電磁計器의 動特性에 관한 硏究

指導敎授 朴 進 吉

宋 寅 明　金 段 植　鄭 運 鉉

A Study on the Dynamic characteristics of a Magnetic Instrument.

目 次

1. 서론

전압계나 전류계등의 어떤 電磁計器로 전류나 전압등을 계측할때 주어지는 입력과 그 計器의 물리적인 성질에 따라 응답특성이 변화한다. 입력이 주어지면 주어진 입력을 정확하고 빠른 시간내에 나타낼때 그 계기는 우수한 계기라 할 수가 있다. 즉 5V의 전압이 전압계에 입력으로 들어 갈때 이와같은 크기의 출력을 계기의 바늘이 흔들림없이 즉시 나타낼수 있으면 우수한 성능의 계기라 할수가 있다

여기서는 가장 간단한 電磁計器를 일반적으로 2차계로 보고 그의 미분방정식의 解를 풀어 그것을 도표상에 나타냄으로써 감쇠비, 계기의 스프링상수, 계기의 고유진동수등을 조사하여 電磁計器의 특성이 무엇에 따라 변하는지를 알아보았다.

기호 설명

θ : 각변위

c : 점성 감쇠 계수

$f(t)$: 외력의 함수

I : 회전체의 관성 질량

Θ : 각변위 θ의 Laplace 변환

E_0 : 전압

k_s : 스프링 상수

ζ : 감쇠비 $\left(= \frac{C}{2\sqrt{I k_s}}\right)$

ω_n : 고유각진동수 $\left(= \sqrt{\frac{k_s}{I}}\right)$

k : 비례상수

k_e : 비례상수 $\left(= \frac{k}{I}\right)$

$\frac{\theta_d}{\theta_s}$: 진폭비 $\left(= \frac{\text{과도상태의 진폭}}{\text{정상상태의 진폭}}\right)$

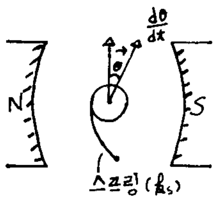
Ω : 외력의 각진동수

ϕ : 위상각차

2. 본론

2-1. 電磁計器의 운동방정식

가장 간단한 電磁計器의 형태를 나타내면 다음 그림과 같다.



여기서 외력이 주어져 지침이 각 θ 만큼 회전하였을 때 회전질량의 관성모멘트와 감쇠력과 스프링력과의 합이 외력과 같으므로 그 운동방정식은 다음과 같이 된다.

그림 1-1

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + k_s\theta = f(t) \qquad \text{①}$$

단, $I\ddot{\theta}$ = 회전체의 관성모멘트
$C\dot{\theta}$ = 감쇠력 (C : 점성감쇠계수)
$k_s\theta$ = 스프링력
$f(t)$ = 외력

그런데 외력 $f(t)$로는 step함수나 ramp함수, 주파수함수등의 많은 것이 주어질수 있으나 보통 電磁計器의 입력으로는 step함수나 주파수함수이므로 여기에 대해서만 방정식을 해석하고 특성을 살펴보도록 하겠다.

2-2. Step-Input일때의 응답특성

이때는 외력 $f(t) = kE_0$ (k : 비례상수, E_0 : 전압)로 되므로 식 ①은 다음이 된다.

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + k_s\cdot\theta = f(t) = k\cdot E_0 \qquad \text{②}$$

여기서 식 ②를 Laplace변환을 하고 초기조건 $\dot{\theta}_{t=0} = 0$, $\theta_{t=0} = 0$ 으로 하면

$$S^2\Theta_{(s)} + \frac{CS}{I}\Theta_{(s)} + \frac{k_s}{I}\Theta_{(s)} = \frac{kE_0}{IS} = \frac{k_e\cdot E_0}{S}$$ (단, $k_e = \frac{k}{I}$라 둠)

$$\left(S^2 + \frac{C}{I}S + \frac{k_s}{I}\right)\Theta_{(s)} = \frac{k_e\cdot E_0}{S}$$

$$\therefore \Theta_{(s)} = \frac{k_e\cdot E_0}{S}\cdot\frac{1}{S^2 + \frac{C}{I}S + \frac{k_s}{I}} \qquad \text{③}$$

여기서 $\omega_n = \sqrt{\frac{k_s}{I}}$, $\zeta = \frac{C}{2\sqrt{Ik_s}}$ ($= \frac{C}{2\omega_n I}$) 라 두면

③ 식은 다시

$$\Theta_{(s)} = \frac{k_e E_0}{S}\cdot\frac{1}{S^2 + 2\zeta\cdot\omega_n\cdot S + \omega_n^2} \qquad \text{④}$$

로 나타낼수 있다. 이때 ζ를 감쇠비 (Damping Ratio) ω_n를 고유각진동수라 한다.

