

轉位齒車의 물음효율에 관하여

閔 右 泓

On the Contact Efficiency of Involute Profile Shifted Gear

Min woo-hong

目 次

I. 序 言	IV. 考 察
II. 轉位外齒車의 물음효율	V. 結 言
III. 轉位內齒車의 물음효율	參考文獻

Abstract

Compared with standard gear, the involute profile shifted gear has flexibility on the operating pressure angle, contact ratio, gear thickness and slip ratio in designing gear set.

Therefore the modification coefficient of profile shifted gear is to be determined on the basis of the above factors and teeth strength. Also the contact efficiency has to be duly considered in designing gear of high capacity power transmission.

In this paper, the formulas of contact efficiency of involute profile shifted gear are derived geometrically and compared for the external and internal gear respectively.

1. 序 言

標準齒車에서는 壓力角과 齒數가 주어지면 그 齒形이 결정되어, 齒數가 적을때에는 undercut 를 일으킬 염려가 있고 또 물리는 齒車의 齒數比가 클때는 물음 길이 및 그 배분이 적당치 못하고 큰 齒車의 이두께가 작은 齒車의 이두께 보다 커져 강도상이나 기타 점에서 소요의 목적에 적합한 齒形이 되지 않는다.

이에 반해 轉位齒車는 轉位係數를 적당히 선정함으로 undercut의 방지, 물음을 및 그 배분, 齒車의 중심거리, 미끄럼울의 조정 및 기타 齒의 강도면에서 設計의 용통성을 갖는다. 그러나

이러한 모든 條件을 다 만족시키는 轉位係數의 선정은 곤란하여 부분적인 조건이나 최적조건에서 轉位係數를 결정하는 방식들이 제안되어 있으나 그 구체적인 내용에 대해서는 대부분 비밀로 되어 명시되지 않고 있다. 또한 轉位係數는 齒車의 사용목적과 상태에 따라 고려되어야 하며 특히 대동력의 전동장치인 선박의 감속장치에 사용되는 齒車에서는 齒面摩擦에 따른 물음효율이 고려되어야 한다.

따라서 본고에서는 轉位內外齒車의 물음효율식을 幾何學的으로 유도하여 물음율에 대한 齒數齒數比, 齒數差 및 轉位の 영향을 검토 고찰 하였다.

記 號

z_1, z_2 ; 原動齒車와 從動齒車의 齒數

r_{g1}, r_{g2} ; " 基礎円半徑

d_{s1}, d_{s2} ; " 이끝원 직경

ω_1, ω_2 ; " 회전 각 속도

x_1, x_2 ; " 轉位係數

α_{k1}, α_{k2} ; " 이끝壓力角

ϵ_1, ϵ_2 ; 接近물음율, 退去물음율

α_c ; 工具壓力角

α_s ; 물음壓力角

m ; module

t_c ; 法線 pitch

i ; 齒數比

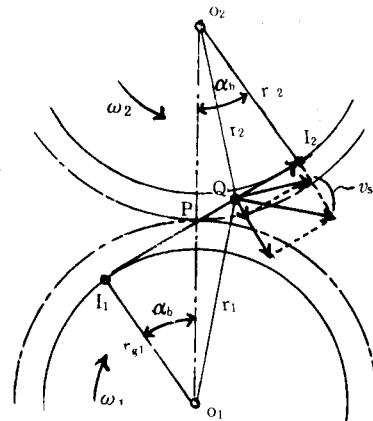
η ; 물음효율

I. 轉位 involute 外齒車의 물음효율

第1圖에서 齒車1를 原動齒車, 齒車2를 從動齒車라 하고 P를 pitch점이라 하면 齒의 임의점점 Q에서의 미끄럼 速度 v_s 는 $v_s = \overline{PQ}(\omega_1 + \omega_2)$, 이때 pitch점 P에서 점점 Q까지의 거리 \overline{PQ} 를 e 라 하면 $v_s = e(\omega_1 + \omega_2)$, 또 P_n 를 齒面法線荷重, μ 를 마찰계수라 하면 dt시간중의 마찰일량 dA 는 $dA = P_n \mu v_s dt = P_n \mu e(\omega_1 + \omega_2) dt$ 이며 dt시간 내의 점점의 이동거리 de 는

