

有限幅厚板캔티레버의 變位解析

張 志 演

Analysis of the Deflection of Finite Width, Thick Plate Cantilever

Jee Yon Jang

目	次
1. 緒 言	3.2 數值解析을 위한 要素의 分割法
2. 變位假定法에 의한 有限要素法의 定式化	3.3 解析値의 收束性 判定
2.1 定式化	3.4 測定面全體의 變形의 傾向
2.2 要素의 선택	3.5 荷重作用點直下에 있어서의 變位
2.3 數值計算 프로그램	3.6 荷重作用點의 沈下에 의한 變位
3. 實驗値와 解析値의 비교	4. 結 言
3.1 實 驗	

Abstract

To analyze the theoretical strength of gear tooth or turbine blade and modify its profile, it is indispensable to know its deflection induced by concentrated load or distributed load. But for geometrically intricate shape, such as bevel or hypoid gear tooth or turbine blade, it is impossible to analyze its deflection theoretically or by relaxation method.

On this paper, the distribution of deflection is analyzed by numerically analyzing method, namely, finite element method. And the propriety of this analysis is verified by comparing experimental results with numerically calculating results.

I. 緒 言

直交軸齒車 및 터빈 블레이드의 動的特性을 解析하기 위하여, 혹은 齒形修整, 크라우닝등을 합리적으로 遂行하기 위하여서는 各 齒 혹은 블레이드의 理論的 強度를 먼저 알아야 한다. 그러나 이들 齒 혹은 블레이드의 強度에 관한 연구, 즉 齒面 또는 블레이드面의 全體에 걸친 荷重分布, 變位分布, 應力分布 및 形修整에 관한 연구는 최근에 들어서야 行해지고 있다. 그 주된 이유로서는 下記의 두가지 점을 들 수 있다.

첫째, 上記의 齒 혹은 블레이드의 경우 幾何學的 解析이 극히 어려워 최근까지 幾何學的 形狀이 究明되어 있지 않은 점이다.^{1), 2)}

둘째는, 上記의 各 解析을 위해서는 첫단계로서 齒 혹은 블레이드의 임의의 一點에 集中荷重이 作用할 경우의 全面에 있어서의 變位分布를 알아야 할 필요가 있으나, 上記의 齒 혹은 블레이드의

경우는 斷面이 3軸方向으로 전부 변화하기 때문에 彈性學上의 板 혹은 캔티레버의 문제 취급으로서는 理論解析 혹은 數値解析이 불가능하다는 점이다.

斷面이 일정한 無限幅의 薄板의 캔티레버의 自由端에 集中荷重이 作用하는 경우에 대해서는 C.M. MacGregor가, 荷重點이 自由端의 내부에 있을 경우에 대해서는 T.J. Jaramillo가 理論的 解를 구한바 있다.

또한 固定端의 영향에 대해서는 石川가 應力函數의 假定에 의해, C. Weber와 K. Banascheck는 彈性에너지法에 의해 固定端 및 基礎部의 스프링常數를 解析한 바 있다.

有限幅 厚板의 캔티레버의 경우에 대해서는 梅澤가 差分法에 의해 그 解를 구한 바 있으나³⁾ 그 解析法은 캔티레버의 幅方向의 斷面이 일정한 경우에만 適用되기 때문에 spur gear 및 herical gear의 경우에만 解析이 가능하다.

이상의 記述에서도 명백한 것처럼 上述의 解析法은 幅方向의 斷面이 일정한 캔티레버의 경우에만 適用이 가능하기 때문에 直交軸齒車의 齒 혹은 블레이드에 대해서는 適用이 불가능하다.

本論文에서는 變位解析의 첫단계로서, 直交軸齒車의 齒의 近似모델의 變位分布가 3次元彈性體理論에 의한 有限要素法에 의해 充分한 精度로써 數値解析이 가능함을 提案하고, 이 數値解析의 妥當性を 實驗에 의하여 確認했다.

本 解析方法은 近似모델이 아닌 任意的 形狀의 齒 혹은 블레이드에 대해서도 擴張解析이 가능하며, 解析對象上의 任意的 一點, 또는 任意的 複數點에 荷重이 作用할 경우, 對象物 全面的 變位分布가 구해지므로 變形의 全貌의 把握이 可能하다.

