

# 傳達매트릭스法에 의한 多点支持軸系の 聯成自由橫振動計算에 관한 研究

安 時 榮

Calculation of the Coupled Free Transverse Vibrations of  
the Multi-Supported Shaft System by Transfer Matrix Method

Ahn Siyoung

〈目 次〉	
ABSTRACT	4. 模型軸系에 의한實驗 및 計算
1. 序 論	4.1 實驗裝置
2. 多點支持軸系 聯成自由橫振動의 傳達 매트릭스 表示	4.2 測定方法
2.1 傳達매트릭스의 基礎	4.3 實驗結果
2.2 狀態傳達매트릭스	4.4 軸系裝置의 計算모델과 計算機入力值
2.3 不連續傳達매트릭스	4.5 計算結果
2.4 傳達매트릭스의 一般式과 解法	4.6 實驗值와 計算結果의 比較檢討
3. 聯成自由橫振動의 計算프로그램	5. 結 論
3.1 概 要	參考文獻
3.2 Flow chart	

## Abstract

Coupled transverse shaft vibrations have become the target of great concern in high powered ships such as container ships. Due to increasing ship's dimensions and high propulsive power, resonance frequencies of the propeller shaft system tend to decrease and can appear in some cases within the operating speed range of engine.

In this connection, the coupled free transverse vibrations of shaft system in two planes are theoretically investigated. This shaft system carries a number of discs and is flexibly supported by a number of bearings. The mass and inertia moment of disc, elasticity of shaft, mass of shaft and bearing stiffness are considered for the calculation. Transfer matrix method is applied to calculate the shaft responses in both planes.

A digital computer program is developed to calculate the shaft responses of the coupled transverse vibrations in two planes.

An experimental model shaft system is made. It is composed of disc, shaft, ball bearings and thrust bearings and flexible bearing supports. The shaft system is excited by an electrical magnet, and shaft vibration responses in two planes are measured with strain gage system. From these measurements, the natural frequencies of the shaft system in both planes are found out. The developed program is also used to calculate the shaft vibration responses of experimental model shaft system. From the results of these calculations, the natural frequencies of shaft system in two planes are derived.

Theoretical predictions of model shaft natural frequencies show good agreements with its experimental measurements.

## 1. 序 論

第二次大戰後 Liberty型 船舶과 기타 많은 船舶에서 推進軸系의 損傷事故가 자주 發生하였다. 이러한 推進軸系의 損傷事故와 關聯하여 研究가 進行된 結果 Panagopoulos<sup>1)</sup>는 不均一한 伴流中에서 回轉하는 推行器의 流體力學的인 作用에 의하여 推進軸系는 一回轉中 推進器翼數次 또는 그의 整數倍數次的 橫振動이 誘起되는 事實과 이의 共振現象을 指摘하였으며 推進軸系의 固有振動數를 求하는 理論的 計算式을 發表하였다. 그 후 Jasper<sup>2), 3)</sup>에 의한 一聯의 研究가 있었으며 理論的 計算式을 發表하였다. 이 式들은 船尾構造의 剛性이 充分히 크다는 前提下에 많은 假定을 包含하는 簡略化된 推進軸系 모델에 대한 略算式이었다.

近年에 와서 콘테이너船과 같은 高出力船이 나타남에 따라 推進器의 重量과 날개數가 增加하므로써 船尾構造의 剛性이 相對的으로 低下하게 되었다. 多軸船의 推進軸系는 支持剛性이 적은 스트러트나 보싱으로 支持되어 있고 船尾形狀關係로 베어링 支持間隔이 크게 되어 있다. 이러한 結果로 推進軸系의 橫振動固有振動數가 低下하게 되었으며 반면에 推進器 날개數의 增加로 因하여 推進器의 流體力學的인 作用에 의한 強制力의 翼數次 振動數가 상승하게 되었다. 따라서 翼數次的 共振回轉數가 때로는 常用回轉數까지 내려오므로써 지금까지 勸獎基準으로 하고 있는 橫振動固有振動數의 常用回轉數 125% 以上 維持가 어렵게 되었다.

近年에 와서 이와 關聯하여 推進軸系의 聯成橫振動에 큰 關心을 가지게 되었으며 많은 研究가 進行되어 왔다.

橫振動은 推進軸系의 損傷, 船尾베어링의 이상마모, 船尾管시일 事故 등의 原因이 될뿐만 아니라 船尾振動의 原因이 되기도 한다. 따라서 大出力의 大型高速船推進軸系의 設計에 있어서 推進軸系의 固有振動數를 正確히 알 必要가 있다.

이러한 問題解決을 위한 基礎研究로서 數個의 彈性베어링과 支持臺로 支持된 軸系의 聯成自由橫振動의 固有振動數를 計算하는 方法을 開發코져 한다.

多點支持軸系의 聯成自由橫振動을 傳達매트릭스法에 依하여 理論解析을 하고 이 理論解析의 內容을 바탕으로 하여 電算프로그램을 開發한다. 또 電算프로그램의 信賴性을 確認하기 위하여 模型軸

系裝置를 製作하여 이 軸系の 聯成橫振動 振動應答를 實測한다.

開發한 電算프로그램을 利用하여 模型軸系 聯成自由橫振動的 振動應答를 計算한 다음 數值計算結果와 實驗에 依한 實測值로 부터 이 軸系の 固有振動數를 求하며 이兩 서로 比較檢討함으로써 프로그램의 信賴性을 確認하고자 한다.

## 2. 多點支持軸系 聯成自由橫振動的 傳達매트릭스表示<sup>4)-10)</sup>

### 2.1 傳達매트릭스의 基礎

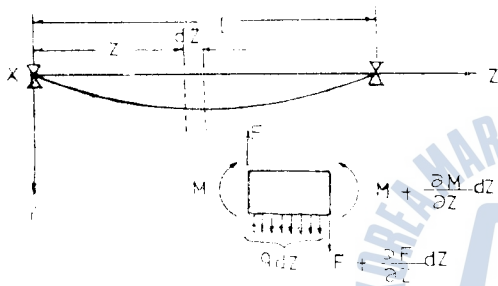


Fig. 1. Lateral vibration of shaft

Fig. 1에서와 같이 靜止하고 있는 軸에 均一分布荷重  $q$ 가 作用하는 경우 軸의 中心線에 따라  $z$ 軸을 취하고 여기에 對한 垂直方向의 變位를  $y$ 라 하면 軸의 굽힘微分方程式은

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dz^2} \right) = q \quad (1)$$

로 된다. 여기서  $E$ 는 軸材料의 縱彈性係數,  $I$ 는 軸의 斷面 2次모멘트이다.

軸의 角振動數  $\omega$ 로  $y$ 方向의 橫振動을 하는 경우  $y$ 는  $z$ 와  $t$ 의 函數로 된다. 此소부분  $dz$ 에 作用하는 慣性力은  $\gamma$ 를 軸의 單位體積當의 重量,  $A$ 를 斷面積이라 하면

$$-\left( \frac{\gamma}{g} A dz \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

로 되며 이것은 마치 靜止하고 있는 경우의 荷重  $q dz$ 와 같이 作用한다. 따라서 이것을  $q$ 와 마찬가지로 생각하여 (1)式에 代入하면

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) + \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

굽힘剛性係數  $EI$ 가 軸의 長이에 따라 變하지 않고 一定한 경우 (2)式은

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{gEI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

(2)式과 (3)式은 軸의 運動方程式이다.

지금 均一한 軸을 생각하면 (3)式은 軸의 境界條件에 關係없이 軸의 어디에서나 成立하여야 한다

$$y = Y(z)e^{i\omega t} \quad (4)$$

이라 놓고 (3)式에 代入하면

$$\frac{d^4 Y}{dz^4} - \alpha^4 Y = 0 \quad (5)$$

여기서

$$\alpha^4 = \frac{rA}{gEI} \omega^2 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \circlearrowleft \text{이며 } \rho \text{는 軸의 質量密度}$$

따라서 (5)식의 一般解는

$$Y(z) = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z} + C_3 e^{i\alpha z} + C_4 e^{-i\alpha z} \quad (6)$$

또한 上式은 다음과 같은 式으로 쓸 수 있다.

$$Y(z) = C_1 \cosh \alpha z + C_2 \sinh \alpha z + C_3 \sin \alpha z + C_4 \cos \alpha z \quad (7)$$

여기서  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 는 각 경우에 있어서의 境界條件으로부터 決定되는 常數이다.

軸의 境界條件으로부터 上記 4階微分方程式의 特別解를 구하기 위하여 (5)式을 4個의 1階 微分方程式으로 表示하면

$$\frac{d\delta}{dz} = \theta, \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{EI}, \quad \frac{dM}{dz} = -F, \quad \frac{dF}{dz} = \rho A \omega^2 \delta$$

다만, 여기서  $\delta$ 는 變位,  $\theta$ 는 軸의 回轉角,  $M$ 는 굽힘모멘트,  $F$ 는 剪斷力이다.

따라서

$$\delta_y = Y = \sum_{j=1}^4 C_j e^{\alpha_j z} \quad (8)$$

$$\theta_x = \frac{dY}{dz} = \sum_{j=1}^4 \alpha_j C_j e^{\alpha_j z} \quad (9)$$

$$M_x = EI \frac{d^2 Y}{dz^2} = EI \sum_{j=1}^4 \alpha_j^2 C_j e^{\alpha_j z} \quad (10)$$

$$F_y = -\frac{dM_x}{dz} = -\frac{d}{dz} \left( EI \frac{d^2 Y}{dz^2} \right) = -EI \sum_{j=1}^4 \alpha_j^3 C_j e^{\alpha_j z} \quad (11)$$

여기서  $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = -\alpha, \alpha_3 = i\alpha, \alpha_4 = -i\alpha$ 이며 添字  $y$ 는  $y$ 軸方向을, 添字  $x$ 는  $x$ 軸 둘레를 각각 表示하고 있다.