$$de = r_{g1} \omega_1 dt = r_{g2} \omega_2 dt \text{ 임으로}$$

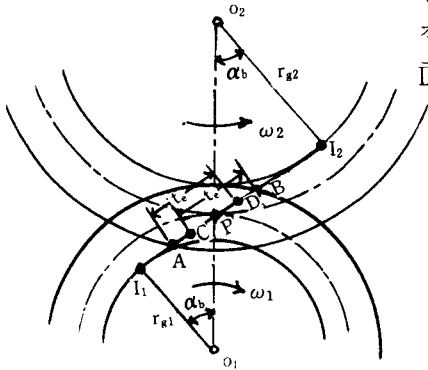
$$dA = P_n \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} + \frac{1}{r_{g2}} \right) e de \dots \dots \dots (1)$$



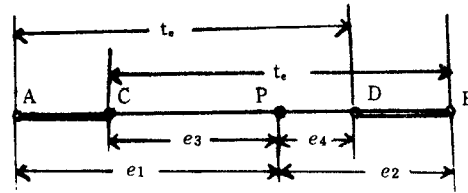
第 1 圖

第2圖는 물음율 ϵ 이 $1 < \epsilon < 2$ 경우를 나타내며 A점에서 물음이 시작하여 B점에서 끝난다.

접촉점의 궤적만을 나타내면 第3圖와 같이 된다. 즉 \overline{AC} , \overline{DB} 간에서는 2쌍의 이가 물리며 \overline{CPD} 사이에서는 1쌍의 이



第 2 圖



第 3 圖

가 물린다. 齒面法線荷重은 물림중 복잡하게 변하나 범잡성을 피하기 위해 1쌍이 물리는 \overline{CPD} 사이에서는 일정값 P_n 를 취하고 2쌍이 물리는 \overline{AC} , \overline{DB} 사이에서는 P_n 의 $\frac{1}{2}$ 이 등분하여 작용한다고 가정한다. 또한 齒面의 마찰계수 μ 는 미끄럼 速度와 윤활유의 점도, 및 齒面荷重의 크기에 따라 변하나, 여기서는 일정하다고 가정한다. 이러한 가정은 齒數比, 齒數差 및 轉位等이 물음 효율에 미치는 영향을 고찰하는대는 문제점이 없다.

지금 \overline{AP} 를 e_1 , \overline{BP} 를 e_2 , \overline{CP} 를 e_3 , \overline{DP} 를 e_4 라 하면 한쌍의 이가 물리는 기간중의 마찰일량 A 는 (1)식에 의해

$$A = P_n \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} + \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(\int_0^{e_3} e de + \int_0^{e_4} e de \right) + \frac{P_n}{2} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} + \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(\int_{e_1}^{e_2} e de + \int_{e_1}^{e_2} e de \right)$$

따라서
$$A = \frac{1}{4} P_n \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} + \frac{1}{r_{g2}} \right) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$$

第3圖에서 $e_3 = t_e - e_2$, $e_4 = t_e - e_1$ 이며 또한

$$r_{g1} = \frac{t_e z_1}{2\pi}, \quad r_{g2} = \frac{t_e z_2}{2\pi}, \quad \epsilon_1 = \frac{e_1}{t_e}, \quad \epsilon_2 = \frac{e_2}{t_e} \text{ 이므로 이를 위 식에 대입하면}$$

$$A = P_n \mu t_e \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) \dots \dots \dots (2)$$

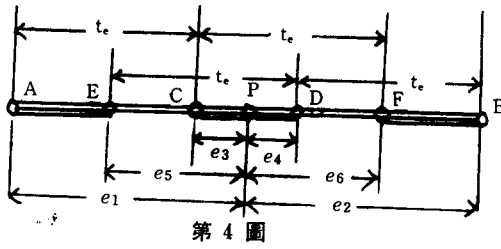
한쌍의 이가 하는 傳動일량을 A_D 라하면

$A_D = P_n t_e$ 이므로 물음효율 η 는 $\eta = \frac{A_D - A}{A_D} = 1 - \frac{A}{A_D}$ 이며 이식에서 물음율이 $1 < \epsilon < 2$ 경우의 물음효율은

$$\eta = 1 - \mu \pi \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) \dots \dots \dots (3)$$