主要한 記號

- $[u]$: 要素内部의 變位の 列벡터
- $[\rho]^e$: 要素를 構成하고 있는 節點의 變位の 列벡터
- $[\rho]$: 構造物을 構成하고 있는 節點의 變位の 列벡터
- $[\epsilon]$: 要素의 스트레인의 列벡터
- $[\epsilon_0]$: 初期스트레인의 列벡터
- $[\sigma]$: 要素의 應力の 列벡터
- $[\sigma_0]$: 初期殘留應力の 列벡터
- $[p]$: 要素내의 單位體積에 作用하는 物體力의 列벡터
- $[f]^e$: 要素内の 物體力과 等價인 節點力의 列벡터
- $[F]$: 節點에 作用하는 外力의 列벡터
- $[D]$: 彈性매트릭스
- $[N]$: 形狀函數매트릭스
- $[B]$: 變位-스트레인 變換매트릭스
- $[K]^e$: 要素의 剛性매트릭스
- $[K]$: 構造物全體의 剛性매트릭스
- $[J]$: 3次元의 Jacobian行列,

各記號의 앞의 δ 는 假想的 임을 의미한다.

2. 變位假想法에 의한 有限要素法の 定式化

2.1 定式化⁴⁾

要素내부의 變位 $\{u\}$ 를 節點의 變位 $\{\rho\}^e$ 에 의해 표시하면

$$\{u\} = [N] \{\rho\}^e$$

3次元彈性體의 경우 變形條件 및 彈性法則에 의해

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\rho\}^e \dots\dots\dots (1)$$

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \dots\dots\dots (2)$$

假想變位 및 假想스트레인은

$$\delta \{u\} = [N] \delta \{\rho\}^e$$

$$\delta \{\varepsilon\} = [B] \delta \{\rho\}^e$$

* 有限要素法의 定式化는 全포텐셜에 너지 最小化의 方法에 의해서도 變分法의 定式化가 가능하다.

要素내의 應力 및 物體力에 의한 内部일 U 는

$$U = (\delta \{\rho\}^e)^T (\int [B]^T \{\sigma\} dvol - \int [N]^T \{P\} dvol)$$

節點力에 의한 外部일 W 는

$$W = (\delta \{\rho\}^e)^T (\{f\}^e + \{F\})$$

$U = W$ 로 부터

$$\begin{aligned} \{f\}^e + \{F\} &= \int [B]^T [D] [B] dvol \{\rho\}^e - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dvol \\ &\quad + \int [B]^T \{\sigma_0\} dvol - \int [N]^T \{P\} dvol \end{aligned}$$

初期스트레인 ε_0 , 初期殘留應力 σ_0 , 물체력 $\{P\}$ 및 $\{f\}^e$ 에 의한 項을 무시하면

$$\{F\} = [K]^e \{\rho\}^e$$

$$\text{단, } [K]^e = \int [B]^T [D] [B] dvol$$

任意的 要素에 관한 上記의 理論을 構造物全體에 적용하면

$$\{F\} = [K] \{\rho\}$$

$$\text{단, } [K_{ij}] = [K_{ij}]^e$$

[外力 = 剛性매트릭스 × 變位]로 表現된 上記 聯立方程式을 풀어서 解인 節點의 變位 $\{\rho\}$ 를 구한다.

2.2 要素의 선택

本研究의 경우 서론에서 서술한 바와 같이 3次元彈性體로서의 解析이 필요하다. 3次元解析의 경우 計算機의 記憶容量 및 計算時間 등에 제한이 있기 때문에 本論文에서는 비교적 적은 節點數로서 高精度의 解析이 가능한 20節點立方體要素 (Isoparametric 要素)를 使用要素로서 選擇하였다. (그림 1)

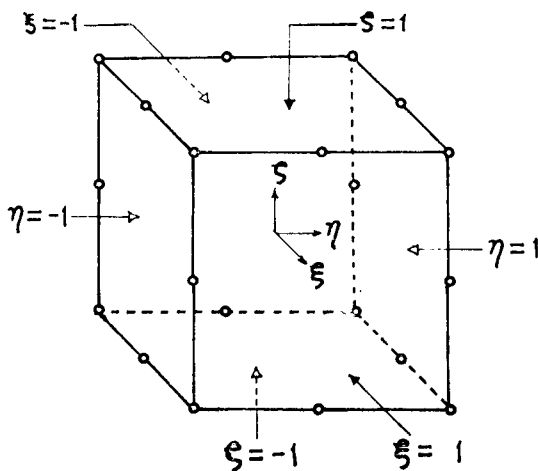


그림 1

이 要素의 경우 形狀函數 $\{N\}$ 은 다음과 같이 定義된다.