(8), (9) 및 (11)式들과 (10)式을 매트릭스形式으로 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\bar{S}(z) = \begin{bmatrix} \delta_y \\ \theta_x \\ F_y \\ M_x \end{bmatrix} \quad (12)$$

(12)式으로 表示되는 매트릭스  $\bar{S}(z)$ 를 狀態벡터(또는 境界벡터)라 定義한다.

또한 積分常數의 벡터  $C$ 는 다음과 같다.

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

그리고 狀態벡터를 積分常數벡터와 다음과 같이 關係지을 수 있다.

$$\bar{S}(z) = B(z)C \quad (14)$$

여기서  $B(z)$ 는 그의 要素가 軸의 特性과 振動數에 의하는 매트릭스이다.

(14)式에서  $z=0$ 이라 하면

$$\bar{S}(0) = B(0)C \quad (15)$$

(15)式的 逆매트릭스를 구하면

$$C = B(0)^{-1}\bar{S}(0) \quad (16)$$

따라서 (16)式을 (14)式에 代入하면

$$\bar{S}(z) = B(z)B(0)^{-1}\bar{S}(0) \quad (17)$$

(17)式을 軸系의 한 點에 있어서의 變數를 다른 點(여기에서는 座標原點을  $z=0$ 으로 취하였음)에 있어서의 이들 變數의 값으로 表示할 수 있음을 알 수 있다.

여기서 이 問題에 대한 傳達매트릭스를 다음과 같이 定義한다.

$$T_{z(z)} = B(z) B(0)^{-1} \quad (18)$$

따라서

$$\bar{S}(z) = T_{z(z)} \bar{S}(0) \quad (19)$$

좀더 一般化하여 原點을  $z=z_0$ 으로 취하면 傳達매트릭스는  $z$  代身에  $(z-z_0)$ 를 代入함으로서 얻을 수 있다.

$$\bar{S}(z) = T_{z(z, z_0)} \bar{S}(0) \quad (20)$$

要素의 길이를  $l$ 라 하고

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha^4}{\omega^2} = \frac{\rho A}{EI} \quad (21)$$

$$\beta = EI \quad (22)$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\bar{\alpha}\omega^2} \quad (23)$$

이라 하면 傳達매트릭스를 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$T_z(l) = \begin{pmatrix} f_3 & f_1 & -\frac{1}{\beta}f_2 & \frac{1}{\beta}f_4 \\ \alpha^4 f_2 & f_3 & -\frac{1}{\beta}f_4 & \frac{1}{\beta}f_1 \\ -\beta\alpha^4 f_1 & -\beta\alpha^4 f_4 & f_3 & -\alpha^4 f_2 \\ \beta\alpha^4 f_4 & \beta\alpha^4 f_2 & -f_1 & f_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

여기서

$$f_1(\alpha, l) = (\sinh \alpha l + \sin \alpha l) \frac{1}{2\alpha} \quad (25)$$

$$f_2(\alpha, l) = (\sinh \alpha l - \sin \alpha l) \frac{1}{2\alpha^3} \quad (26)$$

$$f_3(\alpha, l) = (\cosh \alpha l + \cos \alpha l) \frac{1}{2} \quad (27)$$

$$f_4(\alpha, l) = (\cosh \alpha l - \cos \alpha l) \frac{1}{2\alpha^2} \quad (28)$$

다음은 軸의 方向을  $z$ 軸으로 하는 水平 및 垂直面內에서 橫振動을 行하는 경우를 생각한다. 이 경우의 橫振動運動方程式을 (3)式과 같은 形인 다음 式이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4} + \frac{rA}{gEI} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^4 X}{\partial z^4} + \frac{rA}{gEI} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

各 4階微分方程式은 4個의 1階微分方程式으로 表示할 수 있으며 要素의 狀態變數는 (8)~(11)式 表示할 수 있으므로 다음의 8次매트릭스形으로 나타낼 수 있다.

狀態벡터  $\bar{S}(z)$ 를 定義하면

$$\bar{S}(z) = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \theta_y \\ \delta_y \\ \theta_x \\ F_x \\ M_y \\ F_y \\ M_x \end{pmatrix} \quad (30)$$

다만 여기서  $\delta_x$ 와  $F_x$ 는  $x$ 軸方向의 變位와 剪斷力을,  $\delta_y$ 와  $F_y$ 를  $y$ 軸方向의 變位와 剪斷力을 各各 表示하고 있으며,  $\theta_x$ 와  $M_x$ 는  $x$ 軸 둘레의 回轉角 및 굽힘모멘트를,  $\theta_y$ 와  $M_y$ 는  $y$ 軸 둘레의 回轉角 과 굽힘모멘트를 各各 表示하고 있다.

여기서 積分常數의 벡터를  $C$ 라 하고 狀態벡터  $\bar{S}(z)$ 와 關聯시키면 (14)式과 같은 形式으로 表示할 수 있으며 다음과 같다.

$$\bar{S}(z) = B(z)C \quad (31)$$

$B(z)$ 는 역시 其의 要素가 軸의 特性과 振動數에 의하는 매트릭스이다. 따라서 (15)~(17)式들에 의하여 傳達매트릭스와 狀態벡터를 (18)과 (19)式과 같은 形인 다음 式으로 表示할 수 있다.

$$T_x(z) = B(z)B(0)^{-1} \quad (32)$$

$$\bar{S}(z) = T_x(z)\bar{S}(0) \quad (33)$$

一般化하여  $z=z_0$ 를 원점으로 하여 狀態벡터를 表示하면 (20)式과 같은 形으로 나타낼 수 있다.

$$\bar{S}(z) = T_x(z, z_0)\bar{S}(z_0) \quad (34)$$

上記 傳達매트릭스  $T_x$ 의 要素들은 (25)~(28)式에 주워지는 函數들의 組合을 포함하고 있으며 이

傳達매트릭스는 한 平面内에서 橫振動하는 要素의 傳達매트릭스를 구하는 方法과 同一한 方法으로 計算할 수 있다. 따라서 一平面内의 傳達매트릭스式인 (24)式의 概念을 利用함으로써 兩平面内에서 橫振動하는 要素의 傳達매트릭스를 (30)式의 狀態벡터와 關聯하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_{z(t)} = \begin{pmatrix} f_3 & f_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta}f_2 & \frac{1}{\beta}f_4 & 0 & 0 \\ \alpha^4 f_4 & f_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta}f_4 & \frac{1}{\beta}f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & f_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta}f_2 & \frac{1}{\beta}f_4 \\ 0 & 0 & \alpha^4 f_2 & f_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta}f_4 & \frac{1}{\beta}f_1 \\ -\beta\alpha^4 f_1 & -\beta\alpha^4 f_4 & 0 & 0 & f_3 & -\alpha^4 f_2 & 0 & 0 \\ \beta\alpha^4 f_4 & \beta\alpha^4 f_2 & 0 & 0 & -f_1 & f_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\alpha^4 f_1 & -\beta\alpha^4 f_4 & 0 & 0 & f_3 & -\alpha^4 f_2 \\ 0 & 0 & \beta\alpha^4 f_4 & \beta\alpha^4 f_2 & 0 & 0 & -f_1 & f_3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

### 2.2 狀態傳達매트릭스

水平平面内와 垂直平面内에서 橫振動을 行하는 軸의 振動問題에서는 兩端 各各 8個, 合計 16個의 狀態變數中 各各 4個, 合計 8個는 알 수 있다.

$z=z_0$ 에서 始作하여  $z=z_1$ 에서 끝나는 軸의 나머지 8個의 狀態變數의 값을 얻기 위하여 8個의 方程式이 必要하며 이들은 다음의 매트릭스方程式으로부터 얻을 수 있다.

$$S_{(z_1)} = T_{z(z_1, z_0)} S_{(z_0)} \quad (36)$$

위의 方程式은 原點에서의 狀態벡터를 다른 軸端으로 傳達하게 된다.

다음의 段階로서 Fig. 2와 같이 2個의 軸要素로 連結된 軸系를 생각해 본다. 이 경우 傳達매트릭스의 概念을 다음과 같이 확장할 수 있다.

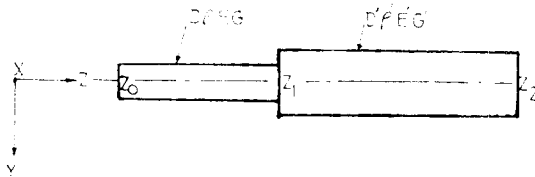


Fig. 2. Combination of two shaft segments.

은 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{S}(z) = T_z^{(1)}(z, z_0) \bar{S}(z_0) \quad (37)$$

狀態變數는  $z=z_1$ 에서 連續이어야 하며 따라서  $z \geq z_1$ 과 같은 任意的  $z$ 에 대하여 다음과 같은 값이어야 한다.

$$\bar{S}(z) = T_z^{(2)}(z, z_1) \bar{S}(z_1) \quad (38)$$

여기서  $T_z^{(1)}(z_1, z_0)$ 는  $z=z_0$ 에서 始作하여  $z=z_1$ 에서 끝나는 軸要素 1의 傳達매트릭스이며 마찬가지로  $T_z^{(2)}(z_2, z_1)$ 은  $z=z_1$ 에서 始作해서  $z=z_2$ 에서 끝나는 要素 2의 傳達매트릭스를 가르킨다.

