

# 直交軸齒車의 荷重分布 및 應力分布에 關한 研究

張 志 演

## Study on the Distribution of Load and Stress of Intersecting Axis Gear

Jee Yon Jang

目 次	
1. 序 論	2.4 變形度 및 應力의 分布
2. 數值解析法	3. 結 論
2.1 定式化	附 錄
2.2 數值解析對像	參考文獻
2.3 荷重分布	

### Abstract

To analyze the theoretical strength of gear tooth and modify its tooth profile, it is indispensable to know the distribution condition of tooth-face deflection, tooth-root stress, and a gear transmitting load.

But for geometrically intricate shape gear, that is, intersecting axis gear such as bevel or hypoid gear, it is impossible to analyze those distribution condition theoretically or by relaxation method.

On this paper, the distribution condition of tooth-face deflection, tooth-root stress, and a gear transmitting load is analyzed by Gauss's numerically integrating method using the numerically calculating results of deflection and stress by a concentrated load, which is already analyzed by finite element method on author's other papers.

### 主要한 記號

- $(x, y)$  : 荷重面의 座標  
 $(\xi, \eta)$  :  $(x, y)$ 의 補助座標  
 $h(x, y, \xi, \eta)$  : 變位特性函數  
 $p(\xi, \eta)$  : 荷重分布函數

- $w(x, y)$  : 變位分布函數  
 $l(\xi, \eta)$  : 接觸線(荷重傳達線)函數  
 $l$  : 接觸線の 길이  
 $W$  : 傳達荷重  
 $w_0$  : 接觸線の 變形量  
 $H_i$  : 數值積分의 加重值  
 $[K]$  : 變位特性매트릭스  
 $[U]$  : 變形度特性매트릭스  
 $[V]$  : 應力特性매트릭스  
 $\{\varepsilon\}$  : 變形度分布매트릭스  
 $\{\sigma\}$  : 應力分布매트릭스  
 $\{P\}$  : 荷重分布매트릭스  
 $[H]$  : 數值積分의 加重值의 매트릭스  
 $K_{ij}$  :  $[K]$ 의 要表,  $j$ 點에 單位荷重이 作用할 때의  $i$ 點의 變位  
 $U_{ij}$  :  $[U]$ 의 要表,  $j$ 點에 單位荷重이 作用할 때의  $i$ 點의 變形度  
 $V_{ij}$  :  $[V]$ 의 要表,  $j$ 點에 單位荷重이 作用할 때의  $i$ 點의 應力

## 1. 序 論

齒形을 設計할 때, 가장 重要한 問題는 齒의 變形과 齒根의 應力分布의 問題이다. 齒車의 騒音은 주로 齒의 變形에 그 原因이 있으며, 齒의 磨耗 및 折損 등은 齒根의 應力分布에 主原因이 있다. 齒의 變形量 및 齒根應力은 가능한 한 그 振幅이 작으며, 齒幅方向의 分布가 均一한 것이 바람직하므로 最近에는 理想的인 불블루트齒形의 일부를 修整하여 齒形을 設計하고 있다.

따라서, 이 齒形修整의 效果와 修整量을 解析하기 위해서는, 一定傳達荷重下에서의 荷重傳達線上의 荷重의 分布를 解析하여, 이 荷重分布에 의한 一定齒形의 變位와 應力의 分布를 解析할 수 있어야 한다.

齒車중에서도 平齒車 또는 斜齒車에 관하여는 많은 研究의 結果, 上記分野에 관한 많은 理論式이나. 近似計算式이 알려져 있다.<sup>1), 2)</sup>

이에 反해, 直交軸齒車에 관한 研究는 비교적 최근에 행하여지고 있으며, 더우기 그 發表論文의 대부분도 주로 齒의 幾何學的 解析에 관한 것이다.<sup>3), 4)</sup>

그 주된 理由는, 直交軸齒車는 幾何學的 解析이 극히 複雜하며, 齒幅方向으로 두께 및 높이가 變化하므로, 從來의 彈性學의 方法이나 差分法, 緩化法 등의 數值解析으로는, 齒面의 變位分布, 齒根의 應力分布 및 荷重傳達線上의 荷重分布에 관한 解析이 不可能하였던 點에 基因한다고 생각된다.

