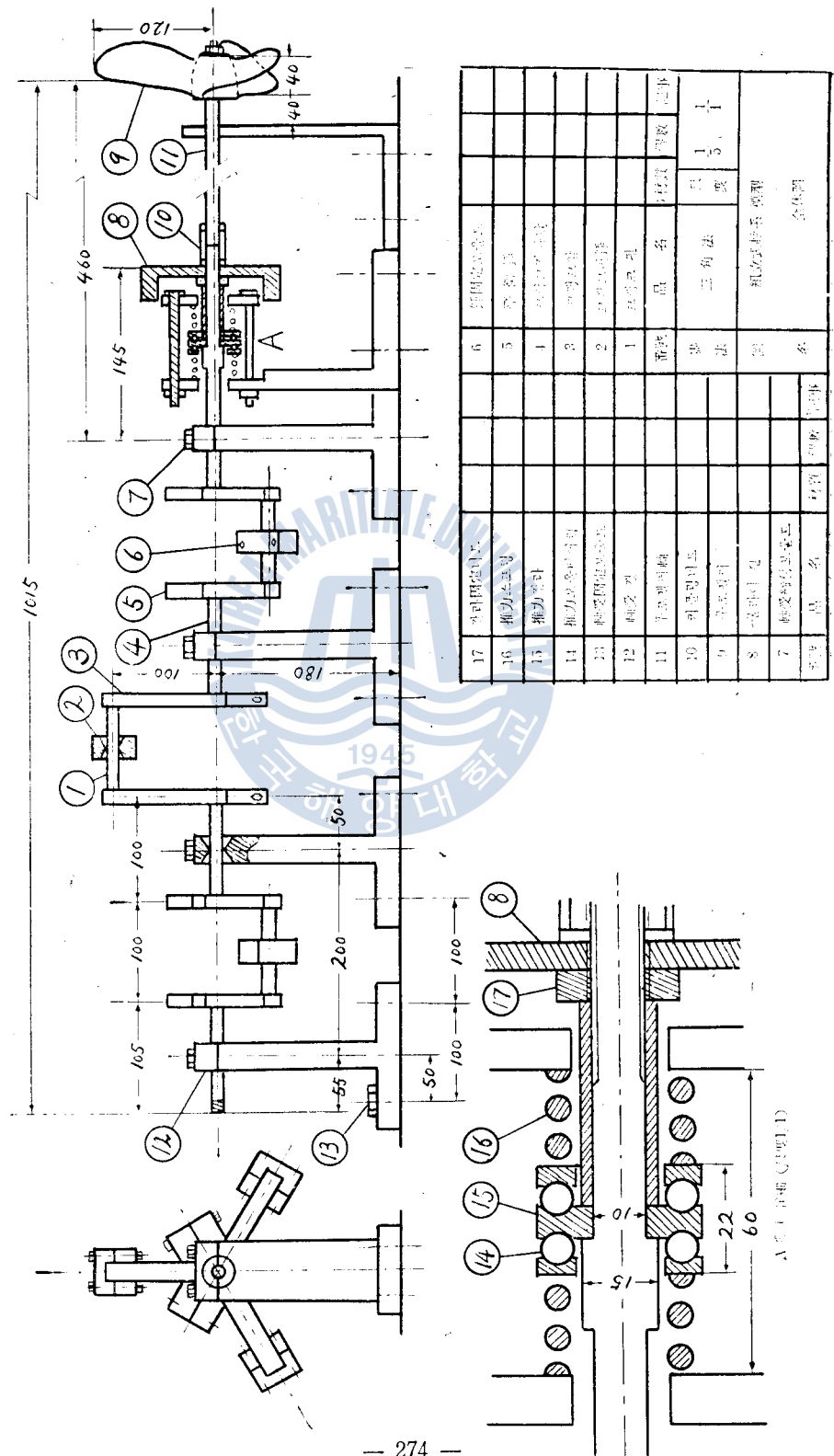
公 式	影 響 係 數	實 測 과 의 比	誤 差 率
Dorey의 式	$1.9896 \times 10^{-2} \text{ cm/kg}$	177.61%	77.6%
Draminsky의 式	$1.1761 \times 10^{-2} \text{ "}$	104.99%	5.0%
Anderson의 式	$1.4562 \times 10^{-2} \text{ "}$	129.99%	30.0%
Guglielmotti의 式	$1.2611 \times 10^{-2} \text{ "}$	112.58%	12.6%
Johnson의 式	$1.4871 \times 10^{-2} \text{ cm/kg}$	132.75%	32.8%
筆者의 式	$1.10485 \times 10^{-2} \text{ "}$	98.63%	1.4%
實 測 值	$1.1202 \times 10^{-2} \text{ "}$	100.00%	0%



錘(2kg)

다이알게이지

[그림 15] 模型크랭크 影響係數實測



( 圖 16 )





