

## 웨이브와셔스프링의 정적 특성에 관한 연구

이수종<sup>1)</sup> · 王之錫<sup>2)</sup>

### A Study on the Static Characteristics of Wave Washer Spring

Lee S. J.<sup>(1)</sup>, Wang J. s.<sup>(2)</sup>

#### ABSTRACT

The wave washer springs are widely used in non-return valves of fluid, especially in air check valves to confirm the rapid shut-off of valve proper. The stiffness of wave washer springs used in suction and exhaust valves of reciprocating air compressor play an important role on efficiency of the compressor.

The formula for calculating the spring constant of wave washer spring is introduced using bending and torsion theory of frames in this paper.

But recently the reciprocating air compressors are driven by directly connected electric motors and the r.p.m of air comperssor is very high. As the results, the many problems concerning the valve proper and valve springs of suction and exaust valves are reported and precise behaviors of valve springs become necessary.

The wave washer springs are expected to behave non-linearly between forces and displacements due to contractions of the height and due to expansions in

(1) 한국해양대학교 기계공학과 박사과정 기계공학전공

(2) 한국해양대학교 기계공학과 교수

형 에너지를 계산하고 여기에 카스틸리아노의 정리를 적용하여 주어진 하중에 대한 변위를 구하고 그 비를 구하여 스프링상수 계산 공식을 제시하였다.

Fig. 2-1은 웨이브의 수가 3인 웨이브 와셔 스프링의 일례로서 평균 반경을  $R$ , 폭을  $b$ , 두께를  $t$ 라 하고 스프링의 자유 길이를  $H$ 라 한다.  $H$ 와  $b$ 가  $R$ 에 비하여 작다고 하면 이 스프링은 프레임 구조로 간주할 수 있으므로 프레임의 굽힘과 비틀림 이론을 적용하여 스프링 상수  $k$ 를 유도해 내려고 한다.

## 2.1 웨이브 수 2인 웨이브 와셔 스프링

Fig. 2-2(a) 에서 보인 바와 같이 점  $A$  와  $B$  는 마루이고 점  $C$  와  $D$  는 골이다. 마루  $A$  와  $B$  에 각각  $P$  라는 하중이 지면에 수직하게 작용한다고 할 때 그 반력은 골  $C$  점과  $D$  점에서 받고  $C$  점과  $D$  점의 굽힘 모멘트는 각각  $M_0 = PR/2$  이다. 지금 이 스프링은 좌우 대칭이므로 Fig. 2-2(b) 에 보인 바와 같이  $C, D$  점을 고정단 이라고 간주할 수 있으므로 한 쪽만을 고려하여 하중  $P$  에 의한  $A$  점의 처짐  $\delta$  를 구하면 된다.

Fig. 2-2(b) 의  $C$  점과  $D$  점의 반작용 모멘트는  $M_0 = PR/2$ 이고 반력은  $P/2$  인데,  $C$  점에서 반시계 방향으로 중심각  $\varphi$  만큼 각변위한 점의 굽힘 모멘트  $M$  과 비틀림 토크  $T$  는 다음과 같다.

$$M = \frac{PR}{2} (\sin \varphi - \cos \varphi) \quad (2-1)$$

$$T = \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi - \sin \varphi) \quad (2-2)$$

이 굽힘 모멘트  $M$  과 비틀림 토크  $T$  에 의한 탄성 변형 에너지  $U$  는

$$U = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} R d\varphi + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{T^2}{2GJ} R d\varphi \quad (2-3)$$

이 되는 데 여기서  $EI$  는 굽힘강성계수이고  $G$  는 재료의 전단탄성계수이다.  $J$  는  $J = \beta b t^3$  으로 직사각형 단면의 봉재를 비틀시 단위 길이당의 비틀림 각을 계산할 때 사용하는 계수인 데, 직사각형 단면의 장변  $b$  와 단변  $t$  의 비에 따라  $\beta$  를 취하여 계산하면 된다. 카스틸리아노의 정리에 의하여  $A$  점의 처짐  $\delta$  는

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P} R d\varphi \quad (2-4)$$

가 되고 식 (2-1), (2-2)에서

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{R}{2} (\sin \varphi - \cos \varphi) \quad (2-5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{R}{2} (1 - \cos \varphi - \sin \varphi) \quad (2-6)$$

