

A Study on the Precision Temperature Measurement System By Using the Kalman Filter

Il Hwan, Park

*Dept. of Marine Engineering, Graduate School,
Korea Maritime University*

Abstract

Nowadays, the accuracy of various measuring instruments has been improved by the development of the precision machinery industry.

Nevertheless, it is true that measurement errors are inevitable due to environment factors and faults of measurement system.

In this paper, the author proposes a method to approve the accuracy of the temperature measurement system by using the well-known Kalman Filter. The temperature measurement system is derived to two kinds of models, that is, the Simplified Kalman Filter (SKF) model and the Augumented Kalman Filter (AKF) model.

The computer simulation using artificially generated noisy data shows the following results.

1. It was proved that the filtered estimate with Kalman Filter was more accurate than the raw measurement.
2. In the comparision of two artificial data generated by the SKF and the AKF model, it is known that the temperature

measurement system should be appropriately modeled according to the extent of correlation of state noise $\{u(k)\}$.



Nomenclature

A	:	State transition matrix
B	:	System matrix
H	:	Measurement matrix
X(k)	:	State vector of the system between time k and time k+1
z(k)	:	Measurement, scalar
u(k)	:	State noise, Scalar
v(k)	:	Measurement noise, scalar
$\theta(k)$:	Temperature
$\dot{\theta}(k)$:	Temperature rate
$\ddot{\theta}(k)$:	Change in temperature rate
w(k)	:	State noise, scalar
Q	:	State noise covariance
R	:	Measurement noise covariance
$\Omega(z)$:	Whitening filter
ρ	:	Correlation coefficient
$\phi_{uv}(m)$:	Auto correlation function
$\hat{X}(k/k)$:	Filtered estimate of X(k)
P(k/k)	:	Estimation error covariance matrix
K(k)	:	Filter gain matrix
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:	Estimation error

1. 序 論

最近 科學과 技術의 發達로 여러분야에서 精巧한 計測器들이 開發되고 있다. 그러나 이러한 測定裝置들은 外部環境 要因 또는 裝備自體에 의해서 測定데이터에 불가피하게 수반되는 雜音의 영향을 받기 때문에 이와같은 雜音을 효율적으로 제거하지 않고서는 精度 높은 推定値를 얻을 수가 없다.

本 論文에서는 精密溫度計測 시스템에 있어서 Kalman Filter 를 利用하여 雜音이 수반되는 測定値를 효율적으로 처리함으로써 溫度計測의 精度를 向上시키고자 한다.

일반적인 溫度計測 시스템에 있어서 一회 測定된 溫度값은 그것을 얻는 시각에 대한 것일 뿐 그 以後에는 別로 必要가 없는 것으로서 버릴 수 밖에 없다. 萬一 그 以前에 얻은 正確한 測定値를 그 以後의 溫度値 決定에 有用한 情報로 活用한다면 現在の 測定値가 不良하여 精度가 낮은 값을 얻을 수 밖에 없는 경우에도 大端히 유리할 것이다.

칼만필터(Kalman Filter)¹²⁾는 測定値로 부터 不偏倚最小自乘 推定値를 求하는 方法으로서 現在の 推定値를 決定함에 있어서 過去の 情報를 全部 活用하기 때문에 現在の 測定이 不正確하게 이루어진 때라 하더라도 推定値의 精度가 改善되어 가는 利點이 있다.

먼저 이와같은 精密溫度計測 시스템에 칼만필터를 적용하기 위해서는 시스템의 모델링(Modeling)³⁾이 要求되며 實際의 計測시스

템에 따라 적절하게 모델化 되어야만 한다.

따라서 本 論文은 精密溫度計測 시스템을 두가지 경우로 모델化 하고 여기에 칼만필터를 적용함으로써 測定値보다 精度가 좋은 推定値를 얻을 수 있음을 보이며, 모델의 선택이 不適切한 경우는 適切히 선택된 경우보다 推定値의 精度가 떨어짐을 模擬測定데이터를 이용한 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 밝힌다.



2. 모델의 구성

모델링 (Modeling) 이란 주어진 사실들을 利用함으로써 그 시스템의 過程을 數學적으로 表現하는 것으로서 모델의 精度는 利用할수 있는 正確한 情報의 數가 많을수록 뛰어나다고 볼 수 있다.

그 數學的 表現은 微分方程式, 差分方程式, 狀態方程式 또는 限定次數의 恒等式의 形態로 取하여 질 수 있으나 本 論文에서는 Fig 1 과 같은 溫度計測시스템에 칼만필터를 適用하여 精密溫度推定을 行하기 위하여 狀態方程式으로 表示하기로 한다. (2,3,4)

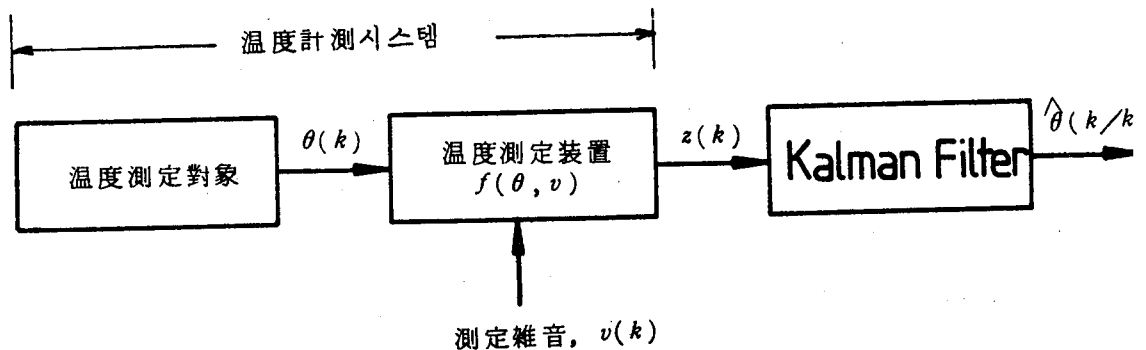


Fig.1 A temperature measurement system

2.1 測定對象의 狀態方程式

時間 t_k 일 때 溫度, 溫度變化的 速度와 加速度 成分을 각각 $\theta(t_k)$, $\dot{\theta}(t_k)$ 와 $\ddot{\theta}(t_k)$ 라 두면 時間 $t_k + \Delta t$ 에서의 溫度와 溫度變化的 速度는 다음과 같이 近似的으로 表示될 수 있다.

$$\begin{aligned}\theta(t_k + \Delta t) &= \theta(t_k) + (\Delta t) \cdot \dot{\theta}(t_k) + \frac{1}{2} \cdot (\Delta t)^2 \cdot \ddot{\theta}(t_k) \\ \dot{\theta}(t_k + \Delta t) &= \dot{\theta}(t_k) + (\Delta t) \cdot \ddot{\theta}(t_k)\end{aligned}$$

여기서

$$t_k = kT$$

$$t_{k+1} - t_k = \Delta t = T$$

$$\theta(kT) = \theta(k)$$

라 두고 매트릭스 形態로 表示하면 다음과 같다. (7,8)

$$\begin{bmatrix} \theta(k+1) \\ \dot{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \dot{\theta}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \ddot{\theta}(k)$$

따라서 $\dot{\theta}(t_k)$ 가 구간 $t_k \leq t < t_k + \Delta t$ 에서 一定하다고 가정하고 $\ddot{\theta}(k)$ 를 狀態雜音(State noise) $u(k)$ 로 간주하면 計測하고자 하는 시스템은 다음과 같은 狀態方程式으로 모델化할 수 있다.

$$X(k+1) = A \cdot X(k) + B \cdot u(k) \dots\dots\dots (1)$$

단,

$$X(k) = \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \dot{\theta}(k) \end{bmatrix} : \text{時間 } k \text{ 에서의 } \theta(k) \text{ 와 } \dot{\theta}(k) \text{ 를 갖는 狀態 벡터}$$

$$u(k) = \ddot{\theta}(k) : \text{狀態 雜音}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

T : 샘플링 時間

2.2 測定裝置의 方程式

溫度를 計測할 때에 測定雜音이 附加되는 測定値를 나타내는 方程式은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$z(k) = H \cdot X(k) + v(k) \dots\dots\dots (2)$$

여기서

여기서

$z(k)$: 測定値

$v(k)$: 測定雜音

$$H = [1 \quad 0]$$

式 (2)에서 測定雜音 $\{ v(k) \}$ 는 平均이 0 이고 共分散이 $R \delta_{kl}$ 인 白色雜音 (white noise) 으로 간주하며 또한 式 (1) 의 狀態雜音 $\{ u(k) \}$ 와는 서로 統計的으로 獨立인 것으로 간주한다.

$$E \{ v(k) v(l) \} = R \delta_{kl} \dots\dots\dots (3)$$

$$E \{ u(k) v(l) \} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

단, $k, l = 1, 2, 3, \dots\dots$ 이고 δ_{kl} : Kronecker Delta 函數이다.