本研究는 集中荷重下의 齒面의 變位分布와 齒根의 應力分布에 관한, 著者 등의 研究結果<sup>5), 6)</sup>를 利用하여, 直交軸齒車의 荷重傳達線上의 荷重分布를 解析할 수 있는 一般的인 프로그램을 만들고, 그 프로그램을 利用하여 絕對量이 작고 齒幅方向의 分布가 均一한 變位分布 및 應力分布를 갖도록 하는 불블루트齒形을 設計할 수 있도록, 最適齒形修整量을 決定하는 理論的 根據 및 그 方法을 提供함을 目的으로 한다.

本論文의 內容은 그 研究의 一環으로서, 有限要素法<sup>7), 8)</sup> 및 가우스數值積分에 의해, 直交軸齒車의 齒의 모델에 대한 荷重傳達線上의 荷重分布를 數值解析한 것이다.

## 2. 數値解析法

### 2.1 定式化

接觸線上的 荷重分布를 구하기 위해서는 接觸線上的 任意의 一點에 單位荷重이 作用할 경우의 接觸線上的 變位에 대한 變位特性函數<sup>1)</sup>를 먼저 알아야 할 必要가 있다.

이 變位特性函數가 구해지면 이 特性函數와 接觸線上的 分布荷重을 意味하는 未知函數인 荷重分布函數의 積의 形의 聯立方程式이 만들어지며, 이 方程式을 풀어서 接觸線上的 荷重分布를 구할 수 있다.

이 聯立方程式을 理論的으로 풀기 위해서는 다음의 條件이 必要하다.

1. 直交軸齒車の 諸元을 전부 變數로서 包含하지 않으면 안된다.
2. 未知函數인 荷重分布函數는 積分이 可能해야 한다.
3. 變位特性函數와 荷重分布函數의 積函數는 積分이 可能해야 한다.

이상의 3가지 條件이 滿足되는 것은 實際 거의 不可能하므로 本論文에서는 接觸線上的 數個의 點에서의 變位特性을 利用한 數値積分에 의하여 上述의 聯立方程式을 풀었다.

齒面に 垂直인 變位の 特性函數를  $k(x, y, \xi, \eta)$ 라 하고, 齒面に 垂直되게 接觸線에  $P(\xi, \eta)$ 의 荷重이 分布되어 있다고 하면, 接觸線에서의 齒面に 垂直한 變位 $w(x, y)$ 는 다음과 같다.

$$w(x, y) = \int l k(x, y, \xi, \eta) P(\xi, \eta) dl \dots \dots \dots (1)$$

두개의 齒車가 서로 물려 돌아가고 있을 때, 齒面사이에는 틈이 생기지 않으므로, 接觸線에서는 接觸하고 있는 두개의 齒全體가 一定值  $w_0$ 만큼 變形하게 된다.<sup>2)</sup> 따라서 接觸線에서는 式(1)은 다음과 같이 된다.

$$w_0 = \int l k(x, y, \xi, \eta) P(\xi, \eta) dl \dots \dots \dots (2)$$

한편 齒面に 垂直한 方向의 齒車의 傳達荷重을  $W$ 라고 하면 傳達荷重 $W$ 와 荷重 分布函數  $P(\xi, \eta)$  사이에는 다음의 關係가 成立한다.

$$W = \int l P(\xi, \eta) dl \dots \dots \dots (3)$$

式(2)와 式(3)은  $P(\xi, \eta)$ 와  $w$ 를 未知函數로 하는 2元聯立積分方程式이므로 數値積分에 의하여 그 解를 구할 수 있다.

式(2) 및 式(3)은  $n$ 個의 點에 대해서 數値積分하면 다음과 같다.