다음으로 물음율이 $2 < \epsilon < 3$ 경우 접점궤적을 도시하면 第4圖와 같으며 \overline{AE} , \overline{CD} , \overline{FB} 간에서는 3쌍의 이가 물리며 \overline{EC} , \overline{DF} 간에서는 2쌍의 이가 물린다. 이때 한쌍의 이의 마찰일량 A 는 (1)식에서

(4)



$$A = \frac{P_n}{3} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} + \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(\int_{e_5}^{c1} ede + \int_0^{e3} ede + \int_0^{e4} ede + \int_{e_6}^{c2} ede \right) + \frac{P_n}{2} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} + \frac{1}{r_{g2}} \right) \times \left(\int_{e_3}^{e5} ede + \int_{e_1}^{e6} ede \right) = \frac{P_n}{6} \left(\frac{1}{r_{g1}} + \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(e_1^2 - e_5^2 + e_3^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_6^2 \right) + \frac{P_n}{4} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} + \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(e_5^2 - e_3^2 + e_6^2 - e_1^2 \right)$$

그런데 第4圖에서 $e_3 = e_1 - t_c$, $e_4 = e_2 - t_c$, $e_5 = 2t_c - e_2$, $e_6 = 2t_c - e_1$ 이며 $r_{g1} = \frac{t_c z_1}{2\pi}$, $r_{g2} = \frac{t_c z_2}{2\pi}$ 이므로

$$A = P_n \mu \pi t_c \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3}$$

이때에도 한개의 이가하는 전동일량 A_D 는 $A_D = P_n t_c$ 임으로 물음효율 η 는

$$\eta = 1 - \mu \pi \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3} \dots \dots \dots (4)$$

이끝원 직경을 DIN 방식인 $d_{k1} = (z_1 + 2)m + 2x_1 m$, $d_{k2} = (z_2 + 2)m + 2x_2 m$ 를 취하면 (3), (4)식 중의 ε_1 , 과 ε_2 는 다음과 같이 표시된다.

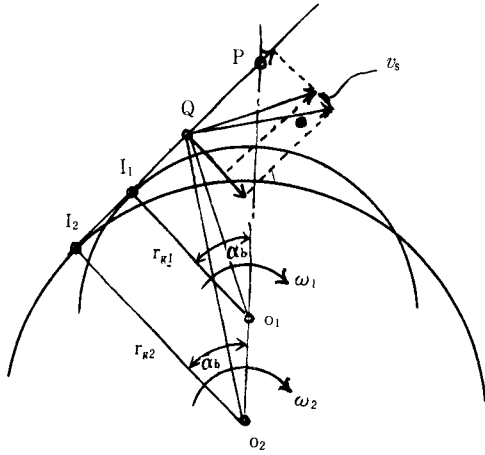
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_{k1} &= \frac{z_1 \cos \alpha_c}{z_1 + 2 + 2x_1} \\ \cos \alpha_{k2} &= \frac{z_2 \cos \alpha_c}{z_2 + 2x_2} \\ \text{inv} \alpha_b &= 2 \tan \alpha_c \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} + \text{inv} \alpha_c \\ \varepsilon_1 &= \frac{z_2}{2\pi} (\tan \alpha_{k2} - \tan \alpha_b) \\ \varepsilon_2 &= \frac{z_1}{2\pi} (\tan \alpha_{k1} - \tan \alpha_b) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