[表 7. 模型크랭크의 치수]

項 目	치 수	單 位	項 目	치 수	單 位
$D_j$	1	cm	$A_w$	1.6	cm <sup>2</sup>
$D_p$	0.9	cm	$J_1$	0.049	cm <sup>4</sup>
$R$	10	cm	$J_2$	0.0322	cm <sup>4</sup>
$l_j$	9	cm	$J_z$	0.133	cm <sup>4</sup>
$l_p$	9	cm	$E$	$2.12 \times 10^6$	kg/cm <sup>2</sup>
$h$	1	cm	$G$	$0.84 \times 10^6$	kg/cm <sup>2</sup>
$b'$	1.6	cm	$a$	10	cm
$\alpha$	120°	Degree	$b$	5	cm
$d$	0.95	cm	$J$	0.04	cm <sup>4</sup>
$A_p$	0.6361	cm <sup>2</sup>	$l$	20	cm
$B_a$	86.4619	10 <sup>-6</sup> /kg.cm	$B_p$	131.841	10 <sup>-6</sup> /kg.cm
$B_h$	4.88	10 <sup>-6</sup> /kg.cm	$B_w$	35.3861	10 <sup>-6</sup> /kg.cm

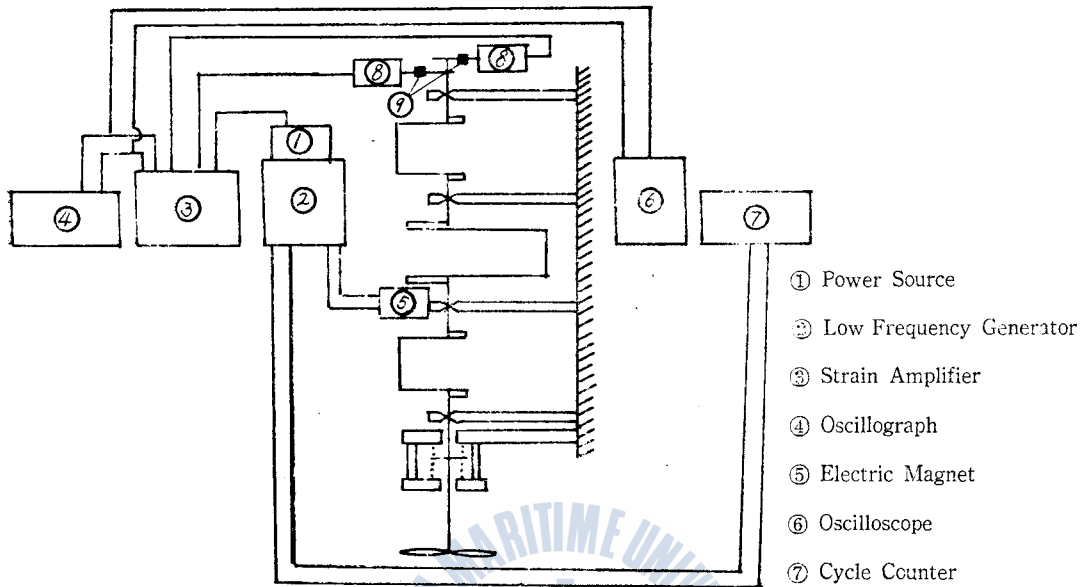
#### 4. 模型크랭크에 依한 振動數의 實測과 計算値의 比較

2.2章과 2.3章에서 說明한 理論의 近似式에 依하여 表 7 과 그림 16에서 表示한 模型크랭크의 스프링常數를 求한 다음 이것이 實際의 振動計算에 미치는 影響을 調査하기 위하여 Holzer法에 依하여 固有振動數를 計算하고 다음과 같은 實驗을 하여 얻은 實測値와 比較하여 보았다.