식 ④를 풀기위하여 특성방정식 $s^2+2\zeta\cdot\omega_n s+\omega_n^2=0$ 의 근을 구하면

$$s_{1,2}=-\zeta\cdot\omega_n\pm\sqrt{\zeta^2\cdot\omega_n^2-\omega_n^2}$$
$$=-\zeta\cdot\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \qquad \text{⑤}$$

이 되고, $\zeta>1$, $\zeta=1$, $\zeta<1$ 에 따라서 解가 달라진다.

(I) $\zeta>1$

식 ④에서 분모의 근은 $a_1=0$, $a_2=-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})$
$a_3=-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})$로 되고 이를 부분분수로 나타내면

$$\Theta(s)=\frac{k_e E_0}{s(s-a_2)(s-a_3)}$$
$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-a_2}+\frac{C}{s-a_3} \qquad \text{⑥}$$

$$A=\lim_{s\to 0}[s\cdot\Theta(s)]=\left[\frac{k_e E_0}{(s-a_2)(s-a_3)}\right]_{s=0}$$
$$=\frac{k_e E_0}{\{\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\}\{\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\}}=\frac{k_e E_0}{\omega_n^2}$$

$$B=\lim_{s\to a_2}[(s-a_2)\Theta(s)]=\left[\frac{k_e E_0}{s(s-a_3)}\right]_{s=a_2}$$
$$=\frac{k_e E_0}{\{-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\}\{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\}}$$
$$=\frac{k_e E_0}{-2\omega_n^2(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})(\sqrt{\zeta^2-1})}=\frac{(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})k_e E_0}{-2\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$C=\lim_{s\to a_3}[(s-a_3)\Theta(s)]=\left[\frac{k_e E_0}{s(s-a_2)}\right]_{s=a_3}$$
$$=\frac{k_e E_0}{\{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\}\{-2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\}}$$
$$=\frac{k_e E_0}{2\omega_n^2(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})(\sqrt{\zeta^2-1})}$$
$$=\frac{(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\cdot k_e\cdot E_0}{2\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1}}$$

⑥식에 A, B, C를 代入시키고 Laplace 역변환을 하면

$$\therefore\ \theta(t)=\frac{k_e E_0}{\omega_n^2}\left\{1-\frac{(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\cdot e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right.$$
$$\left.+\frac{(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right\} \qquad \text{⑦}$$

(II) $\zeta=1$

④식에서 분모의 근은 $a_1=0$, $a_2=-\zeta\omega_n=-\omega_n=a_3$로 되고

이를 부분분수로 나타내면

$$\Theta_{(s)} = \frac{k_e E_0}{S(S+\omega_n)^2} = \frac{A}{S} + \frac{B}{(S+\omega_n)^2} + \frac{C}{(S+\omega_n)} \quad \text{———} ⑧$$

$$A = \lim_{S\to 0}[S\,\Theta_{(s)}] = \left[\frac{k_e \cdot E_0}{(S+\omega_n)^2}\right]_{S=0} = \frac{k_e E_0}{\omega_n^2}$$

$$B = \lim_{S\to a_2}[(S+\omega_n)^2 \cdot \Theta_{(s)}] = \left[\frac{k_e E_0}{S}\right]_{S=-\omega_n} = -\frac{k_e \cdot E_0}{\omega_n}$$

$$C = \lim_{S\to a_3}\frac{d}{ds}[(S+\omega_n)^2 \cdot \Theta_{(s)}] = \lim_{S\to -\omega_n}\frac{d}{ds}\left[\frac{k_e E_0}{S}\right] = \left[-\frac{k_e E_0}{S^2}\right]_{S=-\omega_n}$$

$$= -\frac{k_e E_0}{\omega_n^2}$$

⑧식에 A, B, C를 代入시키고 Laplace 역변환을 하면

$$\therefore \theta(t) = \frac{k_e E_0}{\omega_n^2}\left\{1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}\right\} \quad \text{———} ⑨$$

(III) $\zeta < 1$

식 ⑤에서

$$S = -\zeta \cdot \omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$
$$= -\zeta \cdot \omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$= -\zeta \cdot \omega_n \pm j\omega_{nd} \quad (\text{단},\ \omega_{nd} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$$