모서리의 節點에 대해서

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2)$$

邊의 中點의 節點($\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1$)에 대해서

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$$

$$\text{단, } \xi_0 = \xi_i \xi, \eta_0 = \eta_i \eta, \zeta_0 = \zeta_i \zeta$$

形狀函數 N_i 가 上式처럼 局素座標系 (ξ, η, ζ) 로써 定義될 경우 $[B]$ 의 要素 B_i 는

$$B_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & c_i \\ b_i & a_i & 0 \\ 0 & c_i & b_i \\ c_i & 0 & a_i \end{pmatrix}, \text{ 단 } \begin{aligned} a_i &= e_{11} \frac{\partial g_i}{\partial \xi} + e_{12} \frac{\partial g_i}{\partial \eta} + e_{13} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta} \\ b_i &= e_{21} \frac{\partial g_i}{\partial \xi} + e_{22} \frac{\partial g_i}{\partial \eta} + e_{23} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta} \\ c_i &= e_{31} \frac{\partial g_i}{\partial \xi} + e_{32} \frac{\partial g_i}{\partial \eta} + e_{33} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

e_{ij} 는 3次元의 Jacobian의 逆行列 $[J]^{-1}$ 의 (i, j) 要素이다.

2.3 數值計算프로 그람

數值計算프로그램은 그림 2의 플로차트의 순서에 의해 作成되었으며 使用計算機는 東京工業大學 情報處理센터의 HITAC 8700(最大記憶容量 1MB)이다.

3. 實驗値와 解析値의 比較

3.1 實 驗

本數值解析法에 의한 計算値의 精度를 檢討하기 위하여 그림 3의 實驗片을 製作하였다. $BB=25mm$, $LL=150mm$, $T_i=17.5mm$, $T_s=4.6mm$ 및 $BB=25mm$, $LL=80mm$, $T_i=20mm$, $T_s=14mm$ 의 2가지의 경우에 대해서 一點에 集中荷重이 작용할 경우 캔티레버의 全面의 變位를 測定하였다.