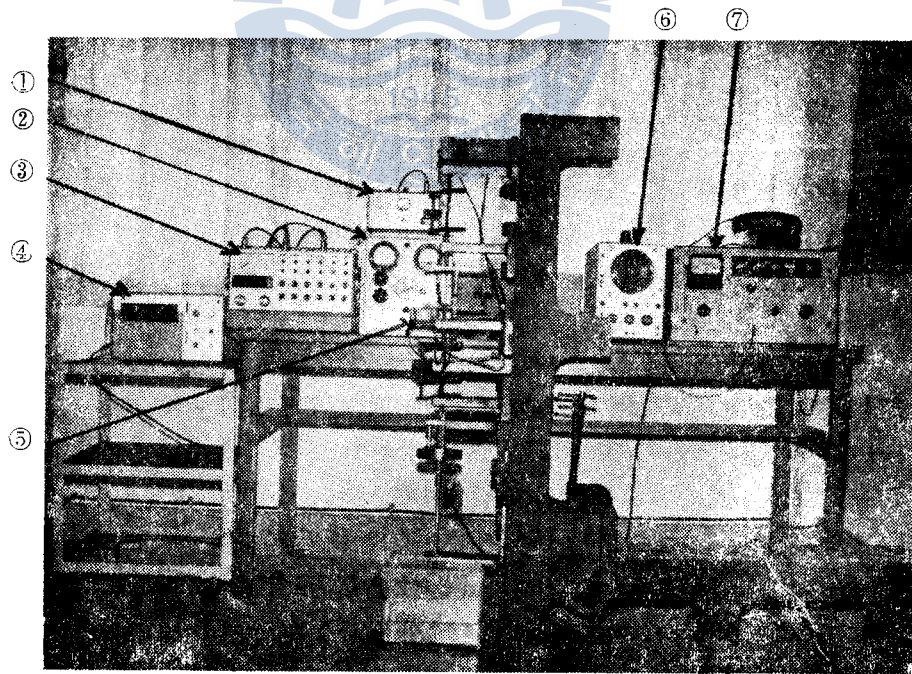
##### 4.1. 實驗裝置와 實驗方法

그림 16은 組立式軸系模型全體圖이고, 表 7 은 그의 치수이다. 3 個의 크랭크드로우를 가지며 각드로우는 120°의 等角을 이루고 配置되었다. 크랭크암과 자아날 및 크랭크핀과의 結合은 끼워맞추기를 한 다음 핀을 박고 硬膠으로 固定시켰다. 메인베어링과 크랭크鍾는 Knife edge狀으로 하여 理想에 接近시켰다. 드러스트 베어링은 볼베어링을 使用하였고 스프링을 通하여 推力이 傳達되도록 함으로써 드러스트베어링과 船體와의 彈性에 代身하였다. 프로펠러軸과 크랭크軸과는 二重너트와 washer로써 커플링너트를 만들어 強하게 靄었다. 프로펠러軸과 프로펠러는, 프로펠러軸端과 보스구멍을 圓錐形으로 깎고 작은 홈을 만들어 끼우고 너트로 채웠다.

그림 17은 全體配置圖이고 그림 18은 系統圖이다. 各 베어링으로부터의 摩擦을 적게 하기 위하여 全裝置를 垂直方向으로 裝備하였다.



[그림 17]



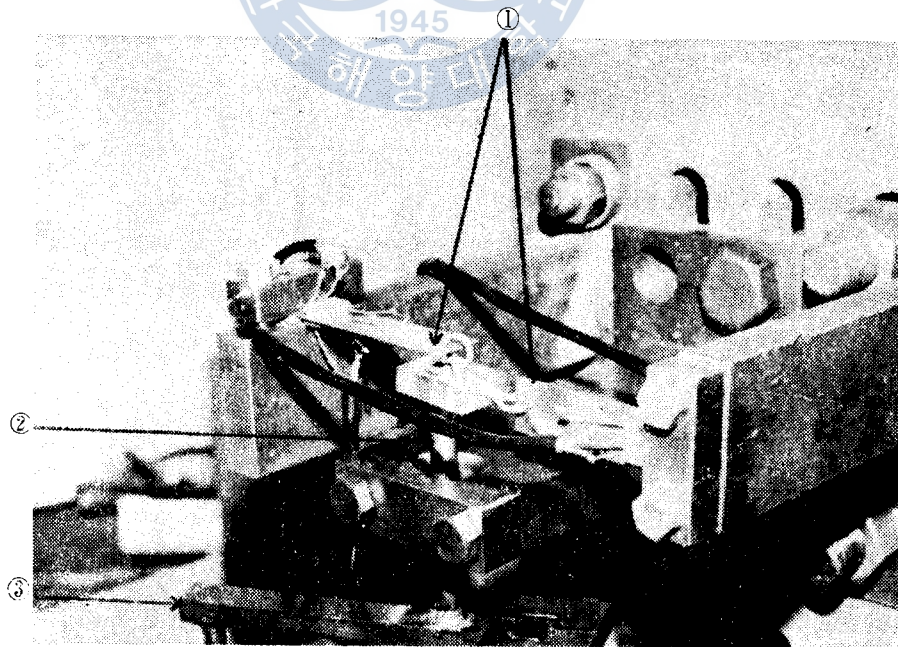
① Power Source ② Low frequency generator ③ Strain amplifier ④ Oscillograph  
 ⑤ Electric Magnet ⑥ Oscilloscope ⑦ Cycle counter ⑧ Bridge box ⑨ Strain gauge

[그림 18]

[表 8 實驗裝置 一覽表]

No.	名 稱	仕 樣	備 考
1	파우어 소오스	日本國 共和社 製	DPE-10H
2	低周波 發生器	筆者組立	
3	스트레인 암프	日本國 共和社 製	DPM-CT
4	오실로 그래프	日本國 共和社 製	RMV-33
5	電 磁 石	筆者組立	
6	오실로 스코프	日本國 菊水電波社 製	
7	싸이클 카운터	日本國 ATAKA Co. 製	VS-105
8	브리지 복스	日本國 共和社 製	DB-120
9	스트레인 게이지	日本國 共和社 製	KP-6-A1-11