다음의 Fig 2는 溫度測定시스템의 測定對象과 測定裝置를 모델링한 後 블록線圖化한 것이다.

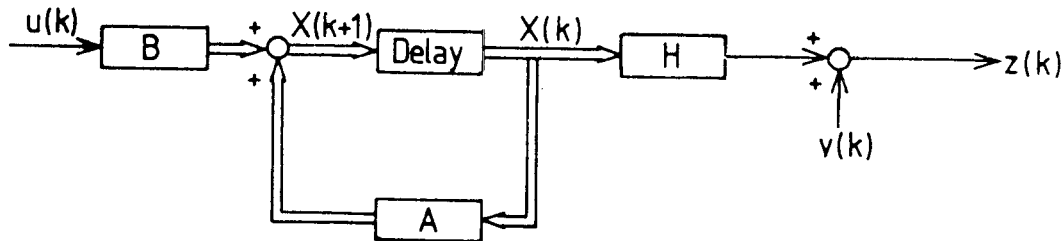


Fig.2 Model of a temperature measurement system

2.3 測定對象의 狀態雜音, $u(k)$

式 (1)에서 溫度變化의 加速度 成分 즉 狀態雜音 $u(k)$ 는 급격한 溫度變化에 의해 생겨나는 것으로 本 論文에서는 다음과 같은 두 가지의 경우에 대해서 살펴보기로 한다.

2.3.1 $u(k)$ 가 白色雜音인 경우

시스템의 狀態方程式을 칼만필터에 적용하기 위해서는 狀態雜音 $\{u(k)\}$ 가 서로 상관관계를 갖지않는다는 즉 白色雜音이라는 假定이 要求된다. $u(k)$ 가 白色雜音이 아닌 경우에는 狀態 벡터의 次元이 하나 더 늘어남으로 狀態雜音 $u(k)$ 사이의 상관관계가 微小한 경우에는 白色雜音(white noise)으로 近似化하여 취급하는 것이 편리하다.

이와같은 경우에

$$u(k) = w(k)$$

라 두면, 式 (1)과 (2)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= A \cdot X(k) + B \cdot w(k) \\ z(k) &= H \cdot X(k) + v(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

여기서 A, B, H 는 式 (1), (2)의 경우와 같으며 $u(k)$ 즉 白色雜音 $w(k)$ 의 平均值는 0이며 다음과 같은 共分散을 갖는 것으로 간주한다.

$$E \{ w^2 (k) \} = E \{ u^2 (k) \} = Q = \sigma_u^2$$

2.3.2 $u (k)$ 가 白色雜音이 아닌 경우

경우에 따라 溫度計測시스템에서 한 샘플링 시간에서의 溫度증가 또는 감소 과정이 다음 몇 샘플링 시간까지의 溫度變化에 영향을 미쳐서 狀態雜音 $u (k)$ 사이의 상관관계가 無視하지 못할 정도로 큰 경우가 있다.

이러한 경우에 칼만필터를 利用해서 最適 溫度推定值를 求하기 위해서는 다음과 같은 과정을 거쳐서 $u (k)$ 를 白色雜音化 하여야 한다.

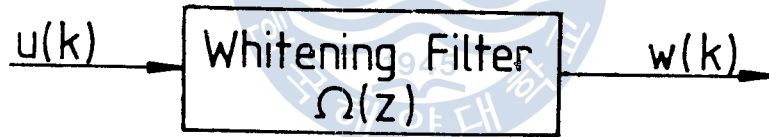


Fig.3 Whitening Filter

여기에서 화이트닝 필터 (Whitening Filter) $\Omega (z)$ 는 最小位相시스템 (Minimum-Phase System)이다. ^{2,5,6)}

狀態雜音 $u (k)$ 의 自己相關函數 (Auto-correlation Function)가 近似的으로 다음 式을 만족한다고 假定한다.

$$\phi_{uu} (m) = \sigma_u^2 \rho^{|m|} \dots\dots\dots (6)$$

단, 相關係數 $\rho = \frac{E \{ u (k) u (k - 1) \}}{\sigma_u^2}$ 이고 $|\rho| \leq 1$

Fig 4 는 $u(k)$ 의 自己相關函數 $\phi_{uu}(m)$ 을 圖示한 것이다.

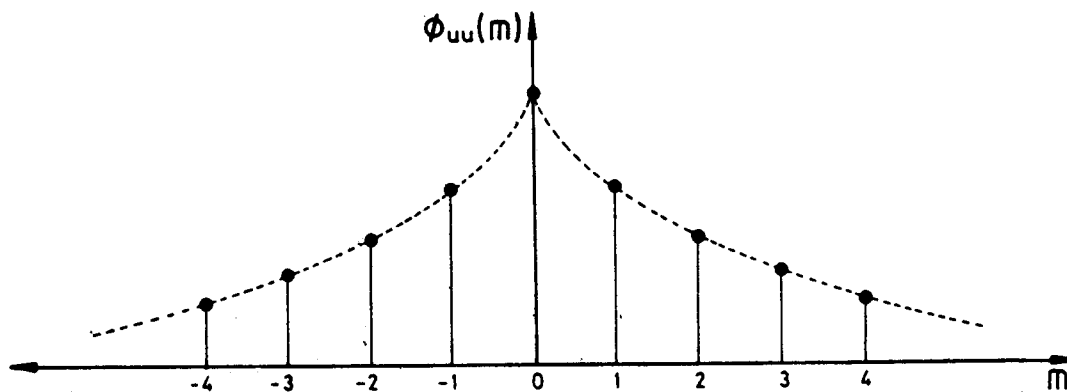


Fig.4 Autocorrelation function of $u(k)$

이때 $u(k)$ 와 $w(k)$ 사이의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다. 2)

$$u(k+1) = \rho u(k) + w(k) \quad \dots\dots\dots (7)$$

단, $u(1) = 0$

따라서 식 (1), (2)와 (7)로 부터 시스템의 狀態方程式을 다시 表示하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= A \cdot X(k) + B \cdot w(k) \\ z(k) &= H \cdot X(k) + v(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

여기서

$$X(k) = \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \dot{\theta}(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

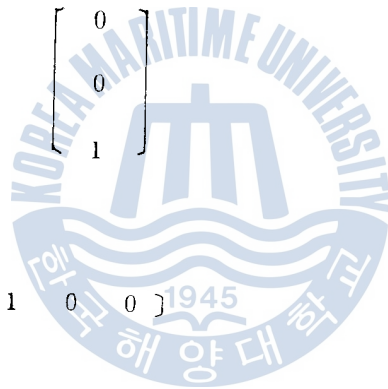
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [1 \ 0 \ 0]$$

이때 $w(k)$ 는 平均值가 0이고, 다음과 같은 共分散을 갖는

$$E \{ w^2(k) \} = Q = \sigma_v^2 (1 - \rho^2) \dots\dots\dots (9)$$

白色雜音으로 간주한다.



3. 칼만필터의 溫度測定시스템에의 適用

3.1 칼만필터

칼만필터는 지금까지 開發된 필터 중에서 가장 精巧하고도 正確한 필터 알고리즘 (Filter Algorithm) 으로서 式 (5), (8)로 表示되는 시스템 狀態方程式의 最適狀態推定值 $\hat{X}(k/k)$ 와 이 推定值의 共分散行列 $P(k/k)$ 는 다음과 같이 주어진다. 4, 12)

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1) [z(k+1) - H\hat{X}(k+1/k)] \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)H] P(k+1/k) \quad \dots\dots\dots(11)$$

여기서

$$\hat{X}(k+1/k) = A\hat{X}(k/k) \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$P(k+1/k) = AP(k/k)A^T + BQB^T \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$K(k+1) = P(k+1/k)H^T [HP(k+1/k)H^T + R]^{-1} \quad \dots\dots\dots(14)$$

단,

$\hat{X}(k+1/k+1)$: $X(k+1)$ 의 推定值

$\hat{X}(k+1/k)$: $X(k)$ 의 豫測值

$P(k+1/k+1)$: 推定値 $\hat{X}(k+1/k+1)$ 의 推定誤差
共分散行列

$P(k+1/k)$: 推定値 $\hat{X}(k+1/k)$ 의 推定誤差
共分散行列

Fig 5 는 式(10)~(14)로 表示되는 칼만필터 方程式을 블록線圖로 나타낸 것이다.