(5)식 중 $\tan \alpha_b$ 의 近似式을 구하면

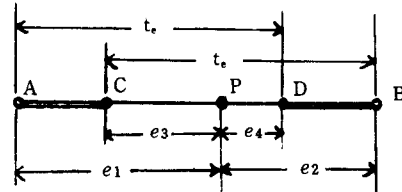
$$\begin{aligned} 2 \tan \alpha_c \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} + \text{inv} \alpha_c &= \text{inv} \alpha_b = \text{inv}(\alpha_c + \delta) \doteq \text{inv} \alpha_c + \tan^2 \alpha_c \delta, \\ \tan \alpha_b &= \tan(\alpha_c + \delta) \doteq \tan \alpha_c + \sec^2 \alpha_c \delta \quad \text{임으로} \\ \tan \alpha_b &\doteq \tan \alpha_c + \frac{4(x_1 + x_2)}{\sin 2\alpha_c (z_1 + z_2)} \end{aligned}$$

3. 轉位內齒車의 물음효율

(1) 물음壓力角이 pinion의 이끝 壓力角보다 적은 경우



第 5 圖



第 6 圖

일반적인 내치차의 경우며 第5圖에서 外齒車 1를 原動齒車, 內齒車 2를 從動齒車라하면 임의 접점 Q에서의 미끄럼 速度 v_s 는 $v_s=PQ(\omega_1 - \omega_2)$ 가 되며 이때 dt 시간사이의 마찰량 dA 는 (1)식의 경우와 같이 $dA = F_n \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} - \frac{1}{r_{g2}} \right) ede$ 이다, 물음율이 $1 < \epsilon < 2$ 에서는 접점궤적이 第6圖

와 같이 되고, 外齒車에서와 같은 방법으로 물음효율 η 는

$$\eta = 1 - \mu\pi \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) \dots\dots\dots (6)$$

물음율이 $2 < \epsilon < 3$ 경우는

$$\eta = 1 - \mu\pi \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \left(\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 3 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{3} \right) \dots\dots\dots (7)$$

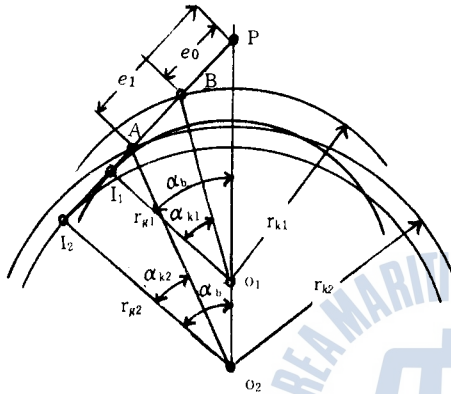
또한 이끌원 직경을 DIN 방식 $d_{k1} = (z_1 + 2 + 2x_1)m$, $d_{k2} = (z_2 - 2 + 2x_2)m$ 로 하면 (6), (7)식중 ϵ_1 , ϵ_2 는 다음에서 구하여진다.

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha_{k1} &= \frac{z_1 \cos\alpha_c}{z_1 + 2 + 2x_1} \\ \cos\alpha_{k2} &= \frac{z_2 \cos\alpha_c}{z_2 - 2 + 2x_2} \\ \operatorname{inv}\alpha_b &= 2 \tan\alpha_c \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} + \tan\alpha_c \\ \text{또는 } \tan\alpha_b &= \tan\alpha_c + \frac{4(x_2 - x_1)}{\sin 2\alpha_c (z_2 - z_1)} \\ \epsilon_1 &= \frac{z_1}{2\pi} (\tan\alpha_b - \tan\alpha_{k2}) \\ \epsilon_2 &= \frac{z_2}{2\pi} (\tan\alpha_{k1} - \tan\alpha_b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

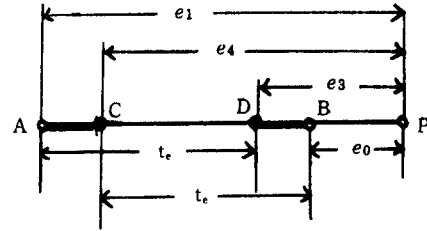
(2) 물음 壓力角이 pinion의 이끌壓力角보다 큰 경우 :