低周波發生裝置에 依하여 最下 0.8Hz에서 約 120Hz 까지의 矩形波를 任意의 出力으로 發生 시켜 電磁石을 通하여 平衡錘에 作用시킴으로써 軸系에 起振力을 加하였다. 軸系의 振動은 그림 19에 보이는 바와 같이 스트레인게이지를 兩面에 붙인 磷青銅板 2枚를 使用하여 비틀림 方向과 縱方向 兩 方向의 變位를 同時에 檢出하여 增幅器에 넣고 增幅시켜서 오실로스코프와 오실로그래프에 넣어 直接 보기도 하고 記錄도 하였다.

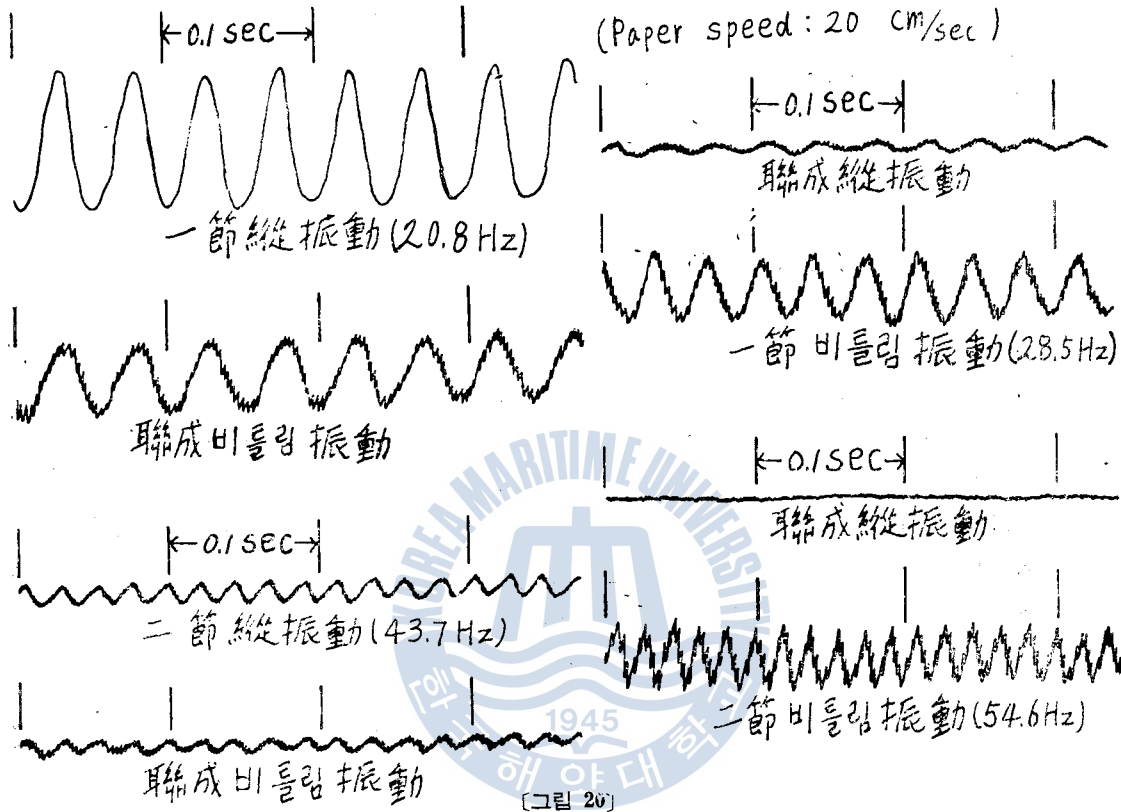


① 磷青銅板      ② 크랭크자아날      ③ 크랭크암

[그림 19]

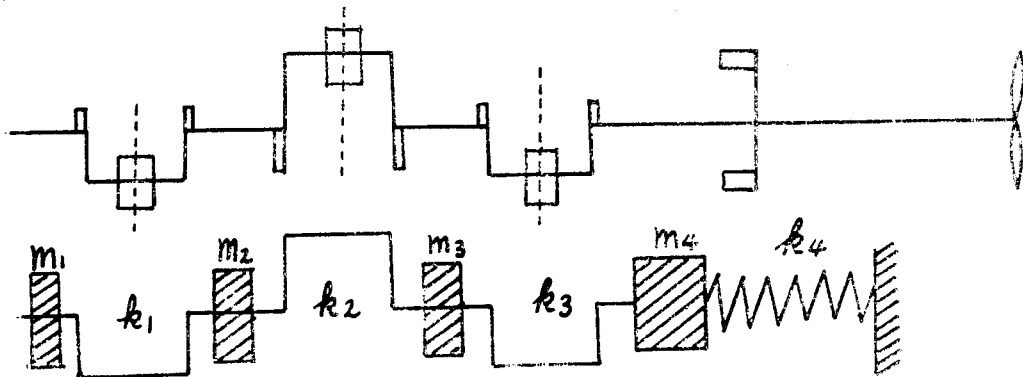
그림 20은 一節振動 및 二節振動을 縱비틀림에 對하여 各各 記錄한 것이다.