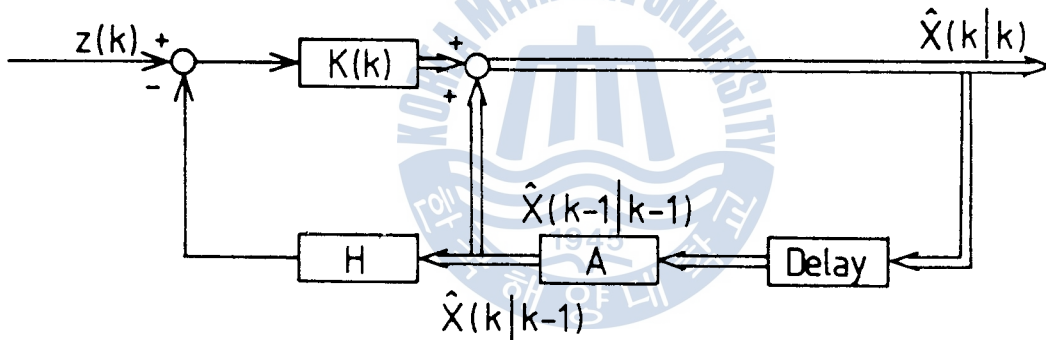


Fig.5 Block diagram of the Kalman Filter

이와같이 式(10)~(14)로 表示되는 칼만필터가 式(5)로 表示한 모델을 利用할 때 簡略形 칼만필터 (Simplified Kalman Filter - SKF)라 부르며 式(8)로 表示되는 모델을 使用할 때는 오그멘티드칼만필터 (Augmented Kalman Filter - AKF)라 부른다. ²⁾

3.2 칼만필터의 初期值 설정

칼만필터 方程式으로 부터 $\hat{X}(k/k)$ 와 $P(k/k)$ 를 順次的으로 計算하기 위해서는 $\hat{X}(k/k)$ 와 $P(k/k)$ 의 初期值를 알아야 한다. 一般的으로는 이를 正確하게 알기가 어려우므로 대략의 推定值를 利用하는 것이 보통이다.

따라서 本 論文에서는 첫 두 測定值로 부터 $\hat{X}(k/k)$ 와 $P(k/k)$ 의 近似的인 初期值를 求하고자 한다.

3.2.1 SKF의 初期值 설정

두 測定值 $z(1), z(2)$ 로 부터 $k=2$ 에서의 推定值 $\hat{X}(2/2)$ 를

$$\hat{X}(2/2) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(2/2) \\ \hat{\dot{\theta}}(2/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(2) \\ \frac{z(2) - z(1)}{T} \end{bmatrix}$$

라 두면

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \theta(2) - \hat{\theta}(2/2) \\ &= \theta(2) - z(2) \\ &= \theta(2) - [\theta(2) + v(2)] \\ &= -v(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \dot{\theta}(2) - \hat{\dot{\theta}}(2/2) \\ &= \dot{\theta}(2) - \frac{z(2) - z(1)}{T} \\ &= -\frac{v(2) - v(1)}{T} \end{aligned}$$

가 되므로 共分散行列 $P(k/k)$ 의 初期值 $P(2/2)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 P(2/2) &= E \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \begin{bmatrix} R & \frac{R}{T} \\ \frac{R}{T} & \frac{2R}{T^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

3.2.2 AKF의 初期值 설정

두 測定值 $z(1), z(2)$ 로 부터 $k=2$ 에서의 推定值 $\hat{X}(2/2)$ 를

$$\hat{X}(2/2) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(2/2) \\ \hat{\theta}(2/2) \\ \hat{u}(2/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(2) \\ \frac{z(2)-z(1)}{T} \\ 0 \end{bmatrix}$$

라 두면

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \theta(2) - \hat{\theta}(2/2) \\
 &= \theta(2) - z(2) \\
 &= \theta(2) - [\theta(2) + v(2)] \\
 &= -v(2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 &= \dot{\theta}(2) - \hat{\theta}(2/2) \\
 &= \dot{\theta}(2) - \frac{z(2) - z(1)}{T} \\
 &= -\frac{v(2) - v(1)}{T}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_3 &= u(2) - \hat{u}(2/2) \\
 &= \rho u(1) + w(1) - \hat{u}(2/2) \\
 &= w(1)
 \end{aligned}$$

가 되므로 共分散行列 $P(k/k)$ 의 初期值 $P(2/2)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$P(2/2) = E \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} R & \frac{R}{T} & 0 \\ \frac{R}{T} & \frac{2R}{T^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2(1 - \rho^2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

3.3 定常狀態의 推定誤差

式(10)에서 (14)로 表示되는 칼만필터가 동작되어 測定值로 부터 最適推定值를 出力하면 이 推定值의 精度가 改善된다는 事實을 알고 있다. 이 推定值의 精度가 점점 改善되어 定常狀態에서는 어떤 狀態로 유지되는 가를 알아보는 것은 매우 흥미로운 일이라 생각 된다.

따라서 定常狀態에서의 推定誤차를 파악하기 위해 式(11), (13), (14)에서 推定誤차의 共分散行列을 $P(k+1/k+1) = P(k/k) = P, P(k+1/k) = P(k/k-1) = P_1$ 이라 두면

$$P = [I - KH] P_1 \dots\dots\dots(17)$$

$$P_1 = A P A^T + B Q B^T \dots\dots\dots(18)$$

$$K = P_1 H^T [H P_1 H^T + R]^{-1} \dots\dots\dots(19)$$

단, 定常狀態에서의 推定誤차 共分散行列 P는 다음과 같은 要素를 가진다.

i) SKF인 경우

$$P = \begin{bmatrix} P_{oo} & P_{oi} \\ P_{io} & P_{ii} \end{bmatrix}$$

ii) AKF인 경우

$$P = \begin{bmatrix} P_{oo} & P_{oi} & P_{ou} \\ P_{io} & P_{ii} & P_{iu} \\ P_{uo} & P_{ui} & P_{uu} \end{bmatrix}$$

K와 P_1 은 定常狀態에서의 칼만필터 改善과 예측치의 推定誤差 共分散行列이다.

위 式 (17)~(19)로 부터 溫度推定值 $\hat{\theta}(k/k)$ 와 溫度變化 速度의 推定值 $\hat{\dot{\theta}}(k/k)$ 의 定常狀態에서의 推定誤差共分散을 求해 보면 다음과 같다.

$$P_{\theta\theta} = R \frac{\sqrt{1+2r} (\sqrt{1+2r} - 1)^2}{1+r^2} \dots\dots\dots (20)$$

$$P_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = P_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{QR} (\sqrt{1+2r} - 1)^2}{2r} \dots\dots\dots (21)$$

$$P_{\theta\dot{\theta}} = \frac{Q (\sqrt{1+2r} - 1)}{2} \dots\dots\dots (22)$$

단, $r = 4 \sqrt{\frac{R}{Q}}$

여기서 溫度推定誤差의 共分散 $P_{\theta\theta}$ 에서 보면 $r > 0$ 이므로 항상 $1+r^2 > \sqrt{1+2r} (\sqrt{1+2r} - 1)^2$ 인 관계가 성립되어 $P_{\theta\theta}$ 가 R보다 적게 되므로 定常狀態의 溫度推定誤差는 測定裝置의 測定誤差보다 적게 된다는 사실을 알 수 있다.