이 경우는 큰 減速比를 얻기위해 맞물리는 齒車의 齒數差를 적게하였을때 trochoid 干涉을 피

하기위해 內齒車를 轉位한 경우로 第7圖에 물림상태를 표시한다. 즉 이때 물음壓力角 α_b 는 pinion의 이끝壓力角 α_{k1} 보다 크게되어 A점에서 물림이 시작하여 B점에서 끝나므로 pitch점의 한 편에서만 접촉이 이루어진다. 第8圖는 물음율이 $1 < \epsilon < 2$ 경우의 점점궤적을 나타내며 한쌍의 이가 접촉중 하는 마찰일량은 (1)식에서



第 7 圖



第 8 圖

$$A = P_n \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} - \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(\int_{e_3}^{e_4} ede \right) + \frac{P_n}{2} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} - \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(\int_{e_4}^{e_1} ede + \int_{e_0}^{e_3} ede \right) = \frac{1}{4} P_n \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} - \frac{1}{r_{g2}} \right) (e_4^2 - e_3^2 - e_1^2 - e_0^2)$$

第8圖에서

$$e_3 = e_1 - t_e, \quad e_4 = e_0 + t_e$$

이때 $r_{g1} = \frac{t_e z_1}{2\pi}$, $r_{g2} = \frac{t_e z_2}{2\pi}$ 이므로

$$A = \pi P_n \mu \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) (e_0 + e_1)$$

한쌍이 하는 진동일량은

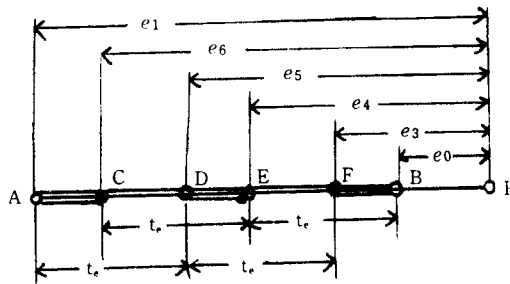
이경우도 $A_D = P_n t_e$ 임으로

$$\eta = 1 - \pi \mu \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \frac{e_0 + e_1}{t_e} \dots \dots \dots (9)$$

이때의 물음율 ϵ 는 $\epsilon = \frac{e_1 - e_0}{t_e}$ 이며

DIN 방식에 의해 이끝원 직경을 취하면 (9)식중 $\frac{e_1}{t_e}$, $\frac{e_0}{t_e}$ 는 다음식에서 얻어진다.

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_{k1} &= \frac{z_1 \cos \alpha_c}{z_1 + 2 + 2x_1}, & \cos \alpha_{k2} &= \frac{z_2 \cos \alpha_c}{z_2 - 2 + 2x_2} \\ \operatorname{inv} \alpha_b &= \operatorname{inv} \alpha_c + 2 \tan \alpha_c \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \\ \frac{e_1}{t_e} &= \frac{z_2}{2\pi} (\tan \alpha_b - \tan \alpha_{k2}) \\ \frac{e_0}{t_e} &= \frac{z_1}{2\pi} (\tan \alpha_b - \tan \alpha_{k1}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$



물음율이 $2 < \epsilon < 3$ 경우는 점접케적이 第8圖와 같이 되고 이때의 마찰일량 A 는 (1)식에 의해

$$A = \frac{P_n}{3} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} - \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(\int_{e_6}^{e_1} ede + \int_{e_4}^{e_5} ede + \int_{e_8}^{e_3} ede \right) + \frac{P_n}{2} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} - \frac{1}{r_{g2}} \right) \left(\int_{e_5}^{e_6} ede + \int_{e_3}^{e_4} ede \right) = \frac{P_n}{6} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} - \frac{1}{r_{g2}} \right) (e_1^2 - e_6^2 + e_5^2 - e_4^2 + e_3^2 - e_0^2)$$