따라서 근은 $a_1 = 0$, $a_2 = -\zeta\omega_n + j\omega_{nd}$, $a_3 = -\zeta\omega_n - j\omega_{nd}$로 되고 식 ④를 부분분수로 나타내면

$$\Theta_{(s)} = \frac{k_e E_0}{S(S-a_2)(S-a_3)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S-a_2} + \frac{C}{S-a_3} \quad \text{—} ⑩$$

$$A = \lim_{S\to 0}[S \cdot \Theta_{(s)}] = \left[\frac{k_e E_0}{(S-a_2)(S-a_3)}\right]_{S=0}$$

$$= \frac{k_e E_0}{(\zeta\omega_n - j\omega_{nd})(\zeta\omega_n + j\omega_{nd})} = \frac{k_e E_0}{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_{nd}^2}$$

$$= \frac{k_e E_0}{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \frac{k_e E_0}{\omega_n^2}$$

$$B = \lim_{S\to a_2}[(S-a_2)\cdot\Theta_{(s)}] = \left[\frac{k_e \cdot E_0}{S(S-a_3)}\right]_{S=a_2}$$

$$= \frac{k_e E_0}{(-\zeta\omega_n + j\omega_{nd})(2j\omega_{nd})} = \frac{k_e \cdot E_0}{+\omega_n(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})(2j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}$$

$$= \frac{-k_e E_0}{+2\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}(+\zeta j + \sqrt{1-\zeta^2})} = \frac{-(\sqrt{1-\zeta^2} - j\zeta)\cdot k_e E_0}{2\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$C = \lim_{S\to a_3}[(S-a_3)\cdot\Theta_{(s)}] = \left[\frac{k_e E_0}{S(S-a_2)}\right]_{S=a_3}$$

$$= \frac{k_e \cdot E_o}{(-\zeta\omega_n - j\omega_{nd})(-2j\omega_{nd})} = \frac{k_e \cdot E_o}{\omega_n(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})(-2j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}$$

$$= \frac{+k_e E_o}{2\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}(\zeta j - \sqrt{1-\zeta^2})} = \frac{-(+\sqrt{1-\zeta^2}+j\zeta)k_e E_o}{2\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}$$

식 ⑩ 에 A, B, C 를 代入시키고 Laplace역변환을 하면

$$\theta(t) = \frac{k_e \cdot E_o}{\omega_n^2} - \frac{k_e E_o(\sqrt{1-\zeta^2} - j\zeta)}{2\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_{nd})t}$$

$$- \frac{k_e E_o(\sqrt{1-\zeta^2}+j\zeta)}{2\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_{nd})t}$$

$$= \frac{k_e \cdot E_o}{\omega_n^2} - \frac{k_e E_o}{\omega_n^2} \cdot \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ \underline{\frac{(\sqrt{1-\zeta^2} - j\zeta)}{2} e^{j\omega_{nd}t} + \frac{(\sqrt{1-\zeta^2}+j\zeta)}{2} \cdot e^{-j\omega_{nd}t}} \right\}$$

$\longrightarrow$ ⑩′

$$= \frac{k_e E_o}{\omega_n^2}\left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin(\omega_{nd}t + \phi) \right\}$$

$$\therefore \theta(t) = \frac{k_e \cdot E_o}{\omega_n^2}\left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_n t + \phi) \right\}$$

$$(\text{단 } \phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \text{ ——— ⑪}$$

⑩′ $\longrightarrow$

$$(\sqrt{1-\zeta^2} - j\zeta)e^{j\omega_{nd}t}/2 + (\sqrt{1-\zeta^2}+j\zeta)e^{-j\omega_{nd}t}/2$$

$$= (\sqrt{1-\zeta^2} - j\zeta)/2(\cos\omega_{nd}t + j\sin\omega_{nd}t) + (\sqrt{1-\zeta^2}+j\zeta)/2(\cos\omega_{nd}t - j\sin\omega_{nd}t)$$

$$= \sqrt{1-\zeta^2}/2 \cdot \cos\omega_{nd}t + j\sqrt{1-\zeta^2}/2\sin\omega_{nd}t - j\zeta/2\cos\omega_{nd}t + \zeta/2\sin\omega_{nd}t$$
$$+ \sqrt{1-\zeta^2}/2\cos\omega_{nd}t - j\sqrt{1-\zeta^2}/2\sin\omega_{nd}t + j\zeta/2\cos\omega_{nd}t + \zeta/2\sin\omega_{nd}t$$

$$= \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \cos\omega_{nd}t + \zeta \cdot \sin\omega_{nd}t$$

$$= \sin\phi \cdot \cos\omega_{nd}t + \cos\phi \cdot \sin\omega_{nd}t \quad (\because \phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$= \sin(\omega_{nd}t + \phi)$$

以上으로써 各各의 解가 구하여진다.