4. 시뮬레이션 및 結果檢討

4.1 전자계산기에 의한 시뮬레이션

전자계산기 시뮬레이션을 위한 測定데이터를 만들기 위해서 우선 測定裝置의 雜音 $\{v(k)\}$ 의 共分散을

$$E \{ v^2(k) \} = R = 0.03$$

으로 간주하며 또한 狀態雜音 $\{w(k)\}$ 는 정규분포 (Gaussian Distribution) 또는 일양분포 (Uniform Distribution)라는 假定 下에서 2章에서 다룬 두가지 모델에 적합하도록 다음과 같은 統計值를 使用하였다.

i) SKF인 경우

$$E \{ w^2(k) \} = Q = 0.003 \dots \dots \dots (23)$$

ii) AKF인 경우

$$E \{ w^2(k) \} = Q = \sigma_w^2 (1 - \rho^2) = 0.00153 \dots \dots \dots (24)$$

또한 시뮬레이션에 있어서 $T = 1$ 초로 하고 일양난수 데이터는 乘算式合同法 (Multiplicative Congruential Method)에 의해서 발생시켜 使用하였으며, 정규난수 데이터는 中心極限의 定理 (Central Limit Theorem)를 利用하여 만들어 使用하였다.

式 (7) 과 24 로 부터 計算되는 自己相關函數 $\phi_{uu}(m)$ 은 Fig

6 및 Fig 7 과 같이 圖示된다.

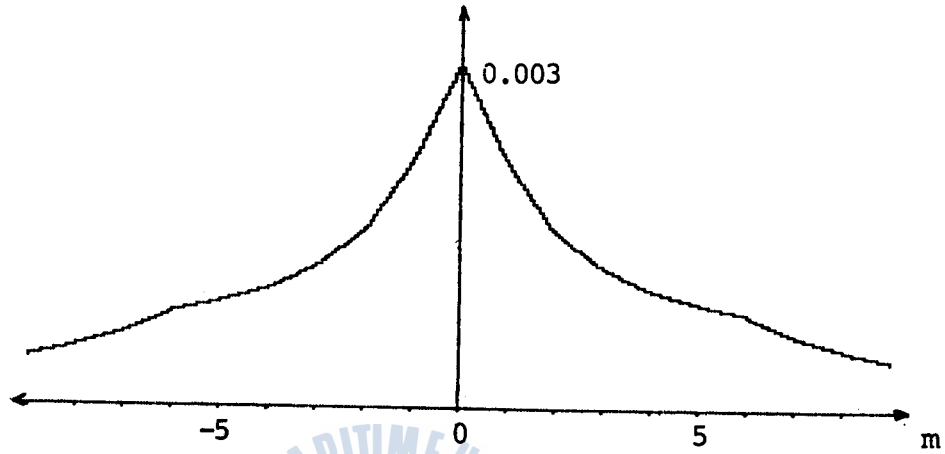


Fig.6 Autocorrelation Function $\phi_{uu}(m)$, when $\{u(k)\}$ is gaussian

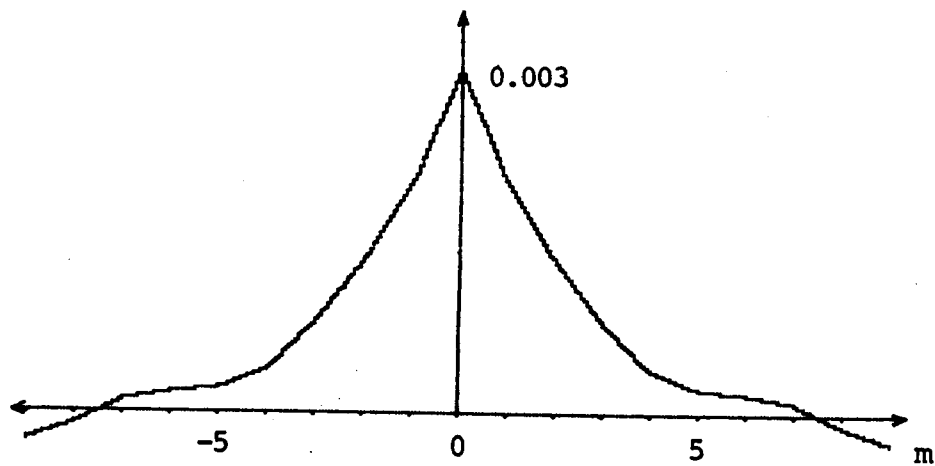


Fig.7 Autocorrelation Function $\phi_{uu}(m)$, when $\{u(k)\}$ is uniform

SKF와 AKF 모델에 대해서 測定데이터와 칼만필터에 의한 推定値를 比較하고 또한 모델의 선택여하가 推定値에 미치는 영향을 檢討하기 위하여 Fig 8 과 같은 경우에 대해 시뮬레이션을 실시한다.

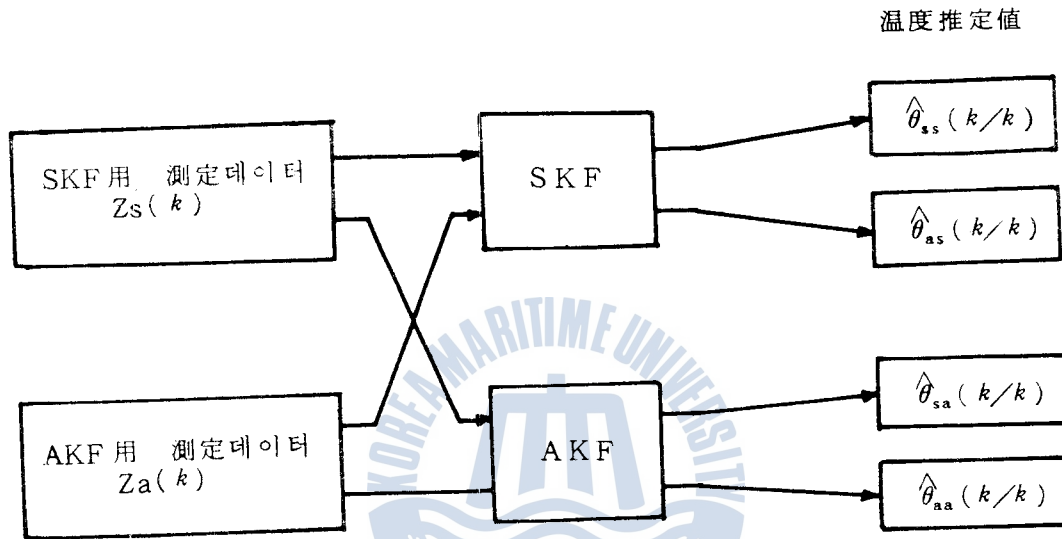


Fig 8. 시뮬레이션 系統圖

Fig 8에서 $z_s(k)$ 와 $z_a(k)$ 는 각각 SKF, AKF 모델에 의해 발생된 測定데이터이며 溫度推定値 $\hat{\theta}_{ss}(k/k)$ 와 $\hat{\theta}_{as}(k/k)$ 는 각각 測定데이터 $z_s(k)$ 와 $z_a(k)$ 에 대한 SKF 推定値이고 溫度推定値 $\hat{\theta}_{sa}(k/k)$ 와 $\hat{\theta}_{aa}(k/k)$ 는 각각 測定데이터 $z_s(k)$ 와 $z_a(k)$ 에 대한 AKF 推定値이다.

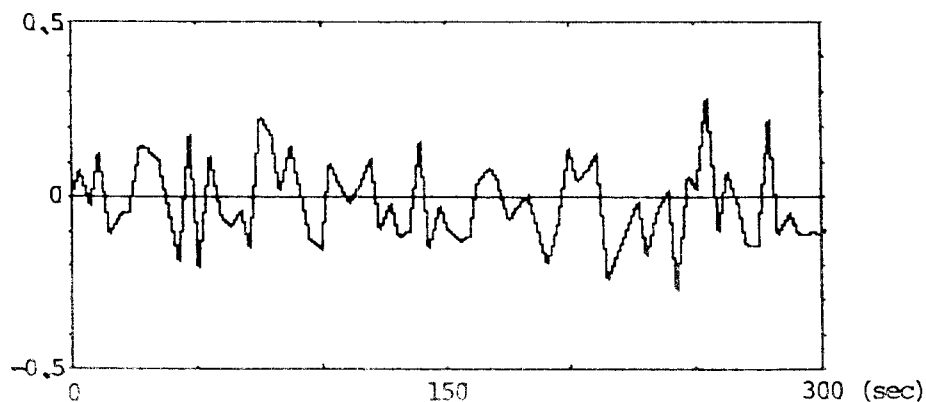
4.2 結果檢討

$\{w(k)\}$ 가 정규분포 또는 일양분포인 경우에 대해서 Fig 8과 같은 방법으로 시뮬레이션을 실시하여 여덟가지의 溫度推定値를 얻었다. 眞値에 대한 이들 推定値의 差와 測定誤差를 다음 Fig 9~12에 비교하기 쉽도록 나타내었다.