第 9 圖

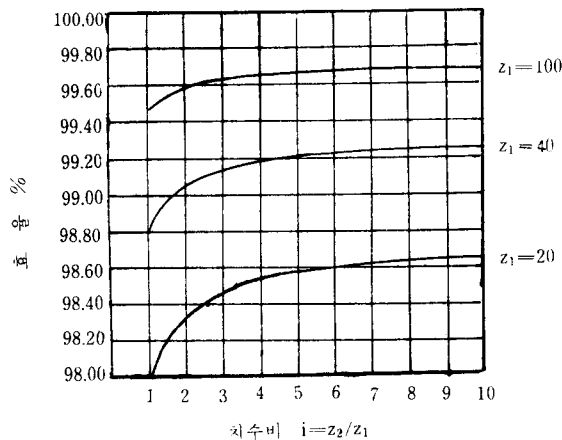
$$+ \frac{P_n}{4} \mu \left(\frac{1}{r_{g1}} - \frac{1}{r_{g2}} \right) (e_3^2 - e_5^2 + e_4^2 - e_2^2)$$

그런데 第9圖에서 $e_3 = e_1 - 2t_e$, $e_4 = e_0 + t_e$, $e_5 = e_1 - t_e$, $e_6 = e_5 + 2t_e$ 임으로 $A = \pi P_n \mu \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \times (e_0 + e_1)$ 이 되어 물음 효율은 $1 < \epsilon < 2$ 경우와 같다.

IV. 考 察

(1) 齒數, 齒數比, 轉位가 外齒車의 무름효율에 미치는 영향 :

工具壓力角 $\alpha_c = 20^\circ$, 마찰계수 $\mu = 0.1$, $x_1 = x_2 = 0$ 즉 표준치차의 $z_1 = 20, 40, 100$, 齒數比 $i = \frac{z_2}{z_1} = 1 \sim 10$ 에 대한 물음효율들(3), (4), (5)식에 의해 각각 구하여 第10圖와 같은 線圖를 얻었다. 이 線圖를 보면 齒車의 齒數나, 齒數比가 크면 무름효율이 커진다. 또한 DIN 3226 의한 轉位係數 $x_1 = 0.5$, $x_2 = -0.5$. 工具壓力角, $\alpha_c = 20^\circ$, $z_1 = 20$ 및 40, 齒數比 $i = 7$ 인 경우를 (3), (4), (5)식을



第 10 圖

사용 물음효율을 구한바 표1를 얻었다. 이표로 轉位量에 대한 물음 효율관계를 전반적으로 알수는 없으나 轉位에 따라 효율이 다소 저하는 되나 별 영향이 없다는것을 알 수 있다.

α_c	z_1	z_2	x_1	x_2	η%
20°	20	140	0.5	-0.5	98.48
20°	40	280	0.5	-0.5	99.11

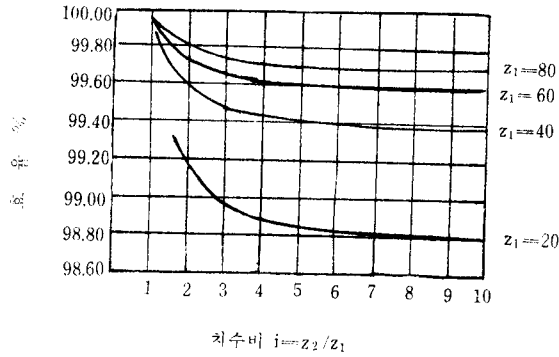
표 1

(2) 齒數, 齒數比 및 轉位가 內齒車의 물음효율에 미치는 영향

工具壓力角 $\alpha_c = 20^\circ$, 마찰계수 $\mu = 0.1$, $x_1 = x_2 = 0$

(8)

즉 표준치차의 $z_1=20, 40, 60, 80$, 齒數比 $i=1\sim 10$ 에 대한 물음효율을 (6), (7), (8)식에 의해 각각 구하여 第11圖와 같은 線圖를 얻었다. 이 線圖를 보면 內齒車의 물음효율은 齒車의 齒數가 많아지면 높아지고 齒數比가 커지면 낮아진다. 또한 齒數比보다는 齒數에 더 영향을 받는다.