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \sum_{i=1}^n H_i P_i l \dots \dots \dots (4) \\ w_0 = \sum_{j=1}^n H_j K_{ij} P_j l \dots \dots \dots (5) \end{array} \right.$$

計算機로서 處理하기 위하여, 上式을 매트릭스로서 表示하면

$$W = l [H_1 H_2 \dots H_n] \{P_1 P_2 \dots P_n\} \dots \dots \dots (6)$$

$$w_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

上式の 聯立方程式을 풀면 다음의 式이 誘導된다.

$$w_0 = W/[H_1 H_2 \dots H_n][H]^{-1}\{11 \dots 1\} \dots \dots \dots (8)$$

$$\{P\} = w_0/l[H]^{-1}[K]^{-1}\{11 \dots 1\} \dots \dots \dots (9)$$

式(8)로부터  $w_0$ 를 구하여 이것을 式(9)에 代入하면 接觸線上의  $n$ 個의 點에 있어서의 荷重分布  $\{P\}$ 를 구할 수 있다.

또한, 같은 方法에 의해 誘導된 다음 式에 의하여 齒根의 應力 및 變形度의 分布를 구할 수 있다.<sup>5), 6)</sup>

$$\{\varepsilon\} = l[U][H]\{P\} \dots \dots \dots (10)$$

$$\{\sigma\} = l[V][H]\{P\} \dots \dots \dots (11)$$

積分點은 7點이며, 數值積分法으로는 가우스積分을 利用하였다. 이 경우, 加重值는 다음과 같다.

$$H_1 = 0.0647, 4248, 31$$

$$H_2 = 0.1398, 5269, 57$$

$$H_3 = 0.1909, 1502, 53$$

$$H_4 = 0.2089, 7959, 18$$

$$H_5 = H_3$$

$$H_6 = H_2$$

$$H_7 = H_1$$

### 2.2 數值解析對象

前節에서 定式化한 數值解析法 및 그 實驗의 對象으로서 그림 1 및 그림 2와 같은 1對의 블록을 택하였다.

모델 1로부터 모델 2로 1250kg의 傳達荷重이 그림에서 表示한 接觸線上의 分布荷重으로서 傳達되며, 이 때의 齒根의 變形度 및 應力은 그림의 各 測定點에서 計算된 값이다.