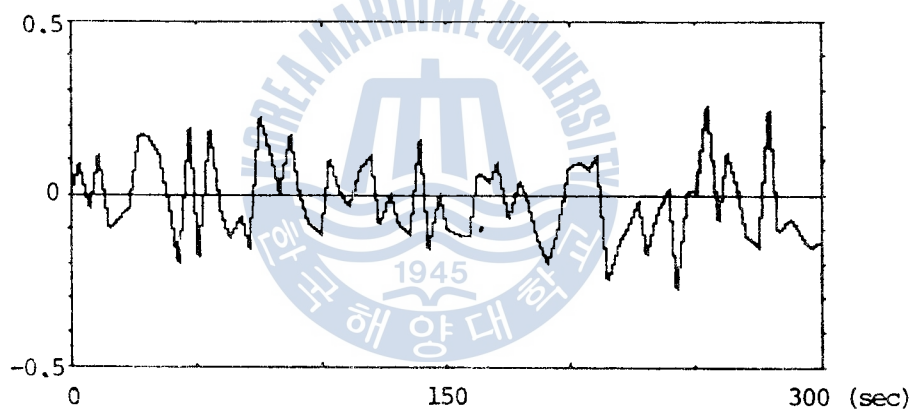
Fig 9, 10에서는 SKF모델에 의해서 발생된 測定데이터에 대한 SKF와 AKF의 推定値誤差 즉 眞値와 推定値의 差를 그때의 測定誤差와 함께 圖示한 것으로 Fig 9, 10에서 狀態雜音 $\{w(k)\}$ 가 정규분포와 일양분포의 두 경우 모두 推定値 $\hat{\theta}_{ss}(k/k)$, $\hat{\theta}_{sa}(k/k)$ 가 測定値보다 精度가 改善되었음을 알 수 있으며 正確한 모델을 利用한 溫度推定値 $\hat{\theta}_{ss}(k/k)$ 가 $\hat{\theta}_{sa}(k/k)$ 보다 精度가 더 좋음을 알 수 있다.

Fig 11, 12 또한 狀態雜音 $\{w(k)\}$ 가 정규분포와 일양분포의 두 경우 모두 推定値 $\hat{\theta}_{aa}(k/k)$, $\hat{\theta}_{as}(k/k)$ 가 測定値보다 精度가 改善되었음을 알 수 있으며 正確한 모델을 利用한 溫度推定値 $\hat{\theta}_{aa}(k/k)$ 가 $\hat{\theta}_{as}(k/k)$ 보다 精度가 더 좋음을 알 수 있다.

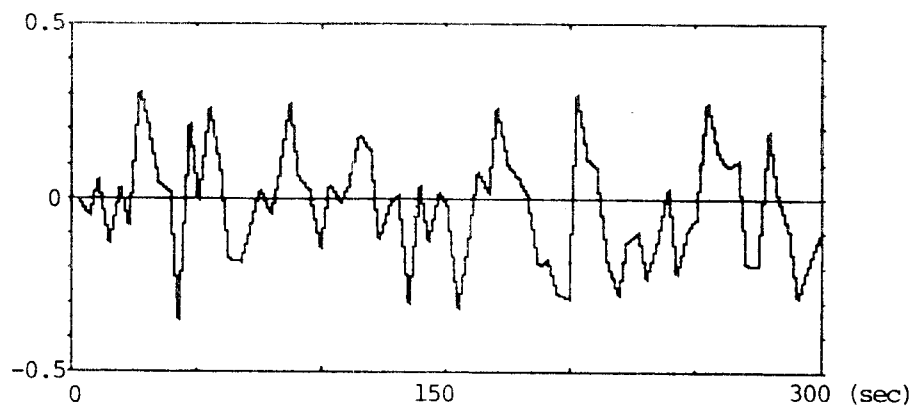
正確한 모델을 使用한 $\hat{\theta}_{ss}(k/k)$ 와 $\hat{\theta}_{aa}(k/k)$ 가 다른 推定値보다 精度가 더 좋음을 定量的으로 보이기 위해 $t=3$ 에서 $t=300$ 초까지 $\theta(k)$ 와 $\hat{\theta}_{ss}(k/k)$, $\hat{\theta}_{sa}(k/k)$, $\hat{\theta}_{aa}(k/k)$, $\hat{\theta}_{as}(k/k)$, $z(k)$ 와의 誤差의 2乘合을 計算하여 表1에 나타내었다. 表1에서 보면 정규분포, 일양분포 두 경우 모두 正確한 모델을 使用한 溫度推定値 $\hat{\theta}_{ss}(k/k)$, $\hat{\theta}_{aa}(k/k)$ 의 精度가 우수함을 알 수 있었다.



(a) Estimation error, $\hat{\theta}_{ss}(k/k) - \theta(k)$

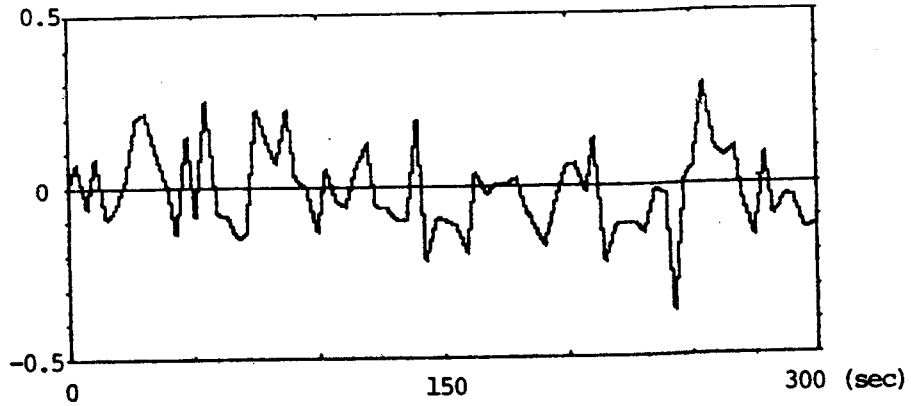


(b) Estimation error, $\hat{\theta}_{sa}(k/k) - \theta(k)$

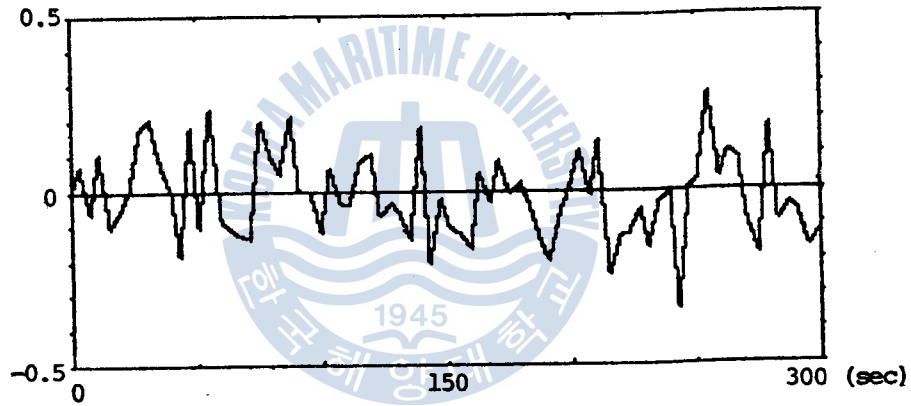


(c) Measurement error

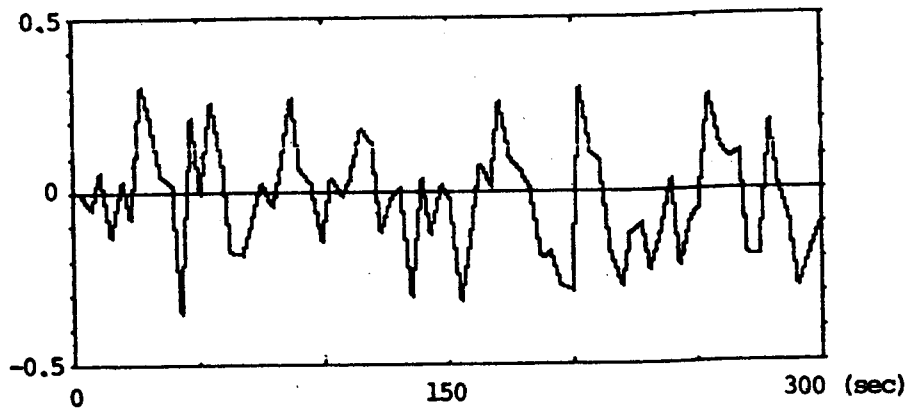
Fig.9 SKF estimation error and Measurement error when $\{w(k)\}$ is gaussian