이므로 식 (2-1), (2-2)와 이들을 식 (2-4)에 대입하여 정리하면  $\delta$ 는 다음과 같다.

$$\delta = PR^3 \left( \frac{0.2854}{EI} + \frac{0.0708}{GJ} \right) \quad (2-7)$$

그러므로 웨이브 수 2인 웨이브 와서 스프링의 스프링 상수  $k$ 는

$$k = \frac{2P}{\delta} = \frac{1}{R^3 \left( \frac{0.1427}{EI} + \frac{0.0354}{GJ} \right)} \quad (2-8)$$

과 같다.

## 2.2 웨이브 수 3인 웨이브 와서 스프링

Fig. 2-3은 웨이브 수 3인 웨이브 와서 스프링을 나타낸 것이며 전절에서와 같은 방법으로 점 A의 처짐  $\delta$ 를 구하면

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi + 2 \int_0^{\pi/3} \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P} R d\varphi \quad (2-9)$$

가 된다.

굽힘모멘트와 비틀림토크를 구하여 식 (2-9)에 대입하여 계산하면

$$\delta = PR^3 \left( \frac{0.0603907}{EI} + \frac{0.00663922}{GJ} \right) \quad (2-10)$$

을 얻을 수 있고 스프링상수  $k$ 는

$$k = \frac{3P}{\delta} = \frac{1}{R^3 \left( \frac{0.02013}{EI} + \frac{0.002213}{GJ} \right)} \quad (2-11)$$

## 2.3 일반적인 경우 (웨이브 수 $n$ 인 웨이브 와서 스프링)

이상과 같은 요령으로 웨이브 수  $n$ 인 웨이브 와서 스프링의 처짐  $\delta$ 와 스프링상수  $k$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_0^{\pi/n} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi + 2 \int_0^{\pi/n} \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P} R d\varphi \quad (2-12)$$

$$k = \frac{nP}{\delta} = \frac{n}{R^3 \left( \frac{S_n}{EI} + \frac{Q_n}{GJ} \right)} \quad (2-13)$$

단,

$$S_n = \frac{\pi}{4n} \left( 1 + \tan^2 \frac{\pi}{2n} \right) - \frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{n} \left( 1 - \tan^2 \frac{\pi}{2n} \right) - \frac{1}{4} \tan \frac{\pi}{2n} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$Q_n = \frac{\pi}{4n} \left( 3 + \tan^2 \frac{\pi}{2n} \right) + \frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{n} \left( 1 - \tan^2 \frac{\pi}{2n} \right) - \sin \frac{\pi}{n} - \tan \frac{\pi}{2n} \left( \frac{3}{4} - \cos \frac{\pi}{n} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)$$