이 振動에 依한 聯成振動도 同時에 記錄하여 添附하였다.



#### 4.2. 模型크랭크의 固有振動數의 計算

그림 21과 같이 各部의 質量을 集中시켜서 計算하였다. 여기서  $m_4$ 는 #3 크랭크의 折半과 플라이휠, 푸로펠러 및 푸로펠러軸의 質量을 集中시킨 것이다.  $k_4$ 는 드레스트베어링에 있는 스프링



[그림 21]

링의 스프링常數이다. 이것의 測定도 2kg의 錘와 다이알게이지를 利用하였다. 各部의 質量 및 스프링 常數는 表 9와 같고 이 表에 따라 Holzer法에 依하여 固有振動數를 計算하였다. (附錄 3 參照)

〔表 9 各部의 質量과 스프링常數〕

$m_1$	0.5484 grsec <sup>2</sup> /cm	$k_1$	90.51 kg/cm
$m_2$	1.0279 "	$k_2$	90.51 "
$m_3$	1.0279 "	$k_3$	90.51 "
$m_4$	3.6878 "	$k_4$	235.30 "

實測結果와 計算結果는 表10과 같다. 비틀림振動도 記錄하고 實測하여 附錄 2에서 計算한 結果와 比較하였다. 一節縱振動은 當初 豫想한 바와 같이 0.7% 程度의 誤差를 보여주고 있으며 二節縱振動은 誤差가 1.8%로 되어 약간 增加하였으나 이것은 質量計算의 誤差와 聯成비틀림 振動에 依한 影響으로 생각할 수 있다. 여기에 反하여 비틀림振動의 計算結果는 매우 좋다.

〔表 10 固有振動數의 實測値와 計算値의 比較〕

振 動	節	實 測	計 算	計 算/實 測	誤 差 率
縱 振 動	一 節	20.8	20.95	1.007	0.7%
	二 節	43.7	44.47	1.018	1.8 "
비틀림振動	一 節	28.5	28.65	1.005	0.5 "
	二 節	54.6	54.67	1.001	0.1 "

## 5. 結 論

以上으로 크랭크軸系의 縱方向影響係數에 關한 理論式 (8) 및 (9)에 關하여 考察해 보았는데 그림 12, 13, 14와 表 6, 10에서 明白한 바와 같이 디젤機關의 軸系縱振動數를 計算하기 위한 縱方向스프링常數는 隣接크랭크의 角度에 影響을 많이 받고, 本理論式에 依하여 計算한 값이 他的 經驗式에 依하여 計算한 값보다 實測値에 매우 가까우며 모든 式을 代表할 수 있다고 할 수 있다. 니젤 機關이 大形化되어 감에 따라 從來의 크랭크軸을 基準으로 하여 만든 經驗式들은 誤差가 많을 것이므로 本理論式의 意味가 크다고 본다.

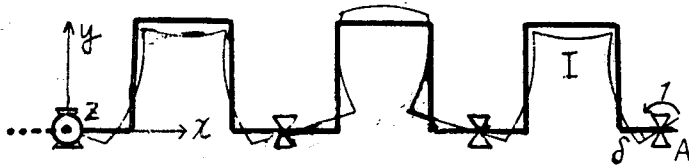
## 參 考 文 獻

- 1). N. J. Visser, The axial Stiffness of Marine Diesel Engine Crankshaft, Intern Shipb Prob., Vol. 14, No. 160. (1967)

- 2). S. F. Dorey, NECI, Trans. Vol. 55, p. 203~294. (1939)
- 3). P. Dramsky, et. al., MTZ H. 2, S. 49~52. (1942)
- 4). G. Anderson, et. al., Intern. Shipb. Prog. (1963)
- 5). A. Guglielmotti, et. al., CIMAC, Copenhagen. (1962)
- 6). A. J. Johnson, et. al., IMET, Vol. 75, No. 4. (1963)
- 7). 全孝重, 船用内燃主機關クランク軸系縦ねじり連成振動のマトリックス解法に関する研究, 東大機械工学論文集, 第5輯. (1971)



[附錄 1] 半모우멘트( $\xi_x/2$ )의 證明



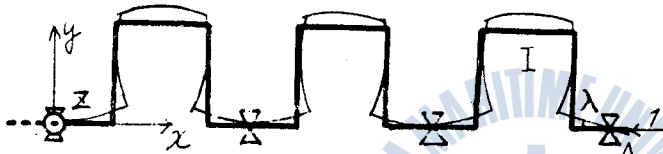
[그림 A]

隣接크랭크接續角이  $0^\circ$ 인 크랭크 드로우가 무수히 많은 크랭크軸系의 座標軸을 그림 A와 같이 定하고 一端 A에 z軸方向의 單位모우멘트를 加할 때 z軸둘레의 角變位

를  $\delta$ 라고 한다.