(a) Estimation error, $\hat{\theta}_{SS}(k/k) - \theta(k)$

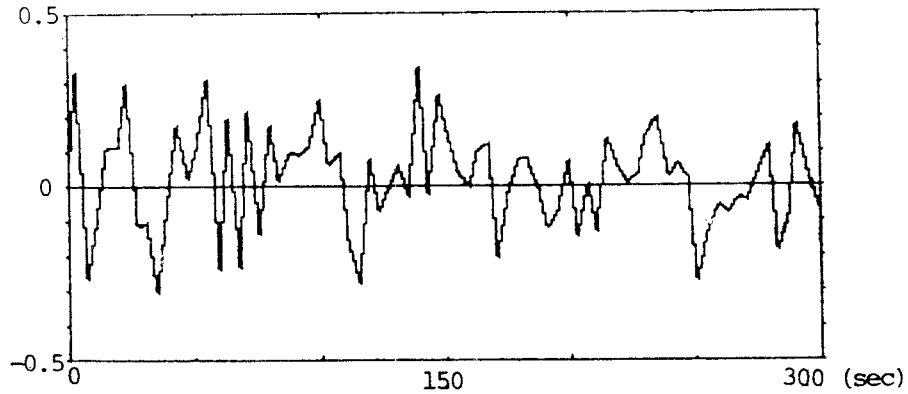


(b) Estimation error, $\hat{\theta}_{Sa}(k/k) - \theta(k)$

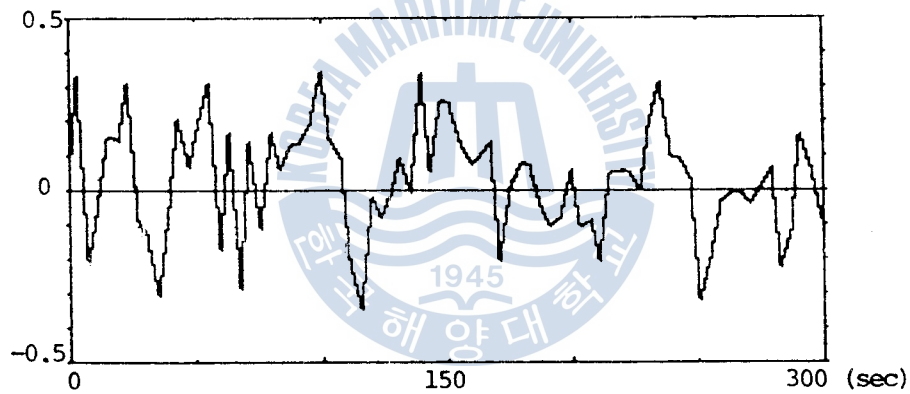


(c) Measurement error

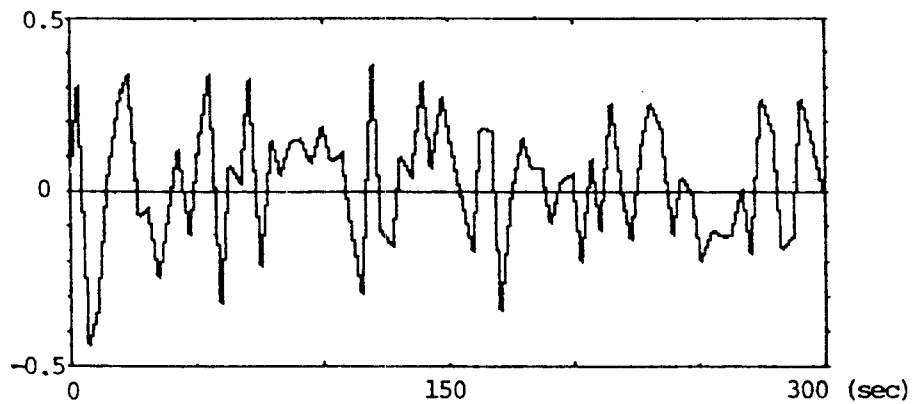
Fig.10 SKF estimation error and Measurement error when $\{w(k)\}$ is uniform



(a) Estimation error, $\hat{\theta}_{aa}(k/k) - \theta(k)$

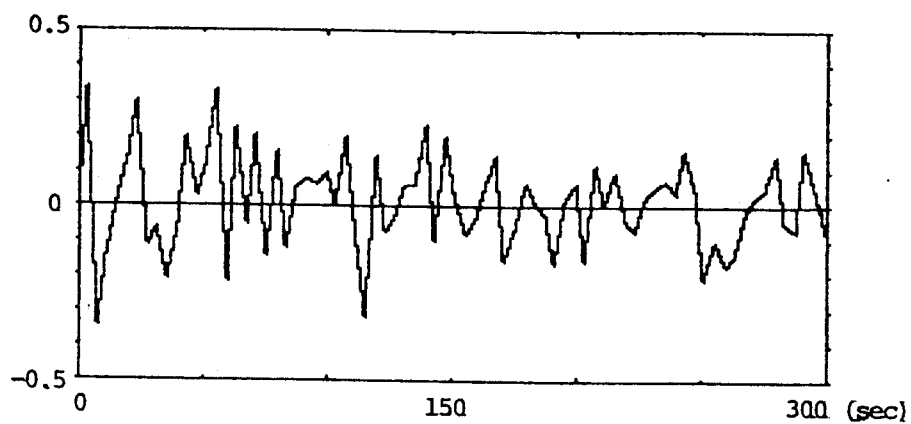
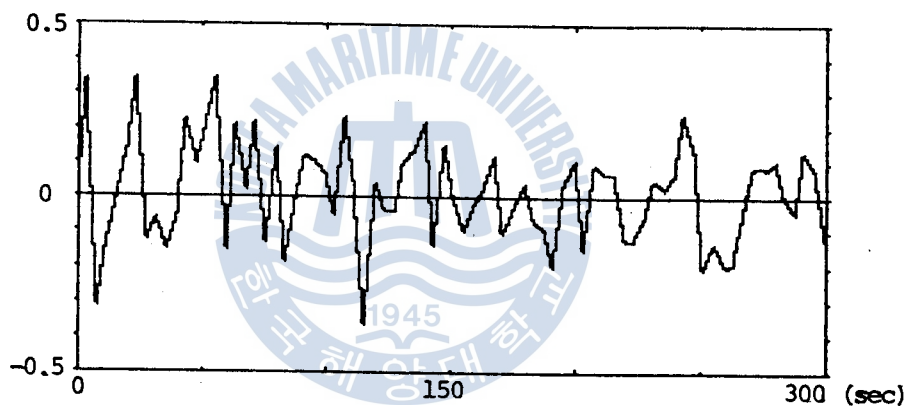
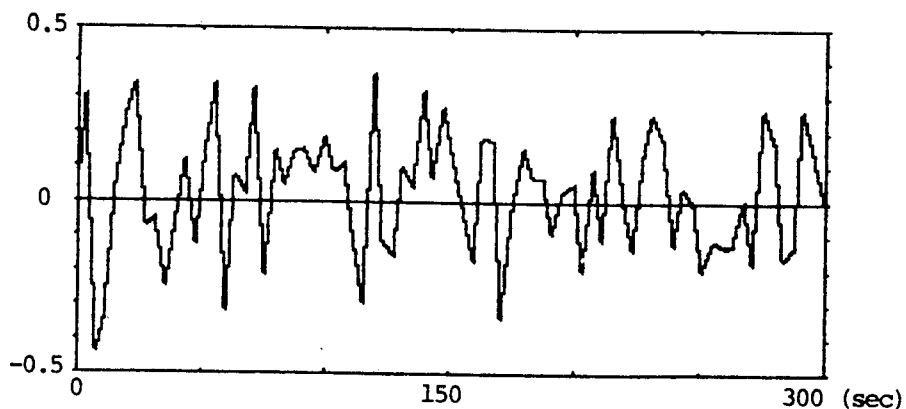


(b) Estimation error, $\hat{\theta}_{as}(k/k) - \theta(k)$



(c) Measurement error

Fig.11 AKF estimation error and Measurement error when $\{w(k)\}$ is gaussian

(a) Estimation error, $\hat{\theta}_{aa}(k/k) - \theta(k)$ (b) Estimation error, $\hat{\theta}_{as}(k/k) - \theta(k)$ 