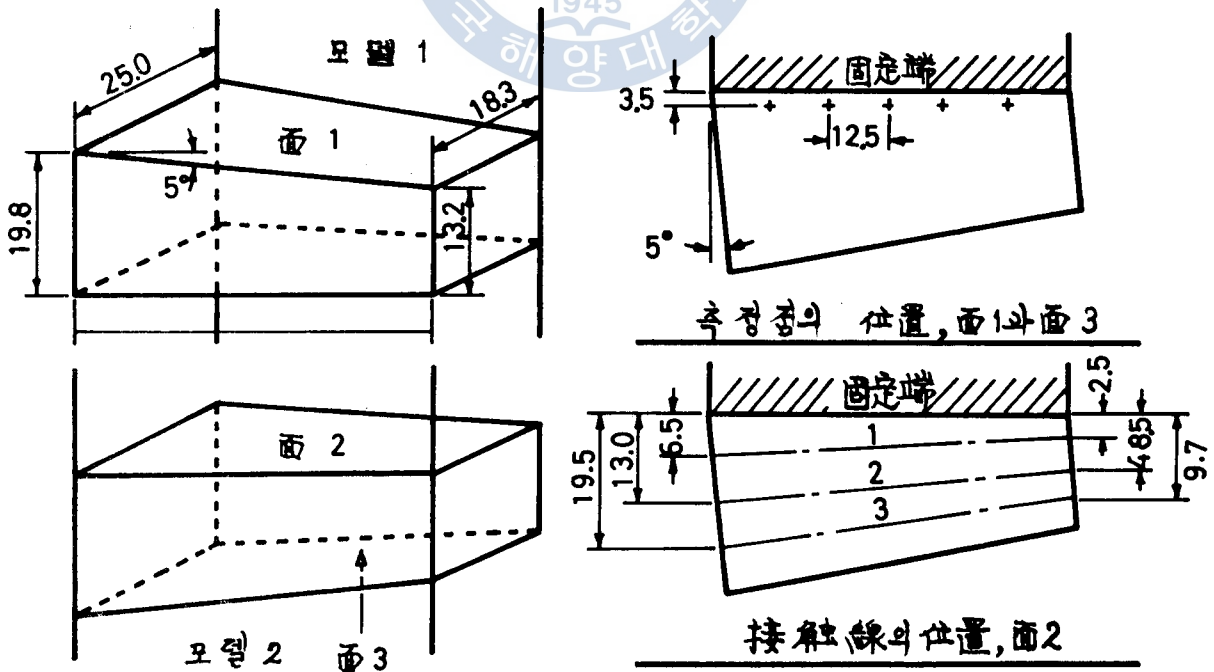


그림 1. 數值解析對象 1.

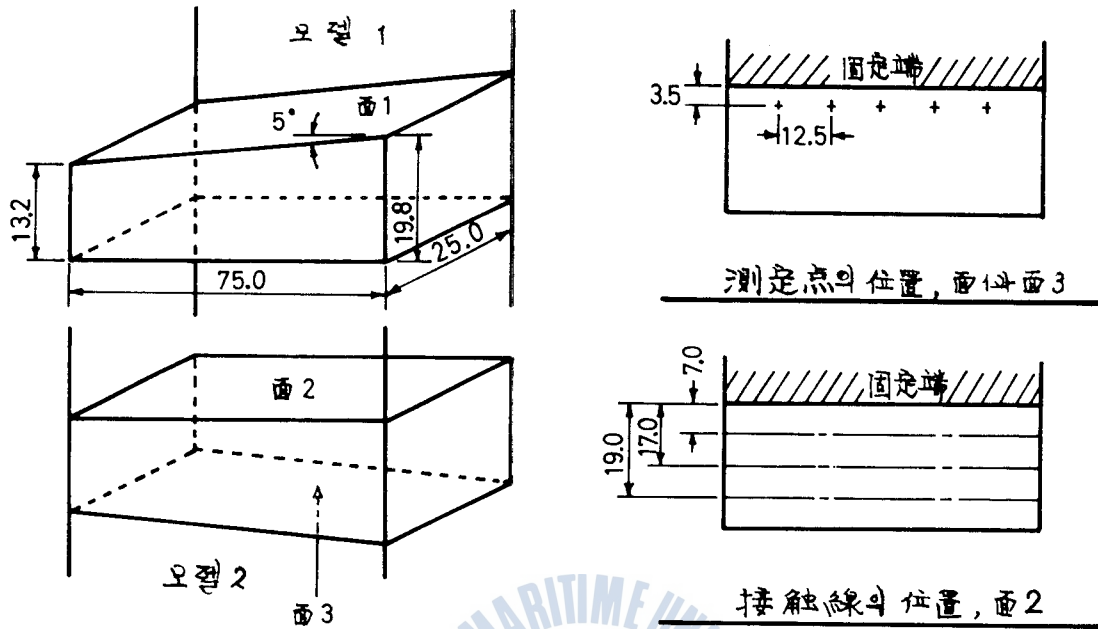


그림 2. 數值解析對象 2.

### 2.3 荷重分布

그림.3 및 그림.4는, 그림.1 및 그림.2의 對象의 경우, 각 接觸線에 의해 荷重이 傳達될 때의 각 接觸線上的 荷重을 나타낸다. 각 그림에서 細線은 傳達荷重의 平均値를 나타낸다.

그림에서 알 수 있는 바와 같이, 兩端에서의 荷重은 中央部の 값에 비해 最高 2倍까지 增大하는 傾向을 나타내고 있다.