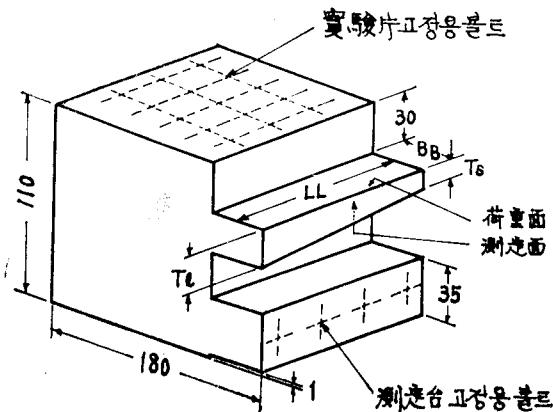


그림 3

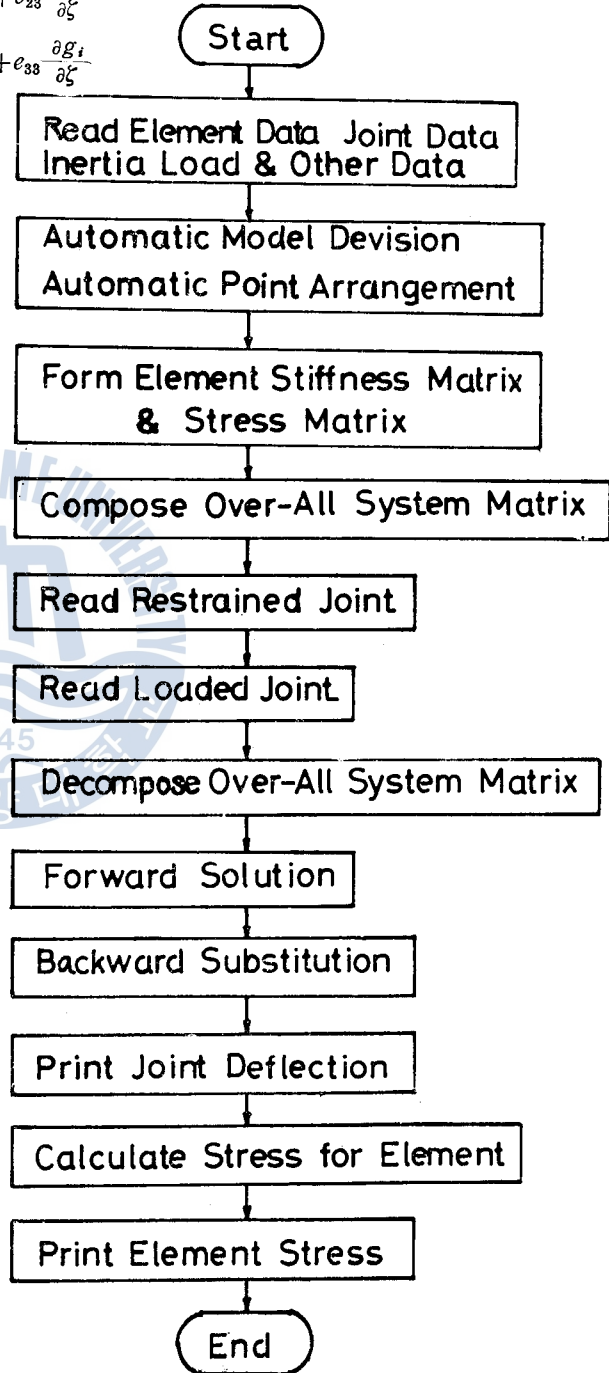


그림 2

荷重作用面을 가로방향 16分割, 세로방향 6分割하는 75개의 점을 荷重作用点으로서 택하였으며, 測定点은 각각의 荷重作用点에 對應하여 測定面에 存在한다. (그림 4)

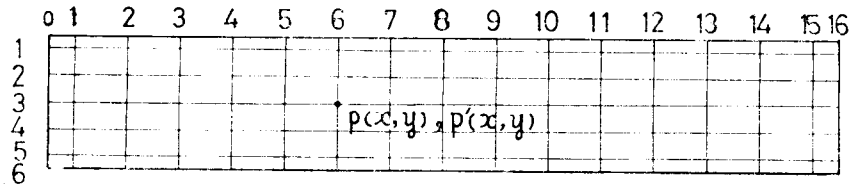


그림 4

實驗片의 材質은 JIS 規格SKS2이며 表面의 硬度는 H_{RC} 55程度이다.

3.2 數值解析을 위한 要素의 分割法

數值解析을 위해 要素를 그림 5처럼 分割하였다. 이 경우 要素의 數는 36個, 總節点의 數는 315, 剛性매트릭스의 밴드의 幅은 192, 拘束點은 93個이며, 剛性매트릭스의 要素數는 181,440個이다. 要素의 分割은 프로그램내에서 自動分割되게끔 하였으며 計算은 1倍精度(1word는 4 byte)로서 行하였다.