다음 과도상태의 동적진폭(θ_d)과 정상상태의 정적진폭(θ_s)과의 진폭비를 구하여 감쇠비 ζ에 따라서 응답특성을 알아보자. 정상상태의 진폭(θ_s)은 ⑦, ⑨, ⑪ 식에서 시간(t)을 무한대로 취하면 정적인 진폭 $\theta_s = \frac{k_e E_o}{\omega_n^2}$가 동일하게 나온다. 따라서

$\zeta > 1$ 일 때,
$$\frac{\theta_d}{\theta_s} = 1 - \frac{+\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$
$$+ \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \text{ ——— ⑫}$$

$\zeta = 1$ 일때,
$$\frac{\theta_d}{\theta_s} = 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} \text{ ——— ⑬}$$

$\zeta < 1$ 일때, $\frac{\theta_d}{\theta_s} = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \phi\right)$ ———— ⑭

$\because \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$

가 된다. 이들 ⑫, ⑬, ⑭ 의 式 들을 감쇠비 ζ 를 파라메터로 하여 좌표상에 plot한 결과 다음의 그림이 나옴을 알수있다.

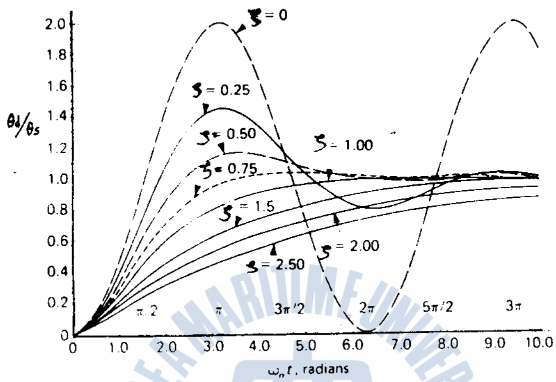


Fig 2-1. Step 입력시의 응답곡선

위 그림에서 $\zeta<1$ 상태에서 진동이 발생하고 ζ가 0에 가까울수록 단진동에 가까와지고 $\zeta=0$ 일때는 감쇠없는 정현파진동이 계속된다. $\zeta=1$ 인 경우는 진동과 非진동간의 경계점이 되고 $\zeta>1$ 인 경우는 진동없이 서서히 목표치에 수렴하고 있음을 알수있다. 보통 ζ가 0.7 ~ 0.8 사이에서 비교적 작은 진동으로 목표치에 빨리 도달됨을 보인다.

2-3. Frequency - Input 일 때의 응답특성

이때는 외력 $f(t) = kE_0\cdot\cos\Omega t$ (k: 비례상수, Ω: 외력의 진동수)로 되므로 맨처음의 식 ① 은

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k_s\cdot\theta = f(t) = kE_0\cdot\cos\Omega t \quad \text{———— ⑮}$$

로 되고 이것을 Laplace 변환을 하고 초기조건 $\dot{\theta}_{t=0} = 0$, $\theta_{t=0} = 0$ 으로 하면

$$S^2\Theta_{(s)} + \frac{C}{I}\cdot S\Theta_{(s)} + \frac{k_s}{I}\Theta_{(s)} = \frac{kE_0}{I}\cdot\frac{S}{S^2+\Omega^2} = \frac{k_e\cdot E_0\cdot S}{S^2+\Omega^2}$$ (단 $k_e = \frac{k}{I}$ 라 둠)

$$\left(S^2 + \frac{C}{I}\cdot S + \frac{k_s}{I}\right)\Theta_{(s)} = \frac{k_e\cdot E_0\cdot S}{S^2+\Omega^2}$$

$$\therefore \Theta_{(s)} = \frac{k_e\cdot E_0}{S^2 + \frac{C}{I}\cdot S + \frac{k_s}{I}}\cdot\frac{S}{(S^2+\Omega^2)} \quad \text{———— ⑯}$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k_s}{I}}$, $\zeta = \frac{C}{2\sqrt{I k_s}}$ 를 ⑯ 에 넣은 후

⑯ 식을 다시 쓰면

$$\Theta(s) = \frac{k_e \cdot E_0}{S^2 + 2\zeta \omega_n S + \omega_n^2} \cdot \frac{S}{S^2 + \Omega^2} \quad \cdots\cdots ⑰$$

⑰ 식도 ζ의 값에 따라 그 解가 달라 진다

(I) $\zeta > 1$ 일 경우

$S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2 = 0$ 의 근을 $a_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n = -\omega_n(\zeta \mp \sqrt{\zeta^2-1})$ 라 하면 ⑰ 식은 다음과 같이 부분분수로 나누어 진다

$$\Theta(s) = \frac{A_1}{S - a_1} + \frac{B_1}{S - a_2} + \frac{C_1}{S + \Omega j} + \frac{D_1}{S - \Omega j} \quad \cdots\cdots ⑱$$