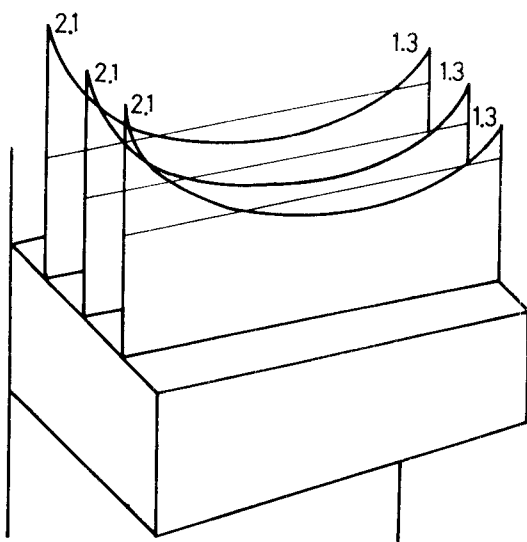


그림 3. 數值解析對象 1의 荷重分布

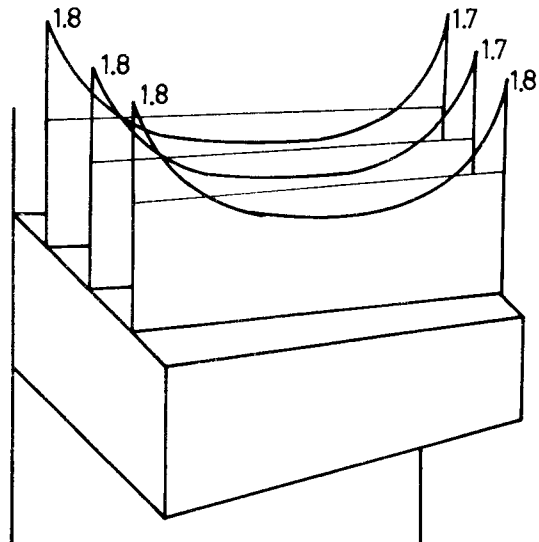


그림 4. 數值解析對象 2의 荷重分布

### 2.4 變形度 및 應力의 分布

그림5, 그림6 및 그림7, 그림8은, 그림1 및 그림2의 解析對象의 各 모델에서의 齒根의 變形度 및 應力의 分布를 나타내고 있다. 그림에서 橫線은 齒幅을 나타내며 實線의 番號는 接觸線의 番號를 의미한다.

應力이 兩端에서 增大하는 것을 그림에서 알 수 있으며, 이 事實은 齒의 折損 등에 관한 從來의 經驗的 事實과 一致한다.