要素 1에 대하여  $z_0 \leq z \leq z_1$ 의  $z$ 에 대한 式

(37)式에서  $z=z_1$ 이라 놓고 (38)式에 代入하면

$$\bar{S}(z) = T_z^{(2)}(z, z_1) T_z^{(1)}(z_1, z_0) \bar{S}(z_0) \tag{39}$$

위의 結果를  $N$ 個의 分割點을 갖는 軸系에 대하여 一般化하는 것은 簡單하다.

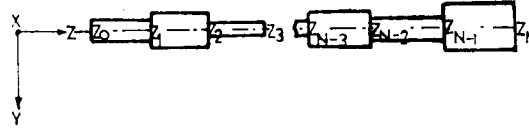


Fig. 3. Combination of  $N$  shaft segments.

Fig. 3에서와 같은 軸系에서 綜合傳達매트릭스는 (39)式과 같이 各 個別 매트릭스를 곱한 것이 된다.

$$T_z(z, z_0) = T_z^{(N)}(z, z_{N-1}) T_z^{(N-1)}(z_{N-1}, z_{N-2}) \cdots T_z^{(1)}(z_1, z_0) \tag{40}$$

이상과 같이 매트릭스의 곱셈으로 軸系의 1點으로부터 다른 任意點으로 狀態值를 移動시킬 수 있음을 알 수 있다.

### 2.3 不連續傳達매트릭스

軸系가 여러 가지 치수(또는 材料까지 다른)의 均一한 軸要素들과 圓판, 프렌지, 칼라 등으로 構成되어 荷重을 받으며 彈性支持臺上的 彈性베어링으로 支持되어 있다. 이러한 要素들의 영향 때문에 이들 不連續點 前後에서의 狀態變數中 剪斷力과 모멘트의 不連續性이 發生하게 된다.

傳達매트릭스를 利用함에 있어서는 이와 같은 要素의 영향을 不連續매트릭스로 처리할 수 있다. 이러한 不連續매트릭스의 形式을 알아보기 위하여 다음의 몇가지 경우를 檢討코져 한다.

#### (1) 彈性스프링의 영향

Fig. 4와 같이 두 개의 軸要素가 直列로 連結되고 스프링定數  $K$ 인 스프링으로 支持된 경우를 생각한다. 이 스프링으로 因한 영향은  $z=z_1$ 에서 剪斷力의 變化뿐이다. 이 점에서의 不連續傳達매트릭스를 誘導하여 본다.

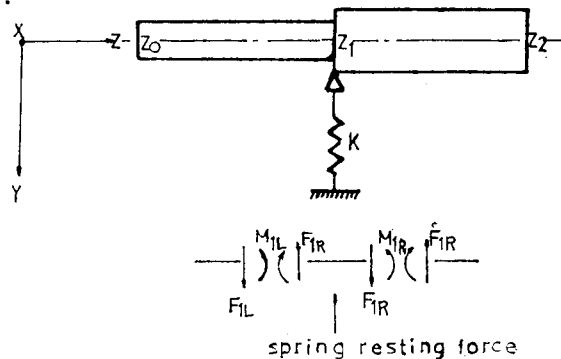


Fig. 4. Beam on elastic support.

軸이  $z=z_1$ 에서 스프링으로 支持될 경우 스프링 前後의 狀態變數들은 剪斷力의 變化를 除外하고 連續性을 維持해야 하므로 다음과 같은 式이 成立된다.



$$\left. \begin{aligned} \delta_{(z_1)R} &= \delta_{(z_1)L} \\ \theta_{(z_1)R} &= \theta_{(z_1)L} \\ F_{(z_1)R} &= F_{(z_1)L} + K\delta_{(z_1)L} \\ M_{(z_1)R} &= M_{(z_1)L} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

여기서 첨자  $L, R$ 은 不連續點의 左右를 表示한다. 또  $z=z_1$ 에서 不連續點 左右의 狀態벡터를  $\bar{S}_{(z_1)L}$ 와  $\bar{S}_{(z_1)R}$ 로 表示하면 (41)式을 다음과 같이 매트릭스形式으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \delta \\ \theta \\ F \\ M_{(z_1)R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \theta \\ F \\ M_{(z_1)L} \end{pmatrix} \quad (42)$$

또는

$$\bar{S}_{(z_1)R} = (I + \bar{K}^{(1)}) \bar{S}_{(z_1)L} = P_{(z_1)} \bar{S}_{(z_1)L} \quad (43)$$

여기서  $\bar{K}$ 는 이 點의 不連續매트릭스이며  $(I + \bar{K})$  및  $P_{(z_1)}$ 는 不連續傳達매트릭스 또는 點傳達매트릭스로서 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$(I + \bar{K}) = P_{(z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

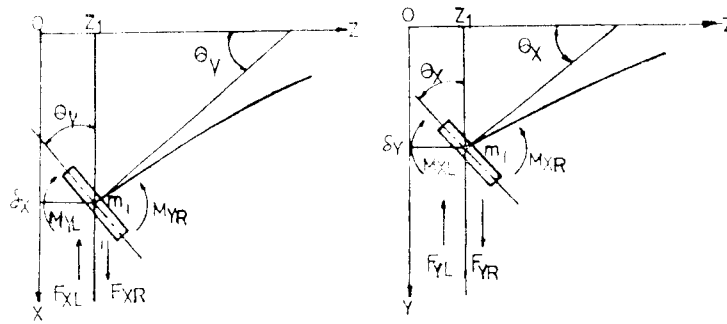
또  $P_{(z_1)}$ 은 點傳達매트릭스이며 不連續點 바로 앞의 狀態벡터를 이 매트릭스의 뒤로부터 곱하면 不連續點直後의 狀態벡터가 된다.

Fig. 4의 系에 있어  $z > z_1$ 되는 任意點에 대한 狀態벡터는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{S}_{(z)}^{(2)} = T_z^{(2)}(z, z_1) P_{(z_1)} T_z^{(1)}(z_1, z_0) \bar{S}_{(z_0)} \quad (45)$$

(2) 圓板의 影響

一端에 圓판을 갖는 多點支持軸系를 水平面과 重直面에 각각 투영하면 Fig. 5와 같이 나타낼 수 있다.



(a) Horizontal plane (b) Vertical plane

Fig. 5. Shaft with a disc.

이 원판의 변위, 회전각, 원판의 양단에 작용하는 剪斷力과 모멘트를 그림에 서와 같이 表示한다.

多點支持軸系가 角速度  $\omega$ 로 두 平面內에서 振動을 할 경우 원판의 左右端의 狀態變數間에는, 變位와 回転角은 兩端에서 連續的이어야 하고 剪斷力과 모멘트는 平衡條件으로부터 다음과 같은 式을 誘導할수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{xR} &= \delta_{xL}, \quad \theta_{yR} = \theta_{yL}, \quad \delta_{yR} = \delta_{yL}, \quad \theta_{xR} = \theta_{xL}, \\ F_{xR} &= F_{xL} - m\omega^2 \delta_{xL} \\ M_{yR} &= M_{yL} - \omega^2 I_d \theta_{yL} + i I_d \Omega \omega \theta_{xL} \\ F_{yR} &= F_{yL} - \omega^2 m \delta_{yL} \\ M_{xR} &= M_{xL} - \omega^2 I_d \theta_{xL} - i I_d \Omega \omega \theta_{yL} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

여기서  $m$ 는 원판의 質量,  $I_d$ 는 원판의 直徑에 관한 質量慣性 모멘트,  $\Omega$ 는 軸旋回의 角速度, 그리고  $\omega$ 는 軸의 強制角振動數이다. 또  $\omega^2 m \delta_{xL}$ 와  $\omega^2 m \delta_{yL}$ 는 원판의  $x$ 方向,  $y$ 方向의 慣性力을,  $\omega^2 I_d \theta_{yL}$ 와 數  $\omega^2 I_d \theta_{xL}$ 는 원판의 慣性效果로 因한 水平面內의 軸中心直角方向모멘트와, 垂直面內의 것을 각각 나타내고 있다. 또  $I_d \Omega \omega \theta_{xL}$ 와  $I_d \Omega \omega \theta_{yL}$ 는 원판의 자이로效果의 영향으로 因한 水平面과 垂直面內의 軸中心直角方向모멘트를 各各 表示한다.

Fig. 5에서와 같이  $z=z_1$ 에서 不連續點 左右端의 狀態變를 나타내는 (46)式을 (42)式과 같은 形式의 매트릭스로 나타낼 수 있으며 點傳達매트릭스  $P(z)$  또는 不連續傳達매트릭스  $(I + \bar{K})$ 는 (30)式과 관련하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(z) = (I + \bar{K}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 m & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m & 0 & i I_d \Omega \omega & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 I_d & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i I_d \Omega \omega \theta_{xL} & 0 & -\omega^2 I_d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

### (3) 多點支持軸系의 不連續傳達매트릭스

多點支持軸系가 多數의 彈性베어링으로 支持될 경우에는 一般的으로 각 베어링支持部의 左右端에서 다음과 같은 不連續性이 發生하게 된다.

1. 支持베어링의 彈性으로 因하여 剪斷力과 굽힘모멘트의 變化가 發生하게 된다.
2. 베어링支持部에서는 베어링油膜을 平行移動 및 회전에 대한 等價스프링 및 減衰로 置換하고, 또한 베어링 및 支持臺를 等價質量, 等價스프링, 等價減衰로 置換하여 생각할 수 있다. 만약 이들 베어링의 스프링 및 減衰特性이 異方性이면 水平面과 垂直面內에서 二方向相互間에 聯成作用이 있다. 더우기 베어링 油膜의 경우에는 이 聯成作用이 構造物의 스프링과 같은 相反定理가 成立하지 않아서 現象이 大端히 複雜하다.