(c) Measurement error

Fig.12 AKF estimation error and Measurement error when $\{w(k)\}$ is uniform

表 1. 眞值에 對한 推定誤差와 測定誤差의 2 乗合의 比較

	誤差의 2 乗合	
	정규분포의 경우	일양분포의 경우
$\hat{\theta}_{ss}(k/k)$	3.6677	4.3316
$\hat{\theta}_{sa}(k/k)$	4.1527	4.4487
$z_1(k)$	7.4818	7.4818
$\hat{\theta}_{aa}(k/k)$	5.3857	5.2764
$\hat{\theta}_{as}(k/k)$	6.5115	5.9368
$z_2(k)$	9.1799	9.1799

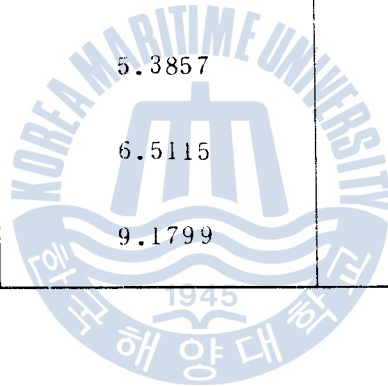
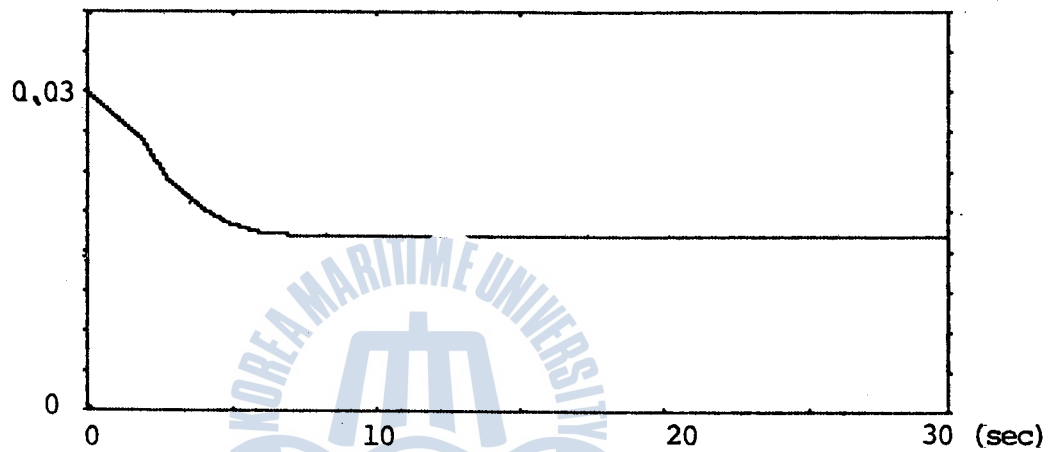
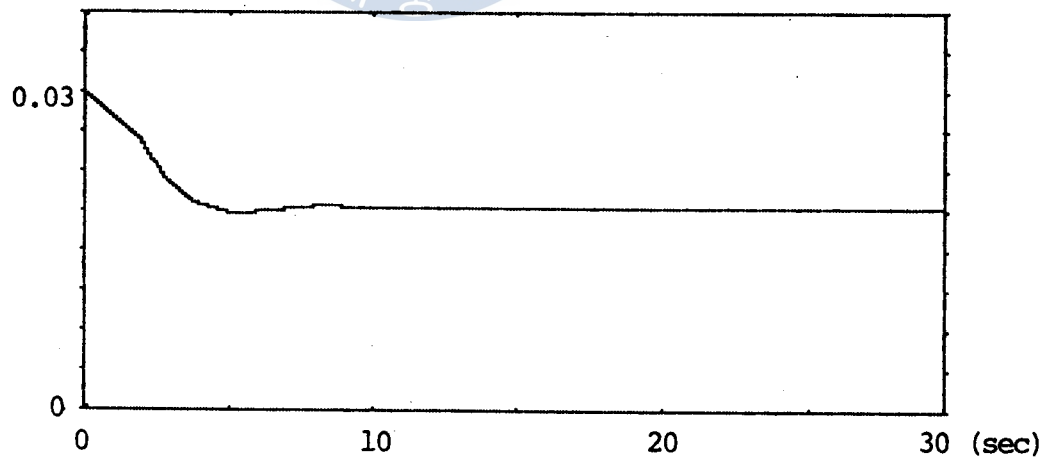


Fig 13, 14는 각각 狀態雜音이 정규분포 또는 일양분포일 때 다음과 같은 SKF, AKF 溫度推定值 $\hat{\theta}_{\theta\theta}(k/k)$, $\hat{\theta}_{\theta\theta}(k/k)$ 의 推定誤差共分散을 圖示한 것으로서