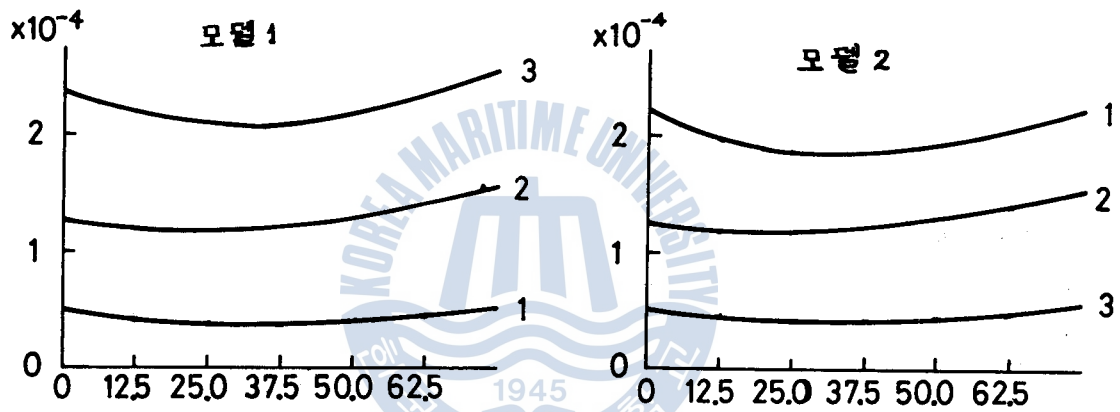


그림 5. 數值解析對象1의 變形度分布

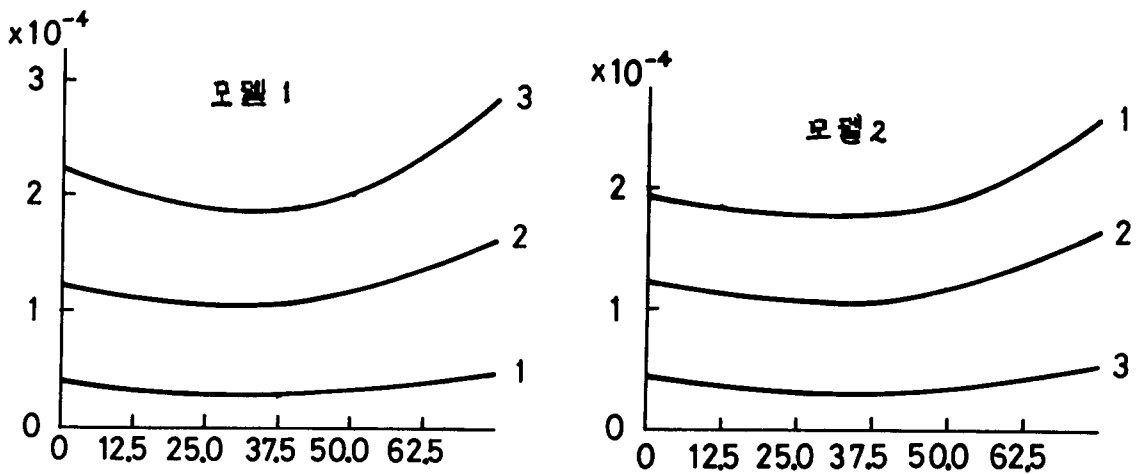


그림 6. 數值解析對象 2의 變形度分布

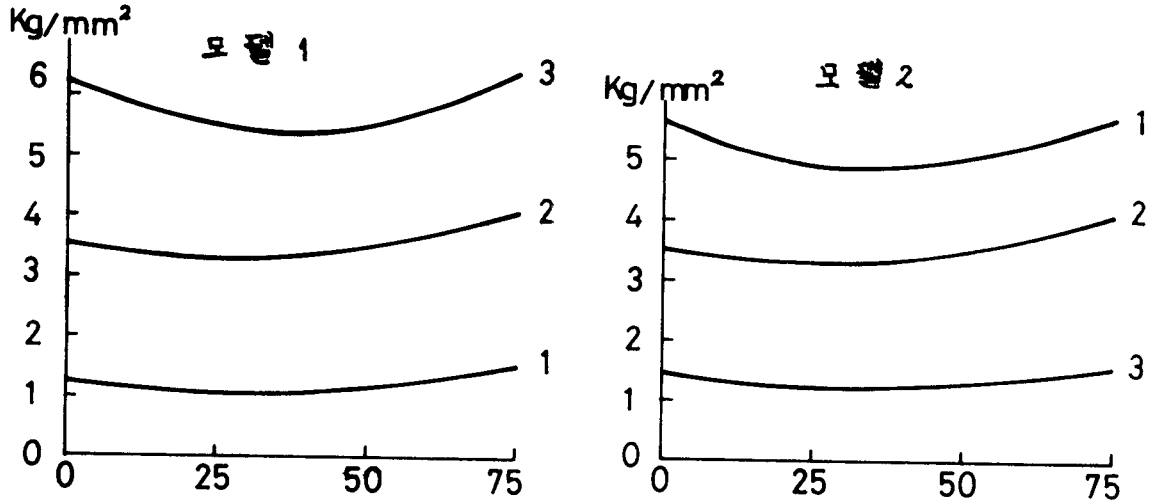


그림 7. 數值解析對像 1의 應力分布

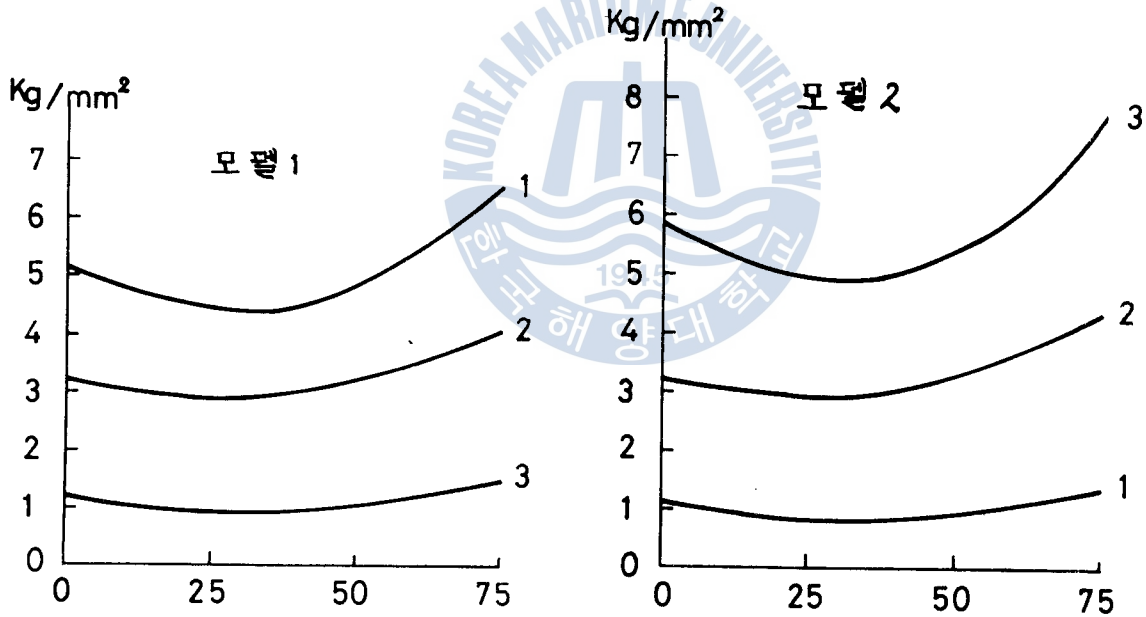


그림 8. 數值解析對像 2의 應力分布

### 3. 結 論

有限要素法 및 數值積分을 利用한 本數值解析法에 의한 荷重分布, 變形度分布 및 齒根의 應力分布의 解析結果를 考察하므로써 다음의 事實을 알 수 있었다.

1. 分布荷重은 中央部の 값과 比較한 경우, 兩端에서 심각하게 增加하고 있다.
2. 齒幅方向의 齒根應力分布는 平齒車나 斜齒車의 경우와는 달리 兩端에서 增大하는 傾向이 있으므로 크라운링 등의 齒形修整을 行하여 齒의 接觸이 齒幅의 中央部에서 많게끔 할 必要가 있다.

앞으로의 計劃으로는, 直交軸齒車의 實際齒形에 對해 本數值解析法을 適用하고, 靜的實驗 및 動的實驗을 補充하여, 本數值解析法의 妥當性 및 數值解의 精度를 檢討할 豫定이다.

附 錄

變位假定法에 의한 有限要素法の 定式化

1. 定式化

要素内部의 變位  $\{u\}$ 를 節点의 變位  $\{\rho\}^e$ 에 의해 표시하면

$$\{u\} = [N] \{\rho\}^e, \quad [N]: \text{形狀函數매트릭스}$$

3次元彈性體의 경우, 變形條件 및 彈性法則에 의해 變形度 및 應力은

$$\{\epsilon\} = [B] \{\rho\}^e \dots\dots\dots(1)$$

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \dots\dots\dots(2)$$

$[B]$ : 變位-變形度變換매트릭스

$[D]$ : 彈性매트릭스

$\{\epsilon_0\}$ : 初期變形度

$\{\sigma_0\}$ : 初期殘留應力

假想變位 및 假想스트레인은

$$\delta\{u\} = [N] \delta\{\rho\}^e \dots\dots\dots(3)$$

$$\delta\{\epsilon\} = [B] \delta\{\rho\}^e \dots\dots\dots(4)$$

要素内の 應力 및 物體力  $\{P\}$ 에 의한 内部일  $U$ 는

$$U = (\delta\{\rho\}^e)^T (\int [B]^T \{\sigma\} dvol - \int [N]^T \{P\} dvol) \dots\dots\dots(5)$$