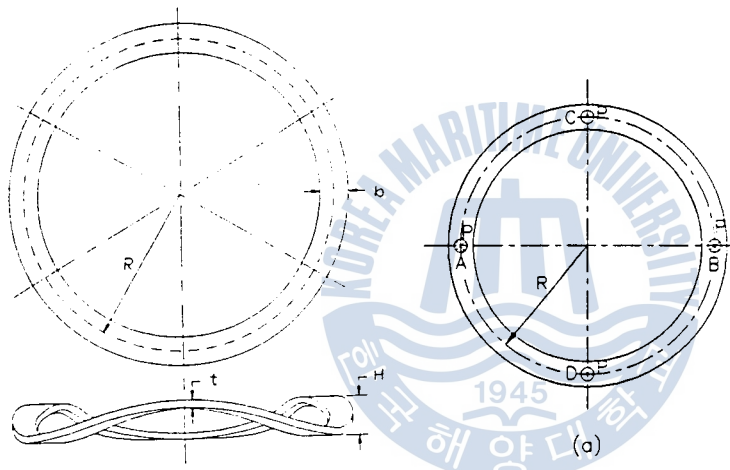


Fig. 2-1 Wave washer spring with 3 waves

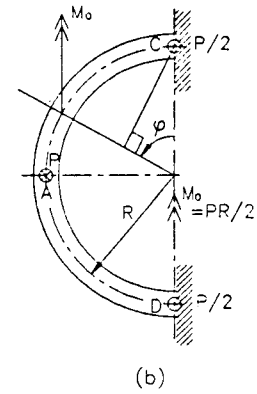


Fig. 2-2 Acting forces on 2 waves washer

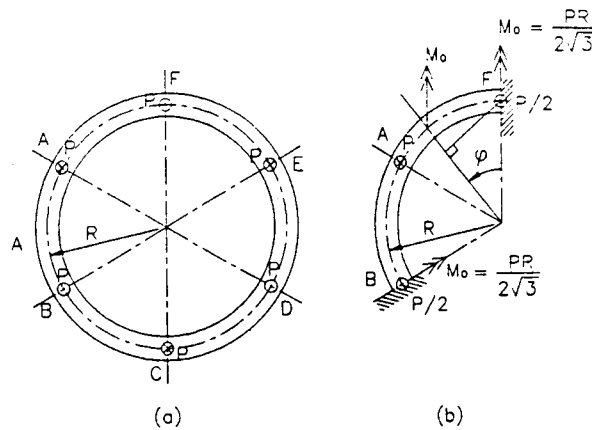


Fig. 2-3 Acting forces on 3 waves washer spring

### 3. 판 이론에 의한 특성해석

전장에서는 웨이브 와서 스프링의 정적하중에 대한 처짐을 프레임 이론으로 구하였다. 그러나, 이 방법은 선형계산으로 근사적인 특성을 파악할 수 밖에 없으므로 3차원 공간의 판(plate)구조물 해석 프로그램을 개발하고 이것을 이용하여 웨이브 와서 스프링의 특성을 파악하고자 한다.

웨이브 와서 스프링의 경우는 하중을 받으면서 각 절점의 좌표값이 변화하는데 그 변화량이 무시할 수 있는 정도가 아니므로 하중을 미소량씩 증가시키고 그 미소하중에 대한 각 절점의 변위를 계산하고 이 중 선변위를 각 절점의 좌표값에다 합산하여 새로운 절점좌표를 구하고 이 절점좌표를 가지고 새로운 강성행렬을 구하여 절점변위를 계산하는 이른바 단계법 (step by step method)을 이용하는 전산프로그램을 작성 하였다.

#### 3.1 프로그래밍

유한요소법으로 정식화된 판이론을 이용하여 웨이브 와서 스프링을 해석함에 있어 보통의 기하적 비선형(geometric non-linear) 문제를 다루는 방법대로, 우선 작용하중을 수백등분으로 작게 나누어서 미소하중이 작용할 때의 각 절점 변위를 구한다. 그런 다음 그 절점 변위를 각 절점의 좌표에다 합산한다. 다음에 새로운 절점좌표를 가지고 강성행렬을 구하여 다음 단계의 계산을 반복하는 이른바 단계법을 이용하였다.

Fig. 3-1은 이 계산과정의 플로우 차아트(flow chart)를 나타낸다. 스프링의 외경, 두께, 재료상수, 웨이브수 등 기본적인 데이터만 주어진다면 삼각형 요소로 자동분할하여 각 절점의 넘버링 순서와 X-Y-Z좌표를 자동으로 계산한다. 그런 다음 국소좌표계에서 요소의 강성행렬과 하중벡터를 구하고 이들을 중앙좌표계로 변환한다. 그런데 전절에서 보인 바와 같이 마루에 있는 절점을 포함하는 요소는 중앙좌표계와는 또다른 국소좌표계에서 경계조건을 도입해 주어야 하므로 각 요소가 이들 절점을 포함하는지 어떤지 판단한다. 만약 포함하지 않으면 곧 바로 조립(assembly)하고 포함하면 그 국소좌표계로 변환하여 경계조건을 도입하고 다시 중앙좌표계로 변환하여 조립한다. 끝에 있는 절점의 경계조건은 조립하고 나서 중앙좌표계에서 도입하여도 무방하다. 그 다음 방정식을 풀어 절점변위를 구하고 이 절점변위 중에서 선 변위를 가려내어 기존의 X-Y-Z좌표에다 합산한다. 마루

에 있는 절점의 Z방향변위가 스프링의 자유길이에 도달하면 계산을 끝내고 그렇지 않으면 하중을 미소량 증가시키고 반복 계산한다.