다음에 같은 크랭크軸의 一端 A에 x軸方向의 單位힘을 加하고 그 反力을 他端에서 받을 때

z軸둘레의 角變位를  $\lambda$ 라고 한다.



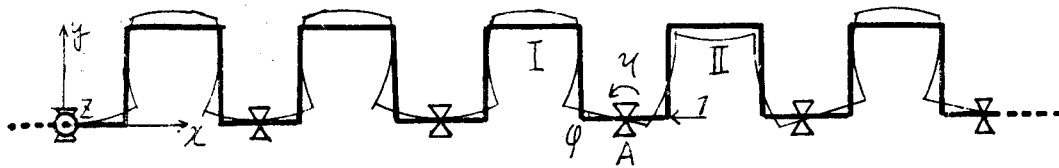
[그림 B]

(그림 B) 이  $\lambda$ 라는 角을 없애기 위하여서는  $\xi_x$ 만큼의 모우멘트를 加하여 주어야 하므로 다음式이 成立한다.

$$\lambda + \xi_x \delta = 0$$

$$\therefore \xi_x = -\frac{\lambda}{\delta} \dots \dots \dots (1)$$

以上은 A端이 自由端이라고 생각하였는데 이번에는 A端의 右側에도 隣接크랭크 接續角이  $0^\circ$ 인 크랭크드로우가 무수히 많이 接續되어 있고 A端에서 單位힘이 左側으로 作用한다고 한다 (그림 C)



[그림 C]

이 때 A端에서 크랭크드로우 I이 받는 z軸둘레의 모우멘트를  $\eta$ 라 하고 A端이 이루는 角을  $\varphi$ 라 한다. 만약 A端이 그림 B와 같이 自由端이라고 하면  $\lambda$ 의 角을 이룰 것인데 A端의 右側에 크랭크가 接續되어 있으므로  $\eta$ 라는 모우멘트를 받게 되고 角度는  $\varphi$ 가 되었으므로 다음 式이 成立한다.

$$\lambda + \eta \delta = \varphi \dots \dots \dots (2)$$

한편  $\eta$ 와는 크기가 같고 方向이 反對인 모우멘트가 A端의 右側크랭크에 作用하고 이 모우멘트에 依해서 크랭크 II의 A端에  $\varphi$ 의 角을 이루었으므로 (맞 꼭지角) 다음式이 成立한다.

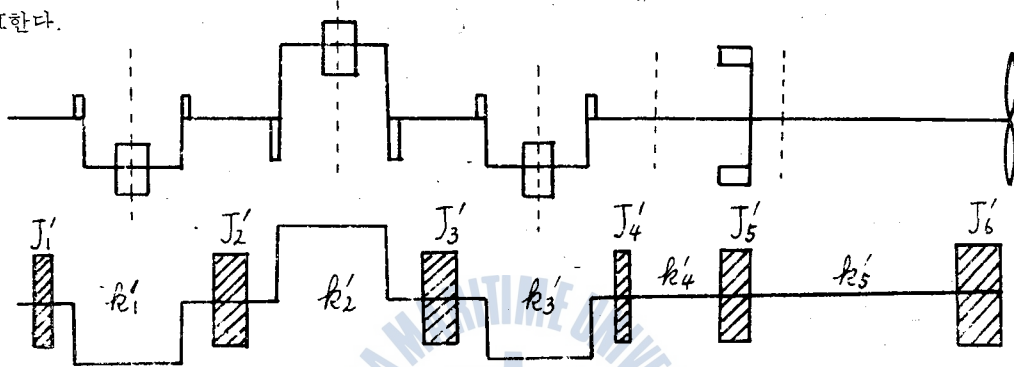
$$-\eta \delta = \varphi \dots \dots \dots (3)$$

(1), (2), (3)에서

$$\eta = -\frac{\varphi}{\delta} = -\frac{\lambda}{2\delta} = -\frac{\xi_x}{2}$$

## 〔附錄 2〕 模型크랭크軸의 비틀림固有振動數

模型크랭크의 비틀림固有振動數計算은 그림 D와 같이 各部의 慣性모우멘트를 集中시켜서 計算한다.