節点力에 의한 外部일  $W$ 는

$$W = (\delta\{\rho\}^e)^T (\{f\}^e + \{F\}) \dots\dots\dots(6)$$

$\{f\}^e$ : 要素内の 物體力과 等價인 節点力의 列벡터

$\{F\}$ : 節点에 作用하는 外力의 列벡터

$U=W$ 로 부터

$$\{f\}^e + \{F\} = (\int [B]^T [D] [B] dvol) \{\rho\}^e - \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dvol + \int [B]^T \{\sigma_0\} dvol - \int [N]^T \{P\} dvol \dots\dots\dots(7)$$

初期變形度, 初期殘留應力 및 物體力에 의한 項을 무시하면

$$\{F\} = [K]^e \{\rho\}^e \dots\dots\dots(8)$$

단,  $[K]^e = \int [B]^T [D] [B] dvol$

要素에 관한 上記의 理論을 構造物全体에 적용하면

$$\{F\} = [K] \{\rho\} \dots\dots\dots(9)$$

단,  $[K_{ij}] = [K_{ij}]^e$

「外力=剛性매트릭스×變位」로 表現된 上記聯立方程式을 求할 수 있고, 이것을 變形度 및 應力에 관한 上記(1)式 및 (2)式에 代入하여 要素의 變形度 및 應力을 求할 수 있다.

2. 使用要素

本研究의 경우 3次元彈性體로서의 解析이 필요하다. 3次元解析의 경우 計算機의 記憶容量 및 計算時間에 제한이 있기 때문에 本論文에서는 비교적 적은 節点數로서 高精度의 解析이 可能한 20節点立方體要素(Isoparametric 要素)를 使用要素로 選擇하였다.

이 要素의 경우 形狀函數  $[N]$ 은 다음과 같이 定義된다.

모서리의 節点에 代해서

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2)$$



邊의 中点의 節點( $\xi_i=0, \eta_i=\pm 1, \zeta_i=\pm 1$ )에 대해서

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi_o^2)(1+\eta_o)(1+\zeta_o)$$

$(\xi, \eta, \zeta)$  : 要素의 局所座標系

$$\xi_o = \xi_i \xi, \eta_o = \eta_i \eta, \zeta_o = \zeta_i \zeta$$

形狀函數  $N_i$ 가 上式처럼 局所座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$ 로서 定義된 경우,  $[B]$ 의 要素  $B_i$ 는

$$B_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & c_i \\ b_i & a_i & 0 \\ 0 & c_i & b_i \\ c_i & 0 & a_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial g_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial g_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

단,  $e_{ij}$ 는 3次元의 Jacobian의 逆行列  $[J]^{-1}$ 의  $(i, j)$  要素이다.

### 3. 其他

使用計算機는 東京工業大學 情報處理센타의 HITAC (最大記憶容量 1.5Mbyte)이며 計算은 全部分精度로서 行하였다.

### 參 考 文 獻

- (1) 釘宮肇 : はすば齒車の齒元應力と齒形修整に關する研究, 東京工業大學博士論文(1966)
- (2) 梅澤清彦 : 動力傳達用はすば齒車の基礎的研究, 東京工業大學博士論文(1971)
- (3) 藤井等 : 日本機械學會論文集, 43-368(1977) p. 1491~p. 1519
- (4) F. L. Litvin; Mechanism and Machine Theory, Vol. 8(1973), p. 187~p. 196
- (5) 張志演 : 有限幅厚板 Cantilever의 變位解析, 韓國海洋大學論文集(1978)
- (6) 張志演 : 有限幅厚板 Cantilever의 應力解析, 韓國海洋大學論文集(1979)
- (7) 林國一 : 日本機械學會論文集, 28-193(1962)
- (8) Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science(1971), McGraw-Hill
- (9) Bathe & Wilson: Numerical Method in Finite Element Analysis. (1976), Prentice Hall