여기에서 계수 A_1, B_1, C_1, D_1 는 다음과 같이 구하여 진다

$$A_1 = \lim_{s \to a_1} [(S - a_1)\Theta(s)] = \lim_{s \to a_1} \left[\frac{k_e \cdot E_0 \cdot S}{(S - a_2)(S^2 + \Omega^2)}\right]$$

$$= \frac{k_e \cdot E_0 \cdot \omega_n [\sqrt{\zeta^2-1} - \zeta]}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\,[-\omega_n^2(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})^2 + \Omega^2]}$$

$$= \frac{k_e \cdot E_0\,[\sqrt{\zeta^2-1} - \zeta]}{2 \cdot \omega_n^2 \cdot \sqrt{\zeta^2-1}\,[\Omega^2/\omega_n^2 + (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})^2]}$$

$$B_1 = \lim_{s \to a_2} [(S - a_2)\Theta(s)] = \lim_{s \to a_2} \left[\frac{k_e \cdot E_0 \cdot S}{(S - a_1)(S^2 + \Omega^2)}\right]$$

$$= \frac{k_e \cdot E_0 \cdot [\sqrt{\zeta^2-1} + \zeta]}{2 \cdot \omega_n^2 \sqrt{\zeta^2-1}\,[\Omega^2/\omega_n^2 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})^2]}$$

$$C_1 = \lim_{s \to -\Omega j} [(S + \Omega j)\Theta(s)] = \lim_{s \to -\Omega j} \left[\frac{k_e \cdot E_0 \cdot S}{(S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2)(S - \Omega j)}\right]$$

$$= \frac{k_e \cdot E_0 [\{1 - \Omega^2/\omega_n^2\} + 2\zeta(\Omega/\omega_n) j]}{2\omega_n^2 [\{1 - \Omega^2/\omega_n^2\}^2 + \{2\zeta(\Omega/\omega_n)\}^2]}$$

$$D_1 = \lim_{s \to \Omega j} [(S - \Omega j)\Theta(s)] = \lim_{s \to \Omega j} \left[\frac{k_e \cdot E_0 \cdot S}{(S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2)(S + \Omega j)}\right]$$

$$= \frac{k_e \cdot E_0 [\{1 - \Omega^2/\omega_n^2\} - 2\zeta(\Omega/\omega_n) j]}{2\omega_n^2 [\{1 - \Omega^2/\omega_n^2\}^2 + \{2\zeta(\Omega/\omega_n)\}^2]}$$

위의 A_1, B_1, C_1, D_1 의 값을 ⑱ 에 代入 하여 Laplace 역변환 하면 $\zeta > 1$ 인 경우 $\Theta(t)$ 의 解를 얻는다

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Theta(s)]$$

$$= \frac{ke\cdot E_0}{2\cdot\omega_n^2\cdot\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\left\{\frac{\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta}{\Omega^2/\omega_n^2+(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})^2}\right\}e^{-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})t} + \left\{\frac{\sqrt{\zeta^2-1}+\zeta}{(\Omega/\omega_n)^2+(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})^2}\right\}e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t}\right]$$

$$+\frac{ke\cdot E_0}{\omega_n^2[\{1-(\Omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\Omega/\omega_n)\}^2]}\left[\left(\frac{\{1-(\Omega/\omega_n)^2\}+2\zeta(\Omega/\omega_n)j}{2}\right)\cdot e^{-\Omega jt} + \left(\frac{\{1-(\Omega/\omega_n)^2\}-2\zeta(\Omega/\omega_n)j}{2}\right)\cdot e^{\Omega jt}\right]$$

$$= \frac{ke\cdot E_0}{\omega_n^2}\left[\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left\{\left(\frac{\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta}{(\Omega/\omega_n)^2+(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})^2}\right)\cdot e^{-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})t} + \left(\frac{\sqrt{\zeta^2-1}+\zeta}{(\Omega/\omega_n)^2+(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})^2}\right)\cdot e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t}\right\} + \frac{\cos(\Omega t-\phi_1)}{\sqrt{\{1-(\Omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\Omega/\omega_n)\}^2}}\right] \quad \cdots\cdots (19)$$

단. $\phi_1 = \tan^{-1}\dfrac{2\zeta(\Omega/\omega_n)}{1-(\Omega/\omega_n)^2}$

(II) $\zeta = 1$ 인 경우

$S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2=0$ 의 根은 $a_{1,2}=-\omega_n$ 이므로 (17)은 다음과 같이 부분분수로 나누어 진다

$$\Theta(s) = \frac{A_2}{(S+\omega_n)^2}+\frac{B_2}{(S+\omega_n)}+\frac{C_2}{S+j\Omega}+\frac{D_2}{S-j\Omega} \quad \cdots (20)$$