만약 베어링의 剛性이 異方性이면 水平面과 垂直面內에서 變位와 剪斷力은 聯成하게 된다. 특히

베어링油膜의 경우에는 兩平面內에서 變位와 剪斷力은 물론 直轉角과 모멘트도 서로 聯成하게 된다

3. 軸에 圓板이 있을 경우 圓판의 慣性力으로 因하여 剪斷力과 모멘트가 變化하게 된다. 또 圓판의 차이로 効果의 영향때문에 兩平面內에서 回轉角과 모멘트가 역시 聯成하게 된다.

이러한 不連續性을 고려하고 軸要素의 狀態變數中 變位와 回轉角은 不連續點에서 連續性을 維持함을 고려하면 不連續點 前後端의 狀態變數들은 一般化하여 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{xR} &= \delta_{xL}, \quad \theta_{yR} = \theta_{yL}, \quad \delta_{yR} = \delta_{yL}, \quad \theta_{xR} = \theta_{xL} \\ F_{xR} &= (K_{51} - \omega^2 m) \delta_{xL} + K_{52} \theta_{yL} + K_{53} \delta_{yL} + K_{54} \theta_{xL} + F_{xL} \\ M_{yR} &= K_{61} \delta_{xL} + (K_{62} - \omega^2 I_d) \theta_{yL} + K_{63} \delta_{yL} + (K_{64} + i I_d \Omega \omega) \theta_{xL} + M_{yL} \\ F_{yR} &= K_{71} \delta_{xL} + K_{72} \theta_{yL} + (K_{73} - \omega^2 m) \delta_{yL} + K_{74} \theta_{xL} + F_{yL} \\ M_{xR} &= K_{81} \delta_{xL} + (K_{82} - i I_d \Omega \omega) \theta_{yL} + K_{83} \delta_{yL} + (K_{84} - \omega^2 I_d) \theta_{xL} + M_{xL} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

(48)式은 (47)式과 같은 8次 매트릭스形으로 나타낼 수 있으며 點傳達매트릭스  $P(z)$  또는 不連續傳達매트릭스  $(I+K)$ 는 (30)式과 關聯하여 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$P(z) = (I+K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{51} - \omega^2 m & K_{52} & K_{53} & K_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{61} & K_{62} - \omega^2 I_d & K_{63} & K_{64} + i I_d \Omega \omega & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} - \omega^2 m & K_{74} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ K_{81} & K_{82} - i I_d \Omega \omega & K_{83} & K_{84} - \omega^2 I_d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

다만 여기서  $K_{51}, K_{52}, K_{53}, K_{54}$ 와  $K_{61}, K_{62}, K_{63}, K_{64}$ 는 수평면내에서 直線스프링 常數와 回轉스프링 常數를 各各 나타내고 있다. 또  $K_{71}, K_{72}, K_{73}, K_{74}$ 와  $K_{81}, K_{82}, K_{83}, K_{84}$ 는 수직면내에서의 直線스프링 常數와 回轉스프링 常數를 각각 表示하고 있다. 이들 스프링 常數는 兩平面內에서의 軸의 變位, 回轉角의 變化로 因한 聯成스프링 常數를 포함하고 있다.

### 2.4 傳達매트릭스의 一般式과 解法

Fig. 6에서와 같이 左端에 不連續點을 갖는 一聯의 要素들에 대하여 (45)式을 확장해서  $n$ 번째 要素의 임의의 點  $z$ 에 대한 狀態벡터  $\bar{S}^{(n)}(z)$ 는 다음과 같이 簡單하게 쓸 수 있다.

$$\bar{S}^{(n)}(z) = T_z^{(n)}(z, z_n) P^{(n)}(z_n) T_z^{(n-1)}(z_n, z_{n-1}) \cdots \cdots \cdots T_z^{(2)}(z_2, z_2) P^{(2)}(z_2) T_z^{(1)}(z_2, z_1) P^{(1)}(z_1) \bar{S}(z_1) \quad (50)$$

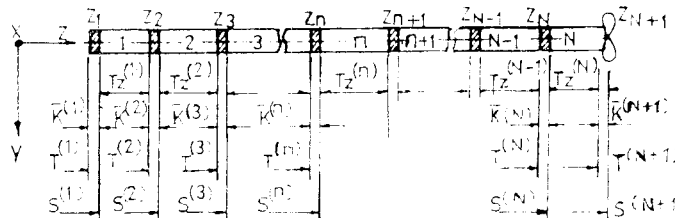


Fig. 6. Combination of N-shaft segments with discontinuities.

또 그림에서와 같이  $n$ 번째의 要素의 不連續點 左端까지의 매트릭스를 累積傳達매트릭스  $T^{(n)}$ 라 定義하고 不連續點右端까지의 매트릭스를 累積매트릭스  $S^{(n)}$ 라 定義하면 이들 累積傳達매트릭스를 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} S^{(n)} &= (I + \bar{K}^{(n)}) T^{(n)} \\ T^{(n+1)} &= T_z^{(n)} S^{(n)} \end{aligned} \right\} \text{여기서 } n=1, 2, 3, \dots, N \quad (51)$$

그리고 軸要素  $N$ 의 右側末端에서는 다음 式이 成立한다.

$$S^{(N+1)} = (I + \bar{K}^{(N+1)}) T^{(N+1)} \quad (52)$$

直交하는 二平面內에서 振動하는 軸系는 兩端에서 各各 8個의 狀態變數를 갖고 있으며 그 중 4個의 狀態變數는 알고 있다. 예를 들면 右側은 固定端이고 左側이 自由端인 軸系에 있어서는 右端의 境界條件은  $\delta_x = \delta_y = 0$ ,  $\theta_x = \theta_y = 0$ 이고 左端의 境界條件은  $F_x = F_y = 0$ ,  $M_x = M_y = 0$ 가 된다. 따라서 兩端에서 各各 4個의 狀態變數는 알 수 있다.  $z = z_1$ 에서 始作해서  $z = z_{(N+1)}$ 로 끝나는 軸系의 나머지 8개의 狀態變數를 알기 위해서 8個의 方程式이 必要하며 이들은 다음의 매트릭스方程式으로 부터 구할 수 있다.

$$\bar{S}_{(z_{(N+1)})} = S^{(N+1)} \bar{S}_{(z_1)} \quad (53)$$

따라서 左端  $z = z_1$ 에서의 狀態벡터  $\bar{S}_{(z_1)}$ 를 알고 있으므로 任意點의 狀態벡터는 다음式으로 부터 구할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{(z_n)L} &= T^{(n)} \bar{S}_{(z_1)} \\ \bar{S}_{(z_n)R} &= S^{(n)} \bar{S}_{(z_1)} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\bar{S}_{(z)} = T_{z(z, z_n)} S^{(n)} \bar{S}_{(z_1)} \quad (55)$$

여기서  $\bar{S}_{(z_n)L}$  및  $\bar{S}_{(z_n)R}$ 은  $n$ 번째의 軸要素의 不連續點  $\bar{K}^{(n)}$ 左端 및 右端의 狀態벡터를 나타내고 있다.

以上과 같이 多數의 軸要素와 不連續點을 가진 軸系의 固有振動數를 求하기 위해서는 單位크기의 起振力 또는 起振모멘트를 軸의 一端에 加하고 任意點에 있어서의 이에 대한 應答(變位, 傾斜角, 剪斷力, 모멘트)을 電子計算機를 利用하여 計算한다. 一定範圍의 振動數에 대해서 이러한 計算을 행하면 共振이 일어나는 振動數가 固有振動數가 된다.

### 3. 聯成自由橫振動的 電算프로그램

#### 3.1 概 要

지금까지의 傳達매트릭스法에 의한 理論解析을 바탕으로 作成된 FORTRAN 프로그램에 要求되는 入力資料는 軸要素의 個數, 強制振動數의 範圍와 增加量, 軸系의 境界條件, 그리고 各 要素에 대한 物理的 特性值들이다. 이들 중 各 要素에 대한 入力資料에는 不連續點에서의 회전원판 質量과 慣性모멘트, 베어링支持部의 特性值들이 포함되며 軸要素에 대한 資料는 要素의 길이와 직경, 軸材料의 縱彈性係數 및 密度 등이다.

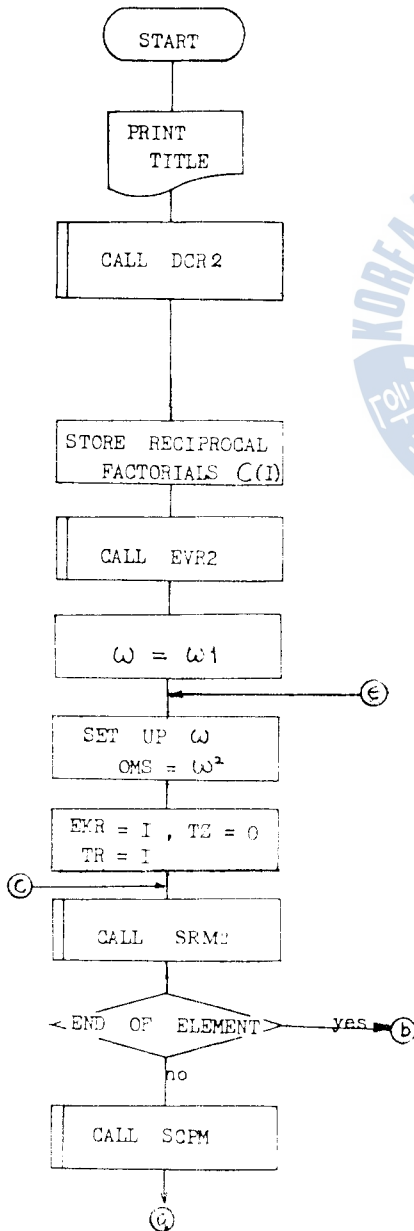
이들 入力值를 使用하여 不連續매트릭스  $\bar{K}^{(n)}$  및 傳達매트릭스  $S^{(n)} = (I + \bar{K}^{(n)}) T^{(n)}$ 를 計算하고 傳達매트릭스  $T_z^{(n)}$ 를 計算하여 累積傳達매트릭스  $T^{(n)} = T_z^{(n)} S^{(n)}$ 를 計算한다. 이들 累積매트릭스로

부터, 軸系의 境界條件을 주어서, 聯立方程式을 풀므로서 兩端의 未知數를 구하고, 나아가서 各 振動數에 대한 임의의 狀態量( $\delta, \theta, M, F$ )이 구해지므로 軸系 各部의 應答을 얻을 수 있다.