〔그림 D〕

各部의 慣性모우멘트  $J'$ 는 幾何的으로 計算하고 푸로펠러의 慣性모우멘트는 그림 E에 보이는

〔表 I 各部의 慣性모우멘트 및 비틀림 常數〕

$J'_1$	23	gcmsec <sup>2</sup>	$k'_1$	4248	kg. cm/rad
$J'_2$	46	"	$k'_2$	4248	"
$J'_3$	46	"	$k'_3$	4248	"
$J'_4$	23	"	$k'_4$	8257	"
$J'_5$	27.6	"	$k'_5$	2947	"
$J'_6$	50.3	"			

〔表 II 一節 및 二節 비틀림振動計算〕

一節振動

 $P_1^2 = 32410$ 

No.	$J'$	$J' P_1^2$	$\beta$	$J' P_1^2 \beta$	$\Sigma J' P_1^2 \beta$	$k'$ gcm/rad	$\frac{1}{k'} \Sigma J' P_1^2 \beta$
1	23	745430	1.0000000	745430	745430	$4248 \times 10^3$	0.1754778
2	46	1490860	0.8245222	1229247.1	1974677.1	$4248 \times 10^3$	0.4618486
3	46	1490860	0.3596736	536222.98	2510900	$4248 \times 10^3$	0.5910781
4	23	745430	-0.2314045	-172495.85	2338404	$8257 \times 10^3$	0.2832026
5	27.6	894516	-0.5146071	-460324.28	1878080	$2947 \times 10^3$	0.6372853
6	50.3	1630223	-1.1518924	-1877841.4	238.6		

 $P_1^2 = 32410$      $P_1 = 28.65$  Hz



二節振動

$P_2^2 = 1188000$

No.	$J'$	$J' P_2^2$	$\beta$	$J' P_2^2 \beta$	$\Sigma J' P_2^2 \beta$	$k' \text{ gram/rad}$	$-\frac{1}{k'} \Sigma J' P_2^2 \beta$
1	23	2714000	1.0000000	2714000	2714000	$4248 \times 10^3$	0.6383888
2	46	5428000	0.3611112	1960111.5	4674111.5	$4248 \times 10^3$	1.1003087
3	46	5428000	-0.7391975	-4012364	661747.5	$4248 \times 10^3$	0.1557786
4	23	2714000	-0.8949761	-2428965.1	-1767217.6	$8257 \times 10^3$	-0.2140265
5	27.6	3256800	-0.6809496	-2217716.6	-3984934.2	$2947 \times 10^3$	-1.3522002
6	50.3	5935400	+0.6712506	+3984140.8	-793.4		

$P_2^2 = 118000$      $P_2 = 54.67 \text{ Hz}$



[그림 E]

바와 같이 標準 徑위에 設어서 비틀림 週期를 測定하여 求하였다. 各部의 慣性모우멘트와 크랭크의 비틀림 常數는 表 I 과 같고 Holzer 法에 依한 計算表는 表 II 와 같다.

[附錄 3] 縱方向固有振動數의 計算

表 9 에서 나타내는 軸系의 固有縱振動數計算은 表 II 와 같다.

〔表Ⅲ 一節 및 二節 固有縱振動數計算〕

## 一節振動 一次試算

$P_1^2 = 17300$

No.	$m$	$mP_1^2$	$x$	$mP_1^2x$	$\Sigma mP_1^2x$	$k$ gr/cm	$\frac{1}{k} \Sigma mP_1^2x$
1	0.5484	9487.32	1.0000000	9487.32	9487.32	90510	0.1048206
2	1.0279	17782.67	0.8951794	15918.679	25405.999	90510	0.2806982
3	1.0279	17782.67	0.6144812	10927.116	36333.115	90510	0.4014265
4	3.6878	63798.94	0.2130547	13592.664	49925.779	235300	0.2121792
				+0.0008755			

## 一節振動 二次試算

$P_1^2 = 17330$

No.	$m$	$mP_1^2$	$x$	$mP_1^2x$	$\Sigma mP_1^2x$	$k$ gr/cm	$\frac{1}{k} \Sigma mP_1^2x$
1	0.5484	9503.772	1.0000000	9503.772	9503.772	90510	0.1056024
2	1.6279	17813.507	0.8949976	15943.046	25446.819	90510	0.2811492
3	1.0279	17813.507	0.6138484	10934.792	36381.611	90510	0.4019623
4	3.6878	63909.574	0.2118861	13541.55	49923.161	235300	0.2121681
			-0.000282				

$P_1^2 = 1732217 \quad P_1 = 20.95 \text{ Hz}$

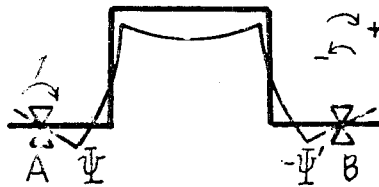
## 二節振動

$P_2^2 = 78070$

No.	$m$	$mP_2^2$	$x$	$mP_2^2x$	$\Sigma mP_2^2x$	$k$ gr/cm	$\frac{1}{k} \Sigma mP_2^2x$
1	0.5484	42813.588	1.0000000	42813.588	42813.588	90510	0.473026
2	1.0279	80248.153	0.526974	42288.69	85102.278	90510	0.9402527
3	1.0279	80248.153	-0.4132787	-33164.852	51937.426	90510	0.5738308
4	3.6878	287906.54	-0.9871095	-284195.28	-232257.86	2353000	-0.9870712
			-0.0000383				