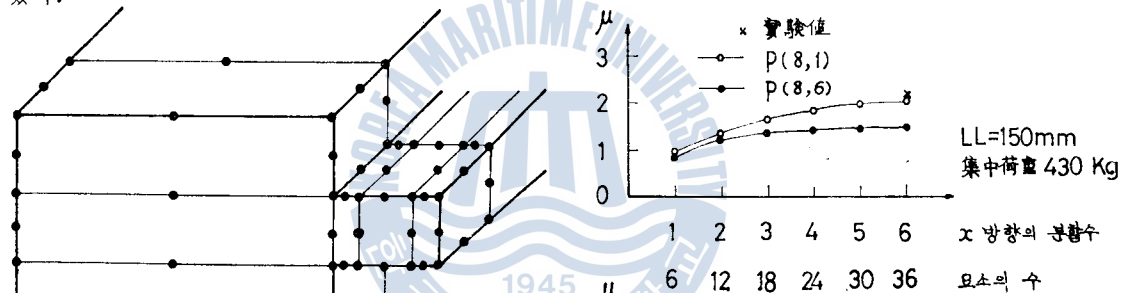
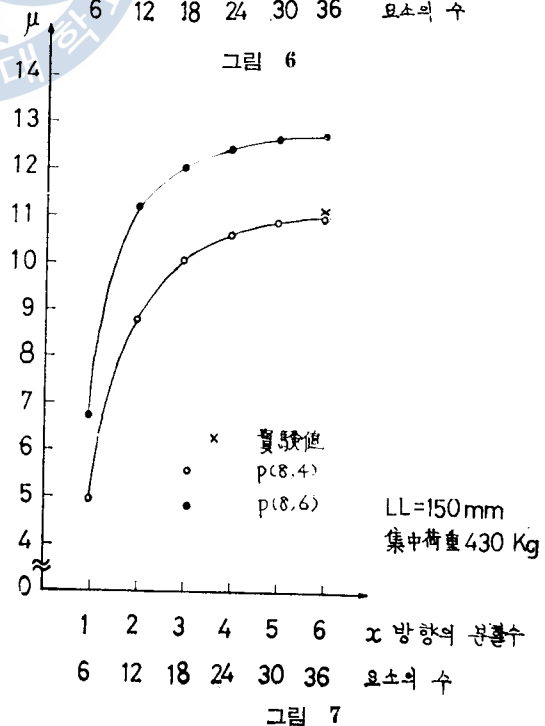


그림 5

3.3 解析值의 收束性 判定

本 數值解析에 의한 解析值의 收束性을 判定하기 위하여, 固定端에 가까운 荷重點 $p(8,1)$ 및 自由端에 가까운 重點 $p(8,4)$ 에 荷重이 작용할 경우 荷重點 $p(8,1)$, $p(8,4)$ 및 自由端上의 荷重點 $p(8,6)$ 에 있어서의 變位를 分割數에 대해서 調査하였다. (그림 6 및 그림 7)

그림 6 및 그림 7에 의해 本 數值解析法은 만족할 만한 收束性을 가지고 있다고 判定되어지며, 또한 그 解析值가 充分한 精度를 가지고 있음을 示唆하고 있다.



3.4 測定面全體의 變形의 傾向

그림 8, 그림 9 및 그림 10은 점 $p(2,3)$, $p(8,3)$ 및 $p(14,3)$ 에 集中荷重이 作用할 경우 荷重面 全体的 變形을 解析値에 의해 나타낸 것이다. 表 1, 表 2 및 表 3은 그림 8, 그림 9 및 그림 10의 各點에 있어서의 解析値 및, 實驗値에 대한 解析値의 百分率의 表이다.