出力은 強制力의 振動數 範圍內에서 入力資料에 부여된 增加量에 따라 順次的으로 振動數를 增加시키면서 各 振動數에서 베어링部軸의 振動應答(變位, 回轉角, 剪斷力, 굽힘모멘트)을 인쇄하게 된다.

3-2 Flow chart

MAIN PROGRAM



DCR2 : 軸要素의 個數, 強制角振動數의 計算範圍와 增加量, 軸의 旋回 回轉數( $\Omega$ ), 強制振動數( $\omega$ )와 軸旋回回轉數와의 比( $\omega/\Omega$ ) 등의 一般的 入力資料에 관한 subroutine

$C(I)$ : 逆階乘  $\frac{1}{I!}$

EVR2 : 軸系境界條件과 軸要素의 資料를 入力하고 剛性係數  $\beta$ 와  $\bar{\alpha} = \frac{\rho A}{EI}$ 를 計算하는 subroutine

$\omega_1$  : 強制振動數의 下限值

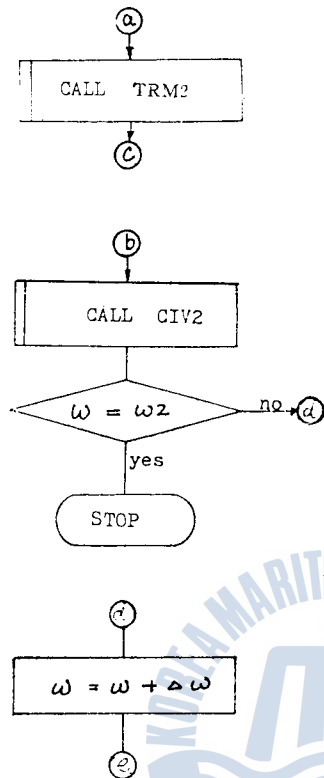
EKR :  $(I + \bar{K})$  不連續傳達매트릭스

TZ :  $n$ 번째 軸要素의 傳達매트릭스  $T_z^{(n)}$

TR :  $n$ 번째 軸要素의 累積傳達매트릭스  $T^{(n)}$

SRM2 : 不連續매트릭스  $\bar{K}$ 를 構成하고 累積매트릭스  $S^{(n)} = (I + \bar{K}) T^{(n)}$ 를 計算하는 subroutine

SCPM : 傳達매트릭스  $T_z$ 의 要素  $f_1, f_2, f_3, f_4$ 를 計算하는 subroutine



TRM2 :  $n$ 번째 要素의 傳達매트릭스  $T_i^{(n)}$ 를 構成하고 累積傳達매트릭스  $T^{(n)}=T_i^{(n)}S^{(n)}$ 를 計算하는 subroutine

CIV2 : 매트릭스들로부터 狀態變數  $\delta, \theta, M, F$ 를 計算하고 이것을 出力시키는 subroutine

$\omega_2$  : 強制振動數의 上限值

$\Delta\omega$  : 強制振動數의 增加分

#### 4. 模型軸系에 의한 實驗 및 計算

앞서 檢討한 理論的 內容을 確認하기 위하여 模型軸을 製作하여 이에 대한 實測과 理論的 計算을 行하였다.

##### 4.1 實驗裝置

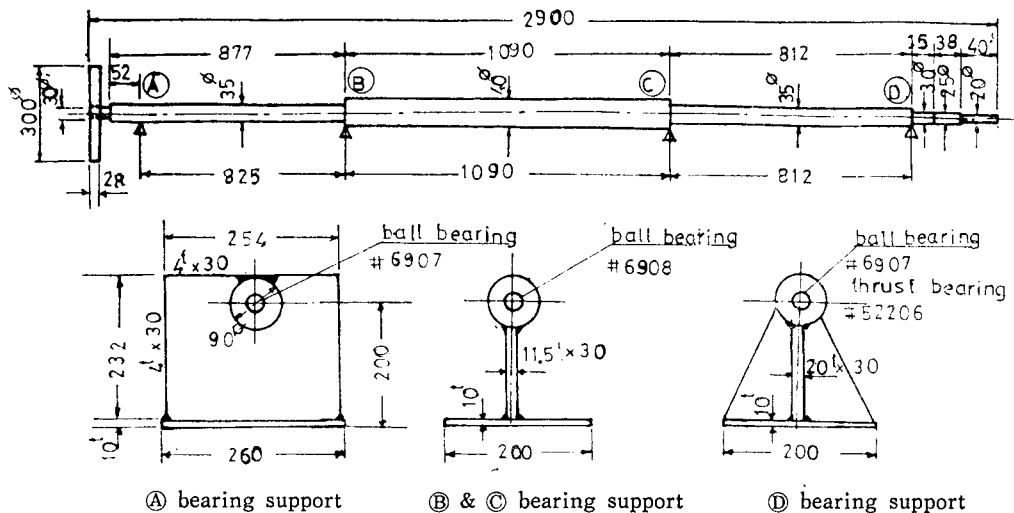


Fig. 7. Shaft arrangement of experimental apparatus

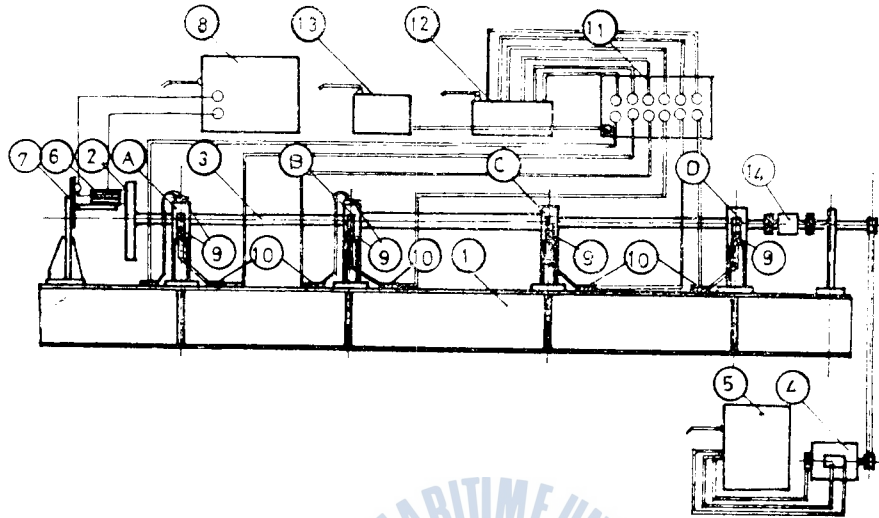


Fig. 8. General arrangement of experimental apparatus

Fig. 7, Fig. 8 및 Fig. 9는 實驗裝置의 設計圖, 一般配置圖 및 사진을 보여주고 있다.

軸系는 圓盤, 軸, 볼베어링, 스프라스트베어링, 베어링케이싱 및 베어링支持臺로 構成되어 있다.

軸은 軟鋼材로, 圓盤과 支持臺는 軟鋼鐵板으로, 베어링케이싱은 鍛鋼으로 되어 있으며 베어링은 ㉠部에서는 #6907, ㉡ & ㉢部에서는 #6908, ㉣部에서는 #6907 및 #52206으로 되어 있다.

軸系裝置는 剛性이 높도록 設計된 鋼板製臺(두께 15mm) ㉠上에 設置되어 있다. 回轉軸 ㉢은 ㉠, ㉡, C, D 4개의 베어링部로 支持되어 있으며 베어링部는 볼베어링 (D部는 스프라스트베어링이 追加 設置되어 있다)과 支持臺로 되어 있다.

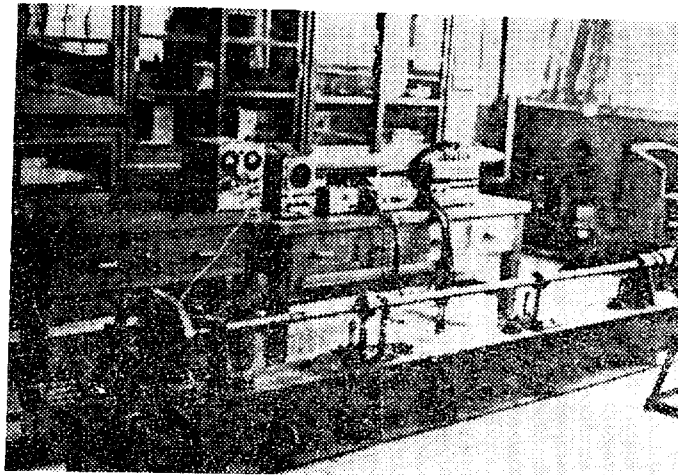


Fig. 9. photo of experimental apparatus



④베어링부는 '水平方向과 垂直方向의 스프링常數  $K$ 가 서로 相異한 支持台( $K_H=47.16\text{kg/cm}$ ,  $K_V=425.53\text{kg/cm}$ )로, ⑤와 ⑥베어링부는 水平方向의 剛性이  $K_H=375\text{kg/cm}$ , 垂直方向의 剛性이 大端히 큰 支持台로, ⑦ 베어링부는 充分히 頑強한 支持台로 各各 支持되어 있다.