여기에서 계수 A_2, B_2, C_2, D_2는 다음과 같이 구하여 진다

$$A_2 = \lim_{S\to-\omega_n}\left[(S+\omega_n^2)\Theta(s)\right] = \lim_{S\to-\omega_n}\left[\frac{ke\cdot E_0\cdot S}{S^2+\Omega^2}\right] = \frac{-ke\cdot E_0\cdot\omega_n}{\Omega^2+\omega_n^2}$$

$$B_2 = \lim_{S\to-\omega_n}\frac{d}{dS}\left[(S+\omega_n^2)\Theta(s)\right] = \lim_{S\to-\omega_n}\left[\frac{(S^2+\Omega^2)ke\cdot E_0 - ke\cdot E_0\cdot 2S^2}{(S^2+\Omega^2)^2}\right]$$

$$= \frac{k_e \cdot E_0 \, (\Omega^2 + \omega_n^2 - 2\omega_n^2)}{(\Omega^2 + \omega_n^2)^2} = \frac{k_e \cdot E_0 \, (\Omega^2 - \omega_n^2)}{(\Omega^2 + \omega_n^2)^2}$$

C_2 의 값은 C_1 에서 $\zeta = 1$ 의 값을 代入하면 구할 수 있다

$$C_2 = \frac{k_e \cdot E_0 \cdot [\{1-(\Omega/\omega_n)^2\} + 2(\Omega/\omega_n) j]}{\omega_n^2 \cdot 2 \cdot \{1+(\Omega/\omega_n)^2\}^2}$$

D_2의 값는 D_1 에서 $\zeta = 1$ 의 값을 대입하여 구한다

$$D_2 = \frac{k_e \cdot E_0 [\{1-(\Omega/\omega_n)^2\} - 2(\Omega/\omega_n) j]}{\omega_n^2 \cdot 2 \cdot \{1+(\Omega/\omega_n)^2\}^2}$$

위의 A_2, B_2, C_2, D_2 값들을 ⑳식에 대입한후 이를 Laplace 逆變換하면 $\zeta = 1$ 인 경우의 $\theta(t)$의 해를 얻는다

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}[\theta(s)]$$

$$= -\frac{k_e \cdot E_0 \cdot \omega_n}{\Omega^2 + \omega_n^2} \cdot t \cdot e^{-\omega_n t} + \frac{k_e \cdot E_0 \cdot (\Omega^2 - \omega_n^2)}{(\Omega^2 + \omega_n^2)^2} e^{-\omega_n t}$$

$$+ \frac{k_e \cdot E_0}{\omega_n^2 \cdot \{1+(\Omega/\omega_n)^2\}^2} \left[\left(\frac{\{1-(\Omega/\omega_n)^2\} + 2(\Omega/\omega_n) j}{2} \right) e^{-\Omega j t} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\{1-(\Omega/\omega_n)^2\}^2 - 2(\Omega/\omega_n) j}{2} \right) \cdot e^{\Omega j t} \right]$$

$$= \frac{E_0 \cdot k_e}{\omega_n^2 \{1 + (\Omega/\omega_n)^2\}} \left[e^{-\omega_n t} \cdot \left\{ 1 - \omega_n \cdot t - \frac{2\omega_n}{\Omega^2 + \omega_n^2} \right\} \right.$$

$$\left. + \cos(\Omega t - \phi_2) \right] \quad \cdots\cdots\cdots ㉑$$

단

$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{2(\Omega/\omega_n)}{1-(\Omega/\omega_n)^2}$$

(Ⅲ) $\zeta < 1$ 인 경우

$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 의 根은 $\alpha_{1,2} = -\omega_n(\zeta \mp \sqrt{1-\zeta^2}\, j)$ 라 두면 ⑪식은 다음과 같이 부분분수로 나누어 진다.

$$\Theta(s) = \frac{A_3}{s-a_1} + \frac{B_3}{s-a_2} + \frac{C_3}{s+\Omega j} + \frac{D_3}{s-\Omega j} \quad \cdots\cdots (22)$$