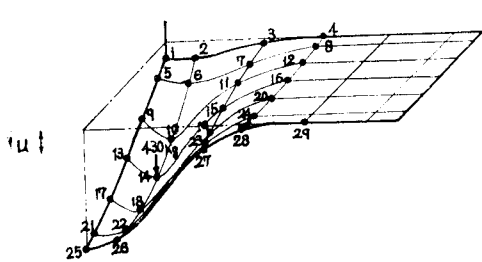


그림 8

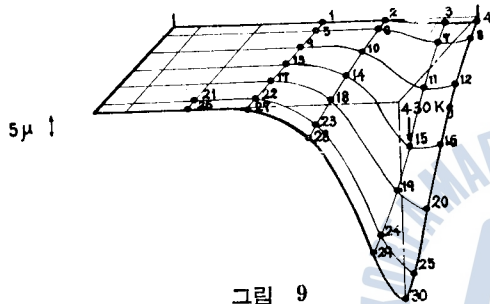


그림 9

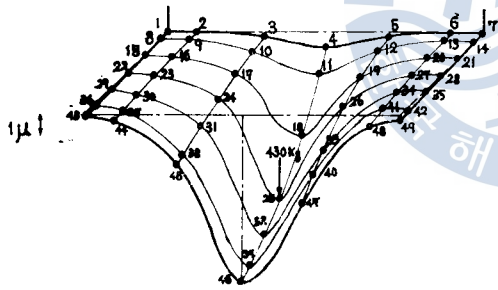


그림 10

表 1

NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%
1	0.9		7	0.5	81	13	3.0	91	19	1.5	84	25	5.7	
2	0.9		8	0		14	4.9	98	20	0.2		26	5.4	
3	0.3		9	2.3	91	15	0.9	90	21	5.4	92	27	2.0	
4	0		10	3.1	97	16	0.2		22	5.4	93	28	0.2	
5	1.3	89	11	0.8	83	17	4.5	93	23	1.9	89	29	0	
6	1.6	92	12	0		18	5.1	92	24	0.2		30		

表 2

NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%
1	0		11	1.6	76	21	0.1		31	1.7	82	41	0.4	
2	0		12	0.4	75	22	0.1		32	6.8	94	42	0.1	
3	0.3		13	0		23	0.2		33	2.7	87	43	0.1	
4	0.7		14	0		24	1.1	79	34	0.3		44	0.2	
5	0.2		15	0		25	6.1	105	35	0.1		45	2.3	
6	0		16	0.1		26	1.5	86	36	0.1		46	7.8	
7	0		17	0.6	71	27	0.2		37	0.2		47	4.0	
8	0		18	3.8	95	28	0.1		38	2.2	85	48	0.5	
9	0		19	1.0	84	29	0.1		39	7.5	95	49	0.2	
10	0.5	72	20	0.1		30	0.2		40	3.7	88	50		

表 3

NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%	NO	μ	%
1	0		7	3.7	89	13	0.2		19	27.6	97	25	43.9	
2	0.3		8	2.7		14	2.9	91	20	32.9		26	0	
3	1.0		9	0		15	20.9	97	21	0		27	0.4	
4	0.8		10	1.6	81	16	20.4		22	0.3		28	7.5	
5	0		11	11.3	95	17	0.3		23	6.7	91	29	36.7	
6	0.8	84	12	10.4		18	5.0	93	24	33.7	93	30	48.5	

이들 그림 및 表에서 알 수 있는 것처럼 實驗値에 대한 解析値의 誤差는 충분히 작으며 따라서 各點에 있어서 解析値는 만족할만 한 精度를 가지고 있다고 판단된다.

3.5 荷重作用點直下에 있어서의 變位

齒車의 齒에 대해서 本數値解析法을 適用할 경우 특히 중요한 것은 任意的 線(荷重傳達線)上的 各點에 있어서의 變位의 解析値의 精度이다. 그림 11은 $LL=150mm$ 의 경우의 例로서 假想荷重接觸線A의 線上에 存在하는 變位에 대해 實驗値와 解析値를 比較한 것이다. ○票가 實驗値이며, ×票가 解析値이다. 解析値는 實驗値보다 약간 작지만 잘 一致하고 있다고 판단된다.

動力이 任意的 線接觸에 의해 傳達되는 시스템에 있어서 接觸線上的 荷重分布, 시스템의 應力分布 등을 해석하기 위하여서는 시스템全体的 變位特性 특히 接觸線上的 變位特性이 대단히 重要하다. 그림 8, 9, 10 및 11에 의해 本數値解析法은 충분한 精度를 가진 變位解析法을 提供하며 따라서 上述의 시스템의 解析에 應用이 可能하다고 示唆된다.

3.6 荷重点의 沈下(Depression)에 의한 변위

그림 13 및 그림 14는 荷重点 $p(8, 1)$ 및 $p(8, 3)$ 에 集中荷重이 作用할 경우 荷重点 및 測定面의 變形을 캔티레버의 橫斷面에 나타낸 그림이다. 그림 12는 荷重点 $p(8, 1)$ 및 $p(8, 3)$ 에 荷重이 作用할 경우 荷重点의 變位の 解析值 및 實驗值를 對照한 것이다.