左端에 鋼材圓板②가 取付된 回轉軸③은 모터速度制御器⑤(延電特殊機器)와 直流電動機④(延電特殊機器)에 의하여 右端의 토오크미터⑩와 풀리를 거쳐 變速되어 驅動된다.

圓板②에 起振모멘트를 주기 위하여 電磁石⑥을 磁石支持台⑦上에 設置하며 起振모멘트의 크기와 周波數는 振動發生器⑧에 의하여 調整한다.

各 베어링부의 軸振動應答를 實測하기 위하여 各 베어링부에 스트레인 게이지⑨(日本 共和電業社, KC-10-AI-11)를 附着시키고 이 스트레인 게이지를 結線하는 브릿지헤드⑩은 動的 스트레인 增幅器⑪(日本, 共和電業社, DPE-6E)에 連結되며, 動的 스트레인 增幅器의 出力은 直記式 電磁오실로그래프⑫(日本, 共和電業社, RAPET, RMS-11 FPT)를 통하여 記錄토록 한다. 그리고 정전압기⑬(日本, 共和電業社, DPE-10 H)는 動的 스트레인 增幅器⑪에 結線된다.

#### 4.2 測定方法

Fig. 10에서와 같이 ④와 ⑤ 베어링부에서는 水平 및 垂直方向의 軸振動應答를 計測하도록, ⑥와 ⑦ 베어링부에서는 水平方向의 振動應答를 計測할 수 있도록 스트레인 게이지를 附着시킨다.

첫번째 實驗으로서 軸이 静止하고 있는 狀態에서 다음과 같이 實驗을 行한다. 支持台⑦을 調整하여 電磁石⑥을 軸中心直角, 水平方向인 圓판의 右側에 設置한다. 振動發生器⑧을 調整하여 角振動數가 다른 軸中心直角 둘레의 起振모멘트를 順次로 圓판에 作用시킨다. 이러한 起振모멘트로 인한 각 베어링부 軸의 水平方向 振動應答를 直記式 電磁오실로그래프에 記錄하면서 共振點을 찾는다. 다음에 支持台⑦을 調整하여 電磁石⑥을 軸中心直角, 垂直方向인 圓판의 上部에 設置하여 위에서와 같은 方法으로 圓판에 起振모멘트를 주고 그 軸의 垂直方向橫振動應答를 記錄하면서 共振點을 찾는다

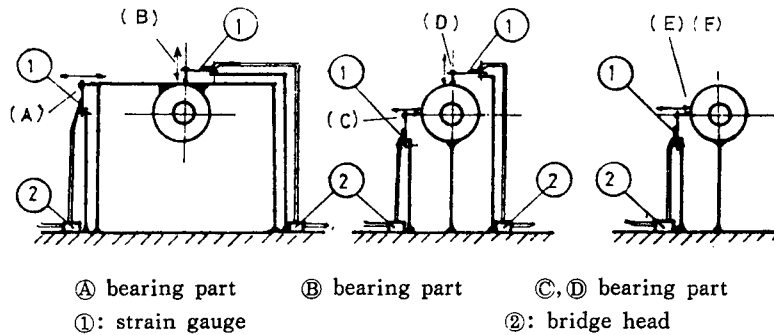


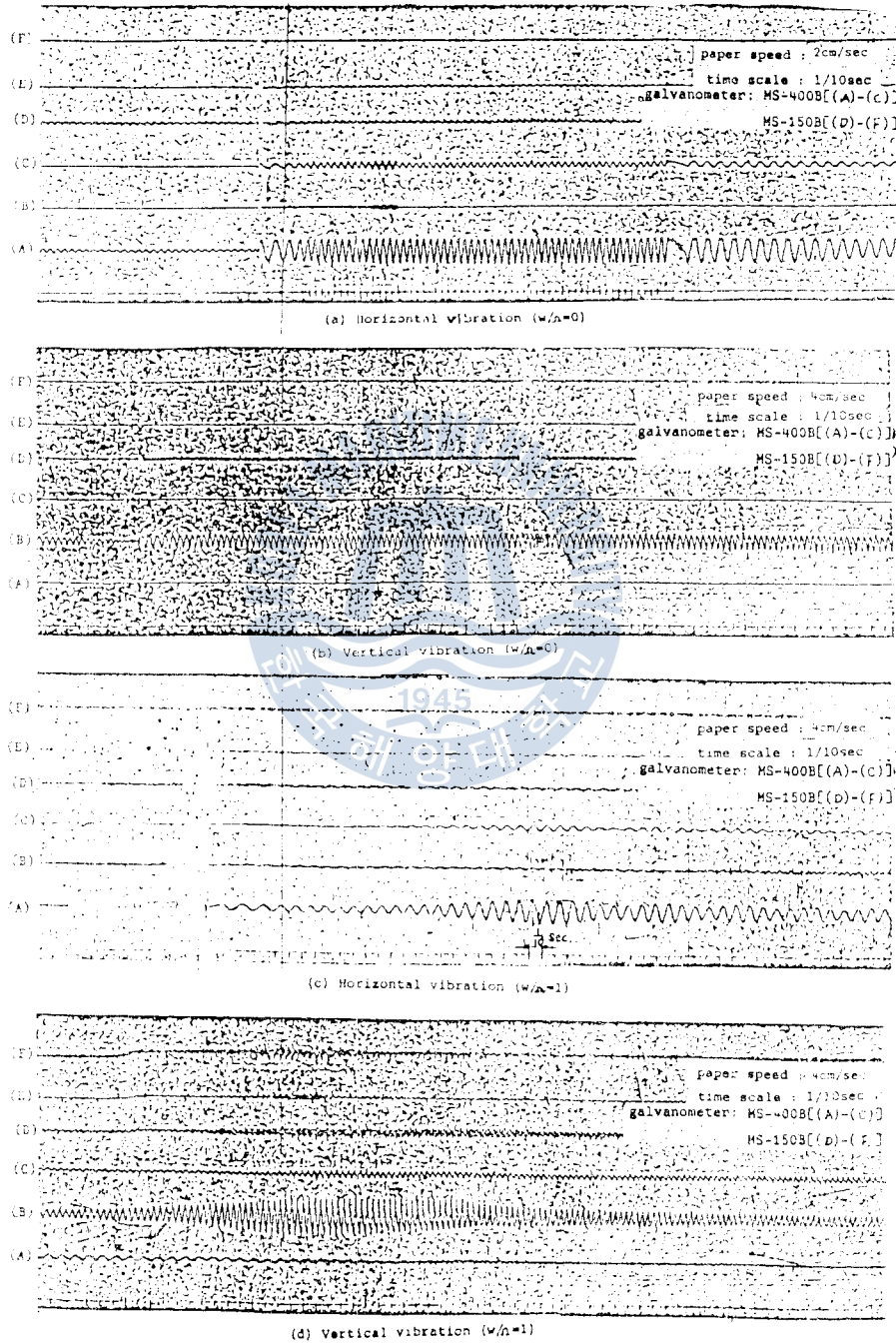
Fig. 10. Arrangement of strain gauge for each bearing support

두 번째 實驗으로서 軸이 回轉하고 있는 狀態에서 實驗을 行한다. 모터速度制御器⑤를 調整하여 軸의 回轉數를 서서히 增加시킨다. 軸의 回轉數에 따라 軸의 水平方向 및 垂直方向 一次橫振動의 應答를 直記式 電磁오실로그래프로 記錄하면서 兩方向의 一次橫振動 共振點을 찾아낸다.



4.3 實驗結果

Fig. 11은 共振點부분에서 記錄된 각 피아링部의 軸橫振動 應答를 나타내고 있다.



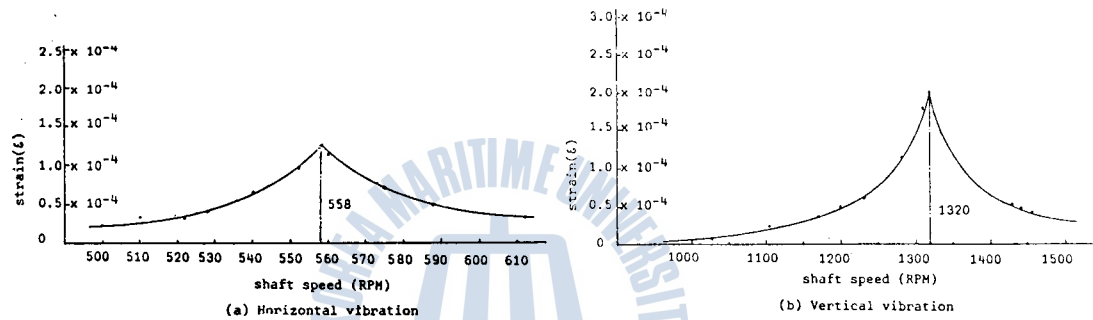
each of (A)-(F) waves was measured at the points as indicated in Fig.10

Fig 11. The waves of phenomena measured and recorded with an electromagnetic oscillograph

그림(a)와 (b)는 軸이 静止하고 있는 狀態에 있어서의 軸의 水平方向 및 垂直方向 橫振動應答를 각각 보여주고 있다. 이 記錄으로부터 軸系의 水平方向 橫振動 共振點은 558cpm이며, 垂直方向 橫振動 共振點은 1320cpm임을 알 수 있다.