$P_2^2 = 78070 \quad P_2 = 44.47 \text{ Hz}$

〔附錄 4〕 자아날에서 授取되는 모우멘트



〔그림 F〕

그림 F에서 時計方向의 角變位 및 모우멘트를 +, 反時計方向을 -라고 한다.

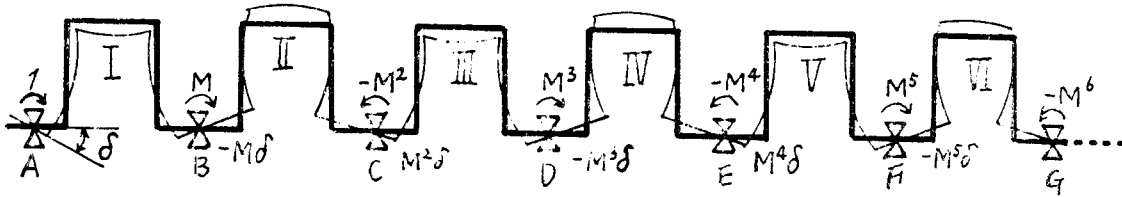
그림 F와 같이 兩端이 單純支持되어 있는 單一크랭크의 一端 A에 單位모우멘트를 加할 때 A端의 角을  $\Psi$ 에 B端의 角을  $-\Psi$ 라고 하면 Castigliano의 定理에 依해서,

$$\Psi = \frac{l}{3EJ} + \frac{R\{(l-a)^2 + a^2\}}{EJ_l l^2}$$

$$\Psi' = \frac{l}{6EJ} + \frac{R(a+2b)}{EJ_l l^2}$$

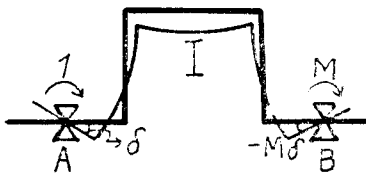
이다.

다음에 그림G와 같이 隣接크랭크角度가 0°인 크랭크트로우가 무수히 많이 있는 크랭크軸의



(그림 G)

一端 A에 單位모우멘트를 加할 때 A端이 이루는 角을  $\delta$ 라 하고 B端에서 크랭크트로우 II가 I에 주는 不靜定反모우멘트를  $M$ 이라고 하면 이와는 크기가 같고 方向이 反對인 모우멘트  $-M$ 가 B端에서 크랭크트로우 II에 作用하였으므로 B端의 角은  $-M\delta$ 이다. 한편 B端의  $-M$ 에 의한 C端의 不靜定反모우멘트는  $-M^2$ 이며 (크랭크 III이 크랭크 II에 준 모우멘트), 이와는 크기가 같고 方向이 反對인 모우멘트  $M^2$ 을 크랭크트로우 III이 C端에서 받으므로 이로 因하여 C端의 角은  $M^2\delta$ 이다. 같은 方法으로 생각하여 D, E, F, ……의 자아날에서 授受되는 모우멘트는  $M^3, M^4, M^5, \dots$ 이며 角度는  $-M^3\delta, M^4\delta, -M^5\delta, \dots$ 이다. 이와같이 자아날의 角度는 等比級數를 이루고, 右側으로 갈수록 적어지므로  $|M| < 1$ 이다.



(그림 H)

한편 그림G의 크랭크트로우 I을 그림H와 같이 單一크랭크로 배어서 생각한다.

만약 B端에서  $M$ 이 作用하지 않으면 A端의 角은  $\Psi$ 가 될 터인데  $M$ 가 作用함으로써  $\delta$ 가 되었으므로 다음식이 成立한다.

$$\Psi - M\Psi' = \delta \dots\dots\dots ①$$

또한 B端에서는  $M$ 이 作用하지 않으면 B端의 角이  $-\Psi'$ 가 되지만  $M$ 가 作用하여  $-M\delta$ 가 되었으므로

$$-\Psi' + M\Psi = -M\delta \dots\dots\dots ②$$

①과 ②에서

$$M = \frac{\Psi \pm \sqrt{\Psi^2 - \Psi'^2}}{\Psi}$$

$\Psi > \Psi'$ 이고  $M < 1$ 이므로

$$M = \frac{\Psi - \sqrt{\Psi^2 - \Psi'^2}}{\Psi'}, \quad \delta = \sqrt{\Psi^2 - \Psi'^2}$$