여기에서 계수 A_3, B_3, C_3, D_3 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$A_3 = \lim_{s\to a_1}\left[(s-a_1)\Theta(s)\right] = \lim_{s\to a_1}\left[\frac{ke\cdot E_0\cdot s}{(s-a_2)(s^2+\Omega^2)}\right]$$

$$= \frac{ke\cdot E_0\cdot \omega_n(-\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\,j)}{\left[\omega_n(-\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\,j)-\omega_n(-\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}\,j)\right]\left[\{\omega_n(-\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\,j)\}^2+\Omega^2\right]}$$

$$= \frac{ke\cdot E_0\cdot\left[\sqrt{1-\zeta^2}\{(\Omega/\omega_n)^2-1\}+\{(\Omega/\omega_n)^2+1\}\zeta j\right]}{2\cdot\omega_n^2\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\left[\{2\zeta^2+(\Omega/\omega_n)^2-1\}^2+4\zeta^2(1-\zeta^2)\right]}$$

$$B_3 = \lim_{s\to a_2}\left[(s-a_2)\Theta(s)\right] = \lim_{s\to a_2}\left[\frac{ke\cdot E_0\cdot s}{(s-a_1)(s^2+\Omega^2)}\right]$$

$$= \frac{ke\cdot E_0\cdot \omega_n(-\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}\,j)}{\left[\omega_n(-\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}\,j)-\omega_n(-\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\,j)\right]\left[\{\omega_n(-\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}\,j)\}^2+\Omega^2\right]}$$

$$= \frac{ke\cdot E_0\cdot\left[\sqrt{1-\zeta^2}\{(\Omega/\omega_n)^2-1\}-\{(\Omega/\omega_n)^2+1\}\zeta j\right]}{2\cdot\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}\left[\{2\zeta^2+(\Omega/\omega_n)^2-1\}^2+4\zeta^2(1-\zeta^2)\right]}$$

$$C_3 = C_1, \qquad D_3 = D_1$$

위의 A_3, B_3, C_3, D_3 의 값을 (22)식에 대입한후 Laplace 逆變換 하면 $\zeta<1$ 인 경우의 $\Theta(t)$의 解를 얻을수 있다.

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\Theta(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_3}{s-a_1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B_3}{s-a_2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_3}{s+\Omega j}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{D_3}{s-\Omega j}\right]$$

$$= \frac{ke\cdot E_0}{\omega_n^2\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\left[\{2\zeta^2+(\Omega/\omega_n)^2-1\}^2+4\zeta^2(1-\zeta^2)\right]}\left[\left\{\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\{(\Omega/\omega_n)^2-1\}+\{(\Omega/\omega_n)^2-1\}\zeta j}{2}\right\}\cdot e^{-\omega_n(\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}j)t} + \left\{\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\{(\Omega/\omega_n)^2-1\}\cdot\cdot\{(\Omega/\omega_n)^2-1\}\zeta j}{2}\right\}\cdot e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}j)t}\right]$$

$$+\frac{ke\cdot E_0}{\omega_n^2\left[\{1-(\Omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\Omega/\omega_n)\}^2\right]}\left[\left\{\frac{\{1-(\Omega/\omega_n)^2\}+2\zeta(\Omega/\omega_n)j}{2}\right\}\cdot e^{-\Omega jt}\right.$$

$$+ \left\{ \frac{\{1-(\Omega/\omega_n)^2\} - 2\zeta(\Omega/\omega_n) j}{2} \right\} \cdot e^{\Omega j t} \Bigg]$$

$$= \frac{k_e \cdot E_0 \cdot e^{-\omega_n \zeta t} \cdot \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t - \varphi)}{\omega_n^2 \cdot \sqrt{1-\zeta^2}\,\sqrt{\Omega^4/\omega_n^4 + 2(\Omega/\omega_n)^2(\zeta^2-1)+1}}$$

$$+ \frac{k_e \cdot E_0 \quad \cos(\Omega t - \phi_3)}{\omega_n^2 \sqrt{\{1-(\Omega/\omega_n)^2\}^2 + \{2\zeta(\Omega/\omega_n)\}^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots ㉓$$

$$\text{단} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{(1+\Omega^2/\omega_n^2)\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}\,(\Omega^2/\omega_n^2 - 1)}, \quad \phi_3 = \phi_1$$

以上 입력이 단진동일때 ζ의 값에 따른 $\theta(t)$의 해를 얻어보면 ⑲, ㉑, ㉓ 식과 같으며 $k_e \cdot E_0/\omega_n^2$ 은 θ_s 즉 靜的振幅으로 最大振幅을 나타낸다. ζ의 경계조건에 따라 $\theta(t)$의 해는 서로 상이하다.