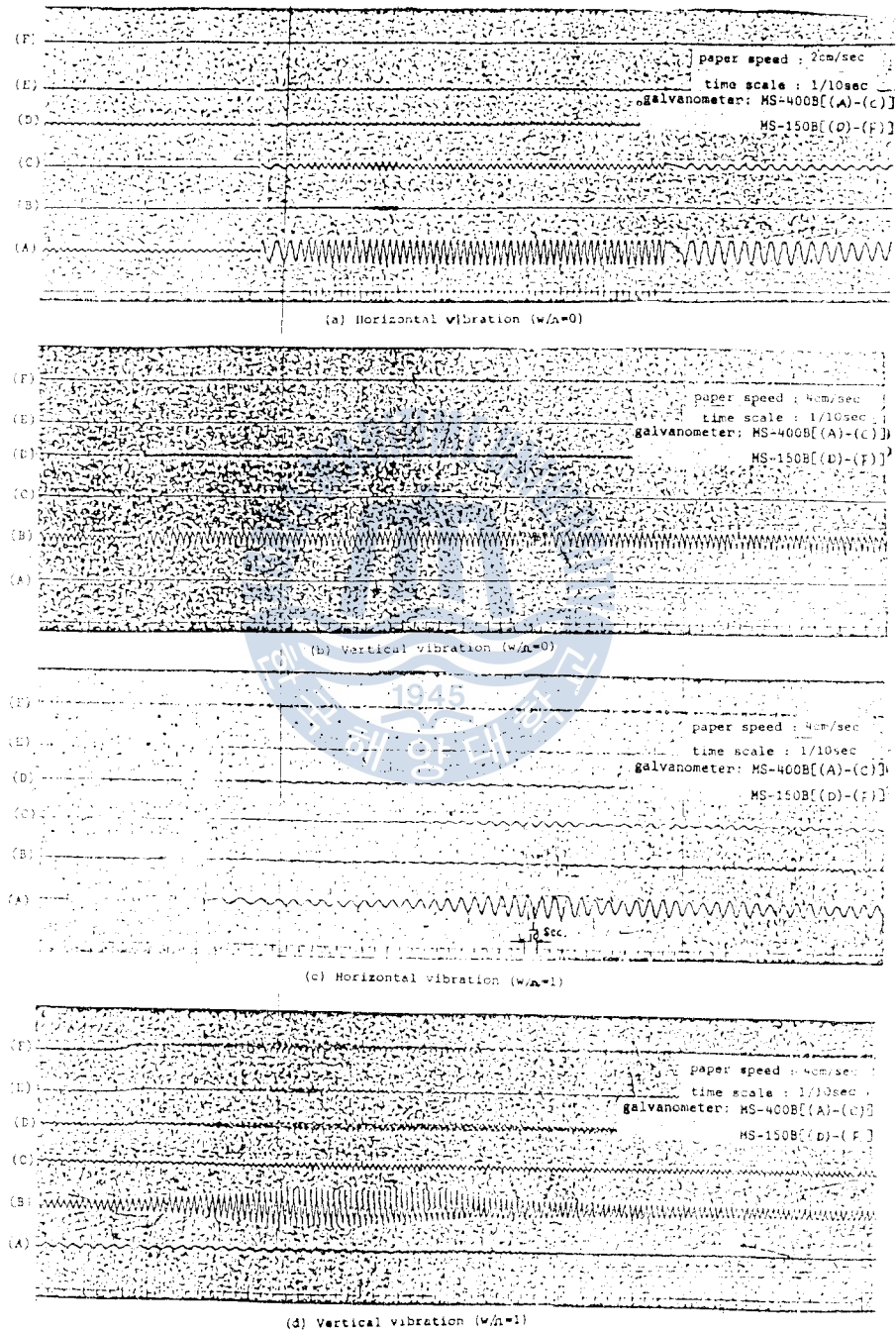
또한 그림 (c)와 (d)는 軸이 回轉하고 있는 狀態에 있어서의 兩方向 振動應答를 각각 나타내고 있다. 이 記錄으로부터 軸系의 水平方向 橫振動 共振點은 558cpm이고 垂直方向 橫振動 共振點은 1320cpm임을 알 수 있다.

Fig. 12는 各 回轉數에 대해서 直記式 電磁오실로그래프를 통하여 記錄된 (A)베어링部軸의 振動應答를 보여주고 있다.



4.3 實驗結果

Fig. 11은 共振點부근에서 記錄된 각 비아링部의 軸橫振動 應答를 나타내고 있다.



each of (A)-(F) waves was measured at the points as indicated in Fig.10

Fig 11. The waves of phenomena measured and recorded with an electromagnetic oscillograph

그림(a)와 (b)는 軸이 靜止하고 있는 狀態에 있어서의 軸의 水平方向 및 垂直方向 橫振動應答를 각각 보여주고 있다. 이 記錄으로부터 軸系의 水平方向 橫振動 共振點은 558cpm이며, 垂直方向 橫振動 共振點은 1320cpm임을 알 수 있다.

또한 그림 (c)와 (d)는 軸이 回轉하고 있는 狀態에 있어서의 兩方向 振動應答를 각각 나타내고 있다. 이 記錄으로부터 軸系의 水平方向 橫振動 共振點은 558cpm이고 垂直方向 橫振動 共振點은 1320cpm임을 알 수 있다.

Fig. 12는 各 回轉數에 대해서 直記式 電磁오실로그래프를 통하여 記錄된 (A)베어링部軸의 振動應答를 보여주고 있다.

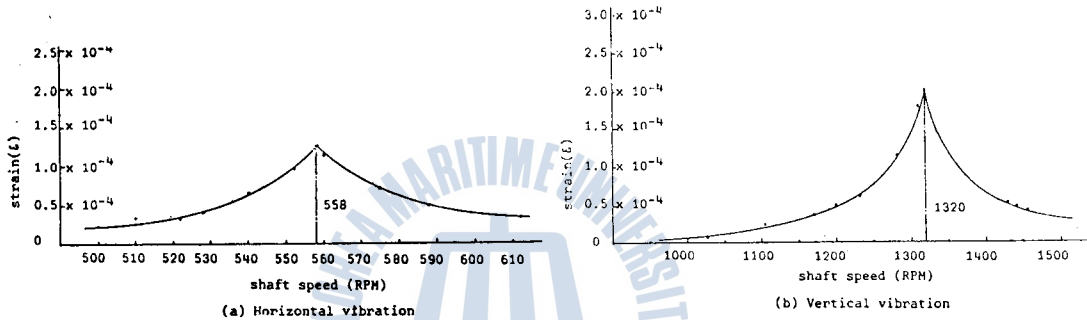


Fig. 12. Shaft response of experimental apparatus

그림(a)는 水平方向 橫振動의 경우이며 그림(b)는 垂直方向 橫振動의 경우이다.

위의 計測結果에서 보는 바와 같이 靜止狀態의 共振點과 一次共振點(回轉狀態)間에는 거의 差異를 發見할 수가 없었으며 이는 이 計測範圍에서 자이로效果가 微微한 때문에 생각된다.

#### 4.4 軸系裝置의 計算모델과 計算機入力

電子計算機 數值計算을 위한 軸系의 計算모델은 Fig.13에서와 같다.

이 軸系는 베어링間의 間隔과 軸의 크기에 따라 圓판으로부터 推力 베어링까지의 사이를 5分割하였다. 또 각 베어링은 軸과 같이 回轉하므로 各 베어링部의 油膜剛性은 大端히 큰 것으로 간주하여

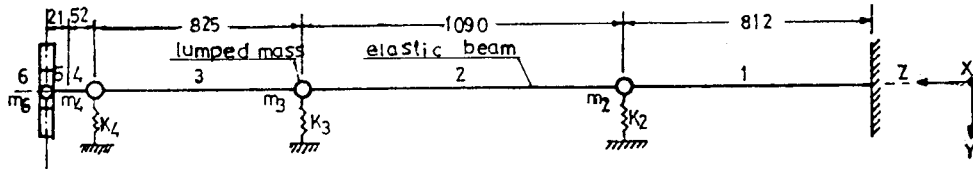


Fig. 13. Calculation model of shafting system

計算機入力值로서는 無視하였다. 베어링支持 케이싱에 대해서는 이것을 集中質量으로 보고 計算하고 圓판에 대해서는 集中質量과 質量慣性모멘트를 구하여 이것들을 入力值로 하였다. 또 베어링 支持 臺에 대해서는 理論値와 實測値 K를 각각 구하여 이것들을 入力值로 다루었다.

表 1은 軸系의 치수, 集中質量 및 直徑둘레 慣性모멘트값들을 나타내고 있으며 表 2는 베어링

持台 스프링常數 K의 理論値와 實測値를 表示하고 있다.

表 1. 軸系의 치수, 集中質量 및 直徑 둘레慣性모멘트

名	稱	直徑×길이(cm)	集 中 質 量(kg cm <sup>-1</sup> sec <sup>2</sup> )	慣性모멘트 (kg cm sec <sup>2</sup> )	
軸	要 素 1	3.5 <sup>ø</sup> ×81.2	m <sub>1</sub>	0	
"	2	4.0 <sup>ø</sup> ×109.0	m <sub>2</sub>	0.0010714	
"	3	3.5 <sup>ø</sup> ×82.5	m <sub>3</sub>	0.0010714	
"	4	3.5 <sup>ø</sup> ×5.2	m <sub>4</sub>	0.0012244	
"	5	3.0 <sup>ø</sup> ×2.1	m <sub>5</sub>	0	
圓	板	30 <sup>ø</sup> ×2.8	m <sub>6</sub>	0.015612	
				I <sub>d1</sub>	0
				I <sub>d2</sub>	0
				I <sub>d3</sub>	0
				I <sub>d4</sub>	0
				I <sub>d5</sub>	0
				I <sub>d6</sub>	0.87817

軸材料의 縱彈性係數 E는 2.1×10<sup>6</sup>(kg/cm<sup>2</sup>), 軸의 單位體積當質量 ρ는 8.0102×10<sup>-8</sup>(kgsec<sup>2</sup>/cm<sup>4</sup>)로 취하였으며 上記表에 提示하지 않은 資用은 圖面으로 주워진 값에 의하여 計算機가 計算하도록 프로그래밍 하였다.