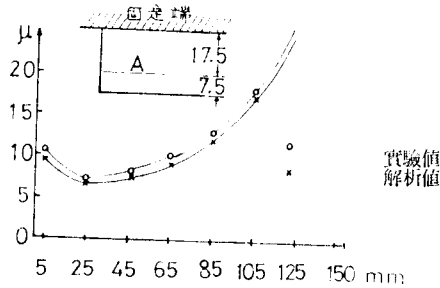


그림 11

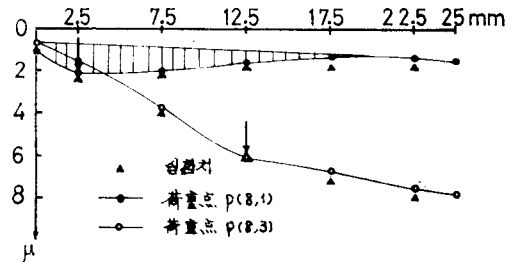


그림 12

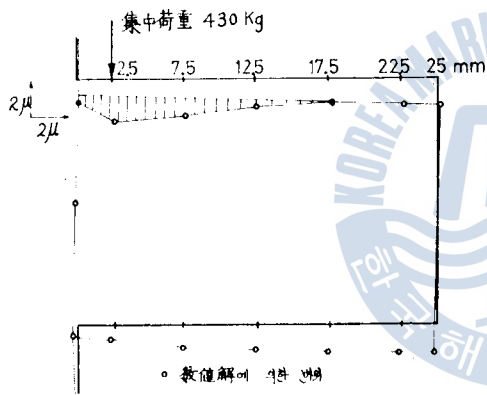


그림 13

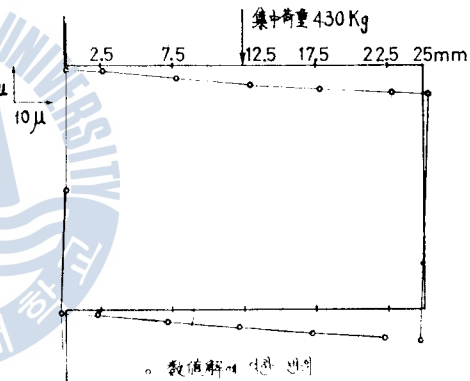


그림 14

그림에서 斜線의 부분은 荷重点의 沈下의 영향에 의한 변위라고 판단되어 진다. 荷重点의 沈下는 固定端에 가까울수록 변위에 큰 영향을 미친다. 그림 12 및 13에서 荷重点直下의 변위의 50% 이상이 그 영향으로 판단된다. 따라서, 변위가 固定端으로부터의 모멘트에 비례하여 증가한다는 從來의 캔티레버 解析의 경우 固定端 부근의 변위가 실제보다 작은 値로서 評價되기 때문에 荷重点直下의 沈下에 의한 영향을 별도로 해석할 필요가 있었다. 본 解析法의 경우 沈下에 의한 변위는 自動적으로 解析되며, 따라서 計算機의 記憶容量이 許用하는 限度内에서 要素의 分割을 증가시킴으로써 그 精度는 向上된다.

4. 結 言

有限要素法에 의한 본 數值解法은 從來 數值解析으로서의 解析이 不可能한, 幅方向의 斷面이 變化하는 캔티레버의 경우에도 適用이 가능하며 또한 그 數值解析值도 實驗值와 잘 一致하고 있음이 判明되었다.

荷重点의 沈下에 의한 영향이 自動적으로 해석되므로 荷重点부근의 변위의 數值解는 高

精度를 가지고 있으며, 따라서 荷重分布의 解析, 形修整의 理論的 考察에 特別히 有效하다.

本數值解析法의 경우 變位解析의 中間段階에서 集中荷重下의 應力 및 스트레인分布의 解析이 可能하므로(式(1) 및 (2)에 의해) 스트레인, 應力 및 變位의 一貫解析이 可能하다.

參 考 文 獻

- (1) 藤井, 日本機械學會論文集, 43~368(1977. 4), 1491~1519.
- (2) F. L. Litvin, K. M. Petrov & V. A. Ganshin, Mechanism and Machine Theory, Vol. 8(1973), 187~196
- (3) 梅澤, 石川, 林, 日本機械學會誌, 35~270(1960. 2), 423~431.
- (4) O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science(1971), McGraw-Hill
- (5) Weber, C., U. Banaschet, K., Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrag verzoehnten Rädern(1955), Friedrich, Vieweg & Sohn Braunschweig