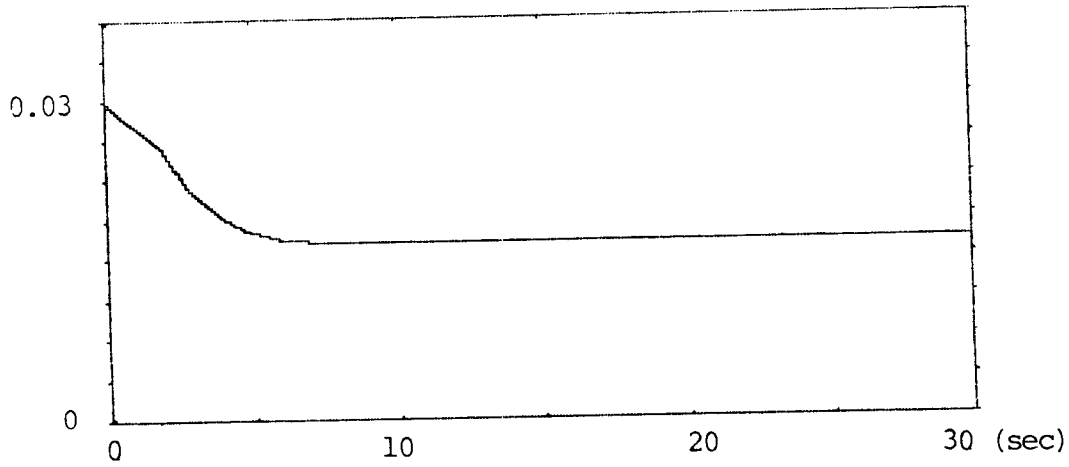


(a) SKF estimation error covariance, $P_{\theta\theta}(k/k)$

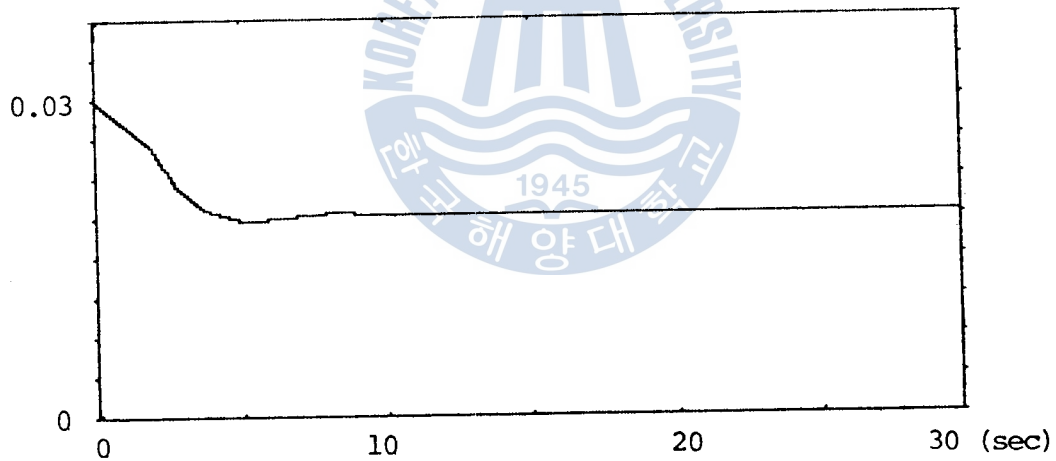


(b) AKF estimation error covariance, $P_{\theta\theta}(k/k)$

Fig.13 Estimation error covariances when $\{w(k)\}$ is gaussian

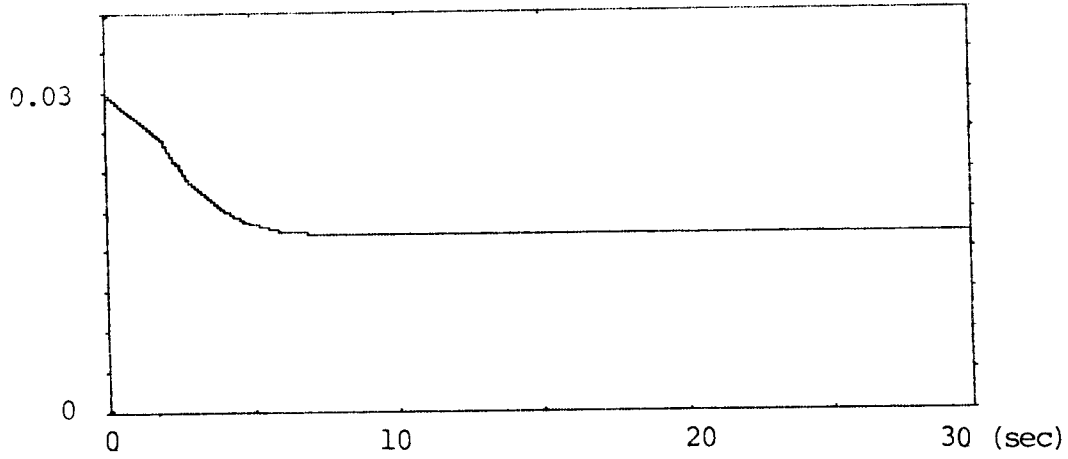


(a) SKF estimation error covariance, $P_{\theta\theta}(k/k)$

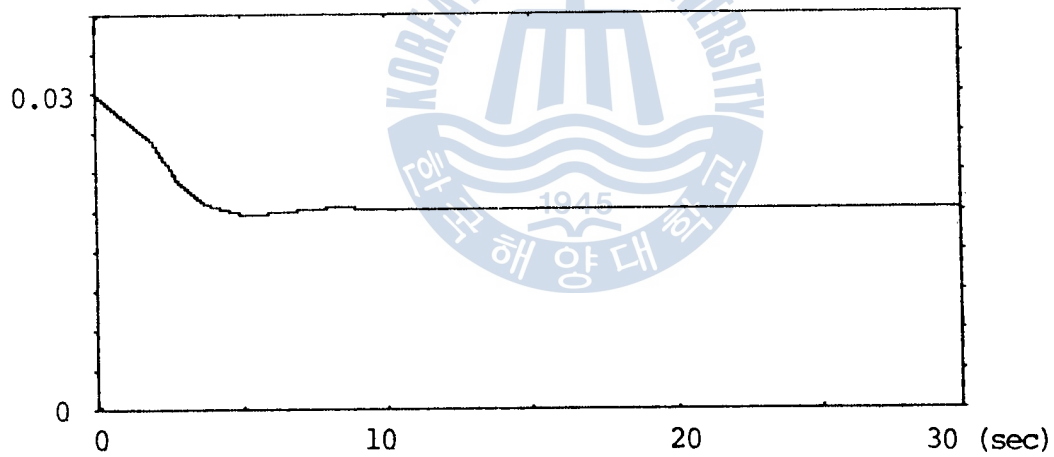


(b) AKF estimation error covariance, $P_{\theta\theta}(k/k)$

Fig.14 Estimation error covariances when $\{w(k)\}$ is uniform



(a) SKF estimation error covariance, $P_{\theta\theta}(k/k)$



(b) AKF estimation error covariance, $P_{\theta\theta}(k/k)$

Fig.14 Estimation error covariances
when $\{w(k)\}$ is uniform

Fig 13 과 14 에서 보면 溫度推定值 $\hat{\theta}_{ss}(k/k)$ 와 $\hat{\theta}_{aa}(k/k)$ 의 共分散은 칼만필터가 동작한 후 약 5초동안 급격히 감소하여 그 이후 부터 각각 0.0165, 0.0189 의 定常狀態 값을 유지하고 있으며 이것은 식 (20) 으로 부터 計算한 값과 一致한다. 즉 이것은 칼만필터를 동작한 후 약 5초동안 推定值의 精度가 시간에 따라서 改善되어지고 있음을 나타낸다.

3.3절에서 이미 밝혔듯이 전체적으로 두 溫度推定值의 共分散은 測定雜音의 共分散 0.03 보다 작음을 알 수 있으며 이것은 칼만필터를 利用하면 溫度測定值로부터 보다 精度가 좋은 溫度推定值를 얻을 수 있음을 보여준다.



5. 結 論

이상과 같이 本 論文에서는 溫度計測시 外部環境要因과 計測裝備 自體의 결함때문에 필수불가결하게 測定雜音이 부과된 溫度測定値에 칼만필터를 적용하면 이 測定値 보다 더욱 精度가 높은 溫度推定値를 얻을 수 있음을 보였다.

本 論文에서는 溫度計測시스템에 칼만필터를 적용할 수 있도록 두 가지 형태로 모델링을 하였으며 두가지 모델에 의해 만들어진 모의 測定데이터를 이용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 실시한 후 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

- (1) 測定雜音이 부과된 溫度測定値에 칼만필터를 적용하면 測定値 보다 精度가 더욱 높은 溫度推定値를 얻을 수 있었다.
- (2) 두가지 모델에 의해 만들어진 모의 測定데이터를 각각 두가지 모델의 필터, 즉 SKF, AKF에서 시뮬레이션한 結果 狀態雜音 $\{u(k)\}$ 가 정규분포, 일양분포일 때 모두 모델의 선택이 적절한 경우에 있어서 더욱 精度가 改善될 수 있음을 알 수 있었다.

이와같은 結論으로 부터 어떤 온도計測 시스템을 적절히 모델링 하기 위해서는 사전에 시스템에 대한 충분한 파악이 필요함을 말 해주며 특히 한 측정시간에서의 온도변화가 이후의 측정시간에서의 온도에 무시하지 못할 정도로 영향을 주는 溫度計測 시스템은 AKF 모델로 모델링되어야 할 것이다.

本 論文에서는 狀態雜音 $\{u(k)\}$ 와 測定雜音 $\{v(k)\}$ 의 統

計的 성질을 대략적으로 파악할 수 있게 해주는 초정밀 계측장치가 없어 실제온도측정시스템에 대한 溫度推定을 행하지 못한 것이 아쉽다.

이러한 統計的 성질을 알 수 있는 온도계측시스템에 염가인 마이크로 프로세서 (Micro processor) 장치와 칼만필터 알고리즘 (Kalman Filter Algorithm)을 잘 응용한다면 경제적이면서도 精度가 높은 온도 추정치를 얻을 수 있으리라 기대된다. 특히 精密 溫度測定이 要求되는 화학반응프로세서 (Processor), 금속의 생성과정, 금속의 열처리과정 등에 폭넓게 응용되어 크게 기여할 수 있으리라 기대된다.



參 考 文 獻

- 1) 河注植 : 自動制御工學, 韓國海洋大學 圖書出版部 (1974)
- 2) Robert A. Singer, Kenneth W. Behnke : Real-Time Tracking Filter Evaluation and Selection for Tactical Applications, IEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS JANUARY 1971.
- 3) Erol Yildirim : A Study of Single Dimensional Kalman TWS Filters, FLORIDA INSTITUTE OF TECHNOLOGY.
- 4) J.S. Meditch : Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, McGRAW-HILL BOOK COMPANY 1969.
- 5) Athanasios Papoulis : Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill Book Company, 1984. p454-467, p294-297
- 6) 高橋安人, 北森俊行 : 制御と力學系, コロナ社, 1971. p195 ~p217
- 7) George M. Swisher : Introduction to Linear Systems Analysis, Matrix Publishers, Inc. 1976.
- 8) 廣田實 : 船舶制御 システム工學, 成山堂書店 1982.
- 9) James A. Cadzow : Discrete-time and Computer Control Systems, Prentice-Hall, Inc. 1970.
- 10) 沼倉三郎 : 測定値計算法, 森北出版株式會社, 1956.

- 11) Stanley M. Shinnars : Modern Control System Theory and Application, Addison-wesley Publishing Company.
- 12) R.E. Kalman, " A new approach to linear filtering and prediction problems ", Trans. ASME, J. Basic Engrg., vol. 82, pp 34-45, 1960.