表 2. 베어링支持部의 스프링常數

位置 分類	計算方法	K <sub>2</sub> (kg cm <sup>-1</sup> )		K <sub>3</sub> (kg cm <sup>-1</sup> )		K <sub>4</sub> (kg cm <sup>-1</sup> )	
		理 論 値	實 測 値	理 論 値	實 測 値	理 論 値	實 測 値
水平方向(K <sub>H</sub> )		353.9	375.0	353.9	375.0	44.14	47.16
垂直方向(K <sub>V</sub> )		455.700	(476.200)	455.700	(476.200)	404.9	425.5

다만 ( )안의 値는 推定値임.

#### 4.5 計算結果

計算範圍를 水平方向 橫振動에 대해서는 角速度 ω=55 rad/sec로부터 65 rad/sec까지, 그리고 垂直方向 橫振動에 대해서는 ω=134 rad/sec로부터 145 rad/sec까지의 範圍에서 每 0.5 rad/sec씩 增加하면서 各 베어링部의 軸振幅을 計算하였다. 計算은 軸이 静止하고 있을 경우(ω/Ω=0인 경우)와 軸이 回轉하고 있을 경우(ω/Ω=1인 경우)로 나누어 行하였다. 最左端 베어링部 軸의 水平方向 및 垂直方向 橫振動의 單位起振모멘트當振幅은 Fig. 14와 같으며 이 曲線으로부터 求한 軸系의 共振角振動數와 振動數는 表 3과 같다.

表 3. 軸系의 理論的 計算에 의한 固有橫振動數

計算方法	分 類 振 動 數	水 平 方 向 振 動		垂 直 方 向 振 動	
		角 振 動 數 (rad/sec)	振 動 數 (cpm)	角 振 動 數 (rad/sec)	振 動 數 (cpm)
理 論 値 K 에 依 한 計 算		57.7	551.3	138.5	1323.2
實 測 値 K 에 依 한 計 算		59.0	563.7	141.5	1351.9

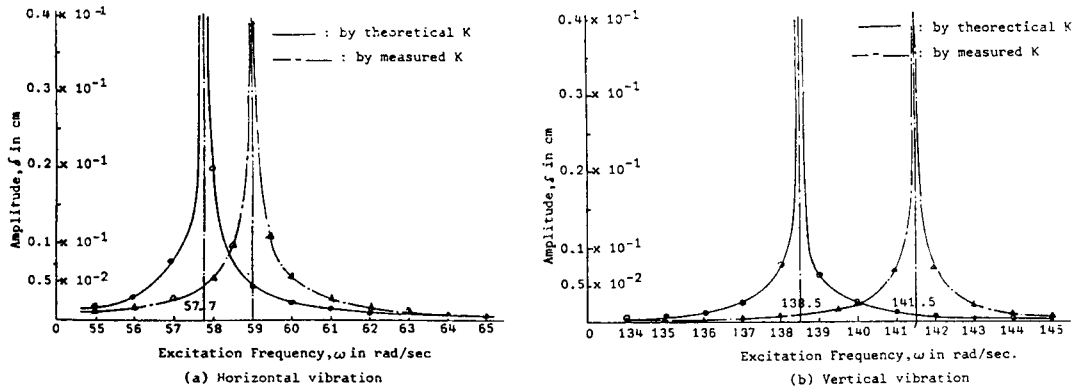


Fig. 14. Theoretical shaft amplitude of experimental apparatus

4.6 實測值와 計算結果의 比較檢討

實驗裝置를 통한 軸系 固有振動數의 實測值와 電子計算機에 의한 軸系 固有振動數計算結果는 表 4와 같다.

表 4. 軸系 固有振動數의 比較

計算方法	分類 振動數	水平方向振動			垂直方向振動		
		角振動數 (rad/sec)	振動數 (cpm)	A에 대한 差의 比 (%)	角振動數 (rad/sec)	振動數 (cpm)	A에 대한 差의 比 (%)
實驗裝置에 의한 값	A	58.4	558		138.2	1320	
理論值K에 의한 計算	B	57.7	551.3	-1.2	138.5	1323.2	+0.2
實測值K에 의한 計算	C	59.0	563.7	+1.0	141.5	1351.9	+2.4

水平方向橫振動에 대해서는, 實測值558 cpm에 비해서 理論值 K에 의한 計算結果는 551.3 cpm가 되어 -1.2% 적게 나타났으며, 實驗值 K에 의한 計算結果는 563.7 cpm가 되어 +1.0% 높게 나타났다. 또한 垂直方向 橫振動에 대해서는, 實測值 1320 cpm에 비해서 理論值 K에 의한 計算結果는 1323.2 cpm로 되어 +0.2% 높게 나타났으며, 實測值 K에 의한 計算結果는 1351.9 cpm가 되어 +2.4% 높게 나타났다. 따라서 理論值 K에 의한 計算結果는 實測值와 잘 一致하고 있음을 確認할 수 있었다.

5. 結 論

本 研究에서는 推進軸系의 聯成自由橫振動과 關聯하여 多點支持軸系의 聯成自由橫振動 動的 學動을 傳達매트릭스法에 의하여 理論的으로 解析하고 이러한 理論을 바탕으로 하여 電算프로그램을 開



發하였다. 이 프로그램의 信頼性을 確認하기 위하여 模型多點支持軸系の 實驗裝置를 製作하였으며 이 模型軸系에 대한 實驗을 行하여 軸系の 振動應答를 實測하였다. 또한 電算프로그램을 利用하여 模型軸系の 振動應答를 計算하여 實測値와 比較檢討하였다.

以上の 結果를 要約하면 다음과 같다.

1) 多點支持軸系の 振動解析을 傳達매트릭스법에 의하여 行하였으며 이것을 바탕으로 하여 프로그램을 開發하였다. 計算에서는 各 葉아링의 特性과 強制振動數 및 軸旋回 回轉數와의 比를 고려하였다.

2) 模型軸系の 實驗裝置에 의한 實測値와 計算結果는 잘 一致하였다. 따라서 上記의 電算프로그램은 多點支持軸系の 聯成自由橫振動解析에 도움이 될 수 있을 것이다.

3) 위의 計算結果와 實驗結果에서 보는 바와 같이 静止狀態의 共振點과 一次共振點(回轉狀態)間에는 甚의 차이를 發見할 수가 없었으며 이는 計算 및 計測範圍에서 자이로效果가 미미한 原因으로 生覺된다. 앞으로 模型軸系에 대해서 推進器軸系에서와 같이 高次橫振動에 대한 實驗을 行하여 자이로效果의 影響으로 因한 軸系の 高次固有振動數의 變化를 確認할 必要가 있다.

### 參 考 文 獻

1. Paragopoulos E., "Design Stage Calculation of Torsional, Axial, and Lateral Vibration of Marine Shafting", SNAME, Vol. 58, 1950, pp. 329~384.
2. Jasper N.H. and Rupp L.A., "An Experimental and Theoretical Investigation of Propeller Shaft Failures", SNAME, Vol. 60, 1952, pp. 314~381.
3. Jasper N.H., "A Theoretical Approach to the Problem of Critical Whirling Speeds of Shaft-Disk Systems", DTMB Report 827, 1954/12.
4. Pestel E.C. and Lecki F.A., "Matrix Methods in Elastomechanic", McGraw-Hill Book Co., New York, 1963,
5. J.P. Den Hartog., "Mechanical Vibrations", McGraw-Hill Book Co., New York, 1956.
6. 全孝重·金喜徹·, "船舶推進軸系の 橫振動計算에 관한 研究", 韓國船用機關學會誌 第三卷 1號, 1979, pp. 2~18.
7. Vassilopoulos L. and Bradshaw R., ISP, Vol. 21, No. 239, 1974, pp. 193~219.
8. Koike H. and et al., "Evaluation of Lateral Vibration in Marine Shaft System", Journal of MESJ, Vol. 11, No. 5, 1976, pp. 376~384.
9. Hori Y and et al, "Lateral Vibrations of Propeller Shaft Systems", Journal of MESJ, Vol. 13, No. 4, 1978, pp. 307~312.
10. 日本海事協會, "船舶振動設計指針", 1981, pp. 202~231.

# 空氣式調速機가 採用된 디젤機關의 헌팅에 關한 研究

吳 君 燮

A Study on the Hunting of the Diesel Engine  
with a Pneumatic Governor



〈目 次〉

Abstract  
Nomenclature

1. 緒 論
2. 調速機系統의 理論
  - 2·1 벤츄리部の 解析
  - 2·2 負壓파이프의 解析
  - 2·3 調速機의 解析
  - 2·4 機關軸系의 解析
  - 2·5 綜合 速度制御系
  - 2·6 制御系의 安定理論
3. 實驗 및 數值計算
  - 3·1 實驗裝置의 構成 및 諸元
  - 3·2 實驗方法
  - 3·3 實驗結果
  - 3·4 數值計算
4. 結果 및 考察
5. 結 論

參考文獻  
附 錄