第 11 圖

z_1	40							
x_1	0							
z_2	41	42	43	44	45	46	47	48
x_2	1.0	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0

표 2

z_1	60							
x_1	0							
z_2	61	62	63	64	65	66	67	68
x_2	1.0	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0

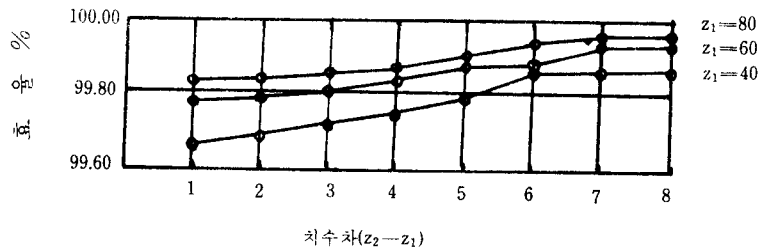
표 3

z_1	80							
x_1	0							
z_2	81	82	83	84	85	86	87	88
x_2	1.0	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0

표 4

工具壓力角 $\alpha_c=20^\circ$, pinion의 齒數 $z_1=40, 60, 80$, $x_1=0$, 內齒車의 齒數 z_2 를 z_1 보다 1내지 8만큼 취하고 x_2 는 trochoid 干涉이 일어나지 않는데 必要한 값인 표2 표3 표4와 같이 취하여 (9) (10)식으로 물음효율을 계산하여 第12圖와 같은 線圖를 얻었다.

第12圖의 線圖를 第10圖와 第11圖의 線圖와 比較하면 齒數差 1개 또는 2개의 轉位內齒車의 물음효율은 상당히 높아 표준치차 보다 높고, 표준내치차에도 별로 떨어지지 않는다.



第 12 圖

V. 結 言

內外齒車의 齒數, 齒數差, 轉位에 對한 물음 효율을 비교 고찰한바,

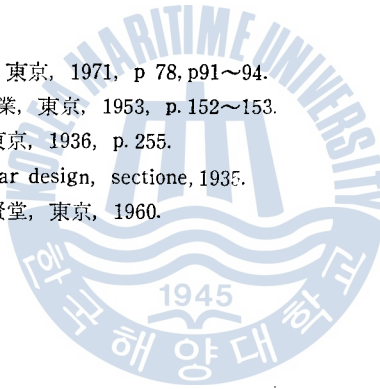
(1) 齒數가 크면 內外齒車 다같이 물음효율은 높아지고 齒數比가 커지면 外齒車는 높아지고 內齒車는 낮아진다.

(2) 물음효율은 齒數比보다 齒數에 더영향을 받는다.

(3) 轉位에 따라 물음효율은 일반적으로 낮어지나 큰 영향은 없다.

參 考 文 獻

- 1) 中田孝; 轉位齒車, 誠文堂, 東京, 1971, p 78, p91~94.
- 2) 仙波正壯; 齒車1卷, 日本工業, 東京, 1953, p. 152~153.
- 3) 野口尙; 機構學, 山海堂, 東京, 1936, p. 255.
- 4) Buckingham; Manual of gear design, sectione, 1935.
- 5) 成瀬政男; 齒車の研究, 養賢堂, 東京, 1960.



V. 結 言

內外齒車의 齒數, 齒數差, 轉位에 對한 물음 효율을 비교 고찰한바,

(1) 齒數가 크면 內外齒車 다같이 물음효율은 높아지고 齒數比가 커지면 外齒車는 높아지고 內齒車는 낮아진다.

(2) 물음효율은 齒數比보다 齒數에 더영향을 받는다.

(3) 轉位에 따라 물음효율은 일반적으로 낮아지나 큰 영향은 없다.

參 考 文 獻

- 1) 中田孝; 轉位齒車, 誠文堂, 東京, 1971, p 78, p91~94.
- 2) 仙波正壯; 齒車1卷, 日本工業, 東京, 1953, p. 152~153.
- 3) 野口尚; 機構學, 山海堂, 東京, 1936, p. 255.
- 4) Buckingham; Manual of gear design, section, 1935.
- 5) 成瀬政男; 齒車の研究, 養賢堂, 東京, 1960.