그러나 ⑲, ㉑, ㉓ 식의 첫째 항은 과도항으로 $t \to \infty$ 이면 영(零)에 수렴하나 둘째 항은 정상항으로 일정한 진폭비와 상차각 ϕ로 계속 진동하게 됨을 알 수 있다. 여기에서 정상항의 진폭비와 상차각을 따로 분리하여 보면 아래 식과 같다

$$\frac{\theta_d}{\theta_s} = \frac{1}{\sqrt{\{(1-\Omega^2/\omega_n^2)\}^2 + \{2\zeta(\Omega/\omega_n)\}^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots ㉔$$

$$\phi_3 = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\Omega/\omega_n)}{1-(\Omega/\omega_n)^2} = \phi_1 \qquad \cdots\cdots\cdots ㉕$$

㉔식에서 ζ를 파라메타로 하여 振幅比와 周波数比를 求하면 다음 그림과 같다

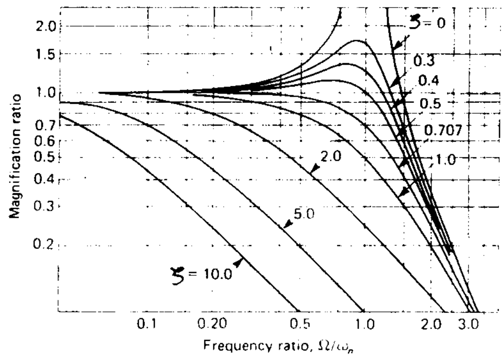


Fig 2-2 frequency 입력시의 진폭응답

이 그림 (그림 2·2) 상에서 $\zeta = 0$ 일 때 $\Omega/\omega_n = 1$ 이 되면 θ_d/θ_s 가 무한대로 커져 곧 공진이 일어나 계기가 파손할 위험이 있다는 것을 보여주며 또한 Ω/ω_n 이 작을수록 θ_d/θ_s 가 1에 가까와져 계기의 특성이 우수해진다는 것을 나타낸다. 이 그림에서는 ζ 가 0.707 일 때 보다 넓은 운전영역을 가지고 진폭비도 1에 수렴하는 만족스런 특성을 가짐을 알 수 있다.

또 $\phi = \tan^{-1}\dfrac{2\zeta(\Omega/\omega_n)}{1-(\Omega/\omega_n)^2}$ 의 위상차곡선을 그리면 다음과 같이 나온다. 여기서는 공진시는 감쇠비에 관계없이 위상차는 90°로 되고, $\Omega \gg \omega_n$ 에 있어서는 위상차는 180°로 됨을 알 수 있다. 0.65 와 0.75 사이의 감쇠비가 거의 0 ~ 40% 의 주파수비 범위에서 선형적으로 됨을 보여주고 있다.

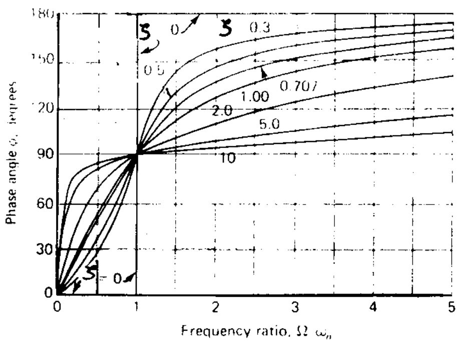


Fig 2-3 위상차 곡선

3. 결론

이상에서 응답특성이 감쇠비, 주파수비, 진폭비등에 따라 어떻게 변하는가를 살펴보았다. 그런데 $\omega_n = \sqrt{\frac{k_s}{I}}$, $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Ik_s}}$ 이므로 계의 고유각진동수와 회전질량, 점성감쇠계수, 감쇠비간의 관계를 위에서 살펴본 응답특성과 연관지어 생각해 봄으로써 결론을 맺었다.

i) $\zeta = 0$ 일때는 감쇠없는 정현파진동을 계속하고, $\zeta > 1$ 인때에는 整定시간이 너무 길어져 응답속도가 늦으므로 두 경우가 부적당하므로 ζ를 적절히 유지하기 위하여는 I와 k_s를 적당히 조절하여 선정할 필요가 있다.

ii) 계자체가 가지는 고유각진동수가 커야만 Ω/ω_n가 작아져 θ_d/θ_s가 1에 가까와질수가 있고 계기의 특성은 우수해질수가 있다. ω_n이 커짐은 관성질량이 작아야함을 의미하므로 가급적이면 가벼운 재질로 회전체와 지침을 만들어야 할것이다. 스프링상수 k_s를 크게 하면 출력을 나타내는데 큰 힘과 많은 시간이 들어야하므로 무턱대고 이것을 크게 할수는 없다.

참 고 문 헌

1) ERNEST O. DOEBELIN: MEASUREMENT SYSTEMS APPLICATION AND DESIGN, McGRAW-HILL (1983)

2) THOMAS G. BECKWITH, N. LEWIS BUCK AND ROY D. MARANGONI: MECHANICAL MEASUREMENT, ADDISON-WESLEY (1982)

3) BENJAMIN C. KUO: AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS, PRENTICE-HALL. INC (1982)

4) 하주식: 자동제어공학, 한국해양대학, 해사도서출판부 (1984)