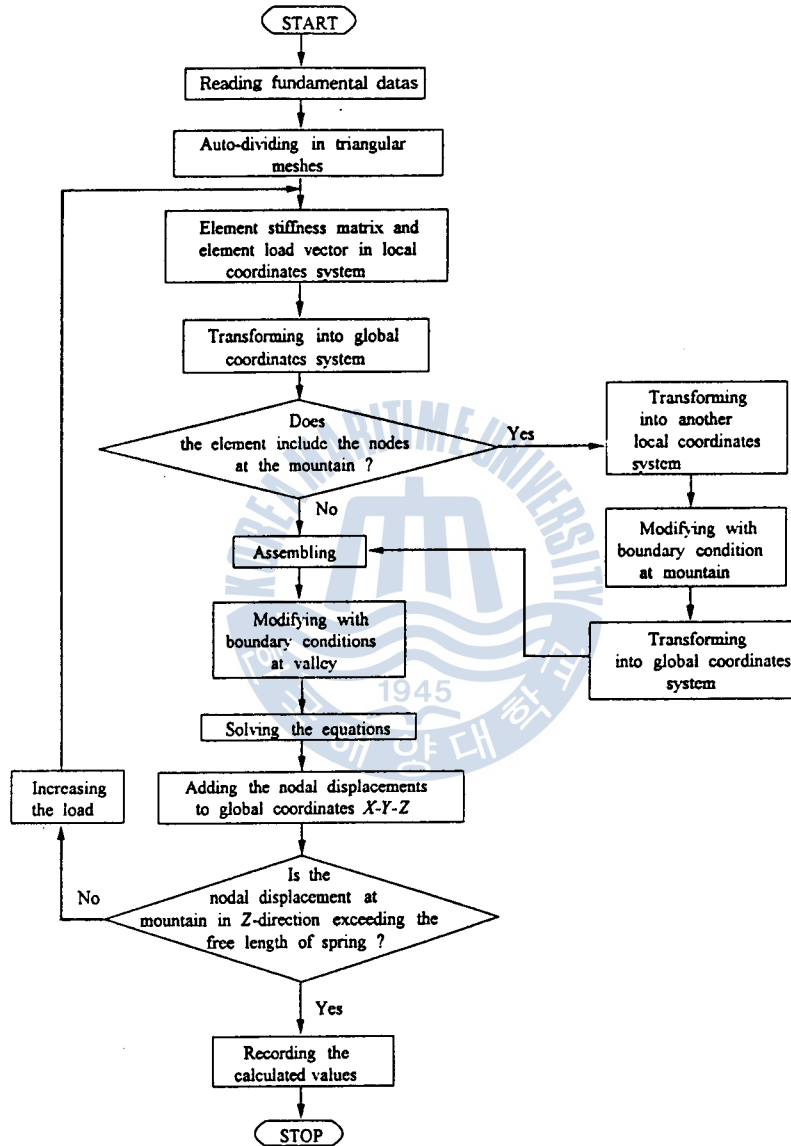


Fig. 3-1 Flow chart for analysis of wave washer spring

#### 4. 실험 및 고찰

웨이브 와셔 스프링의 정적 특성을 실험적인 방법으로 고찰하여 본 결과 예상

하였던 대로 이 스프링은 비선형성을 보이고 있으며 3차원 공간의 판 구조물 이론에 의한 유한 요소 해석이 프레임이론에 의한 해석보다 훨씬 더 실측치에 가까운 계산 결과를 준다는 것도 알 수 있었다. 그러나 프레임 이론에 의하여 계산한 하중과 변위사이의 관계도 변위의 전구간에 걸쳐서 평균적으로는 실측치와 잘 맞으므로 이 이론에 의한 스프링 상수 계산 공식도 스프링의 정적 특성을 근사적으로 파악하는 데는 충분하다고 생각된다.

이상에서 제시한 웨이브 와셔 스프링의 스프링상수 계산식과 이 스프링의 비선형성을 밝힐 수 있는 유한요소법에 의한 해석 프로그램의 신빙성을 검토하고 이 스프링의 정적 특성을 실물을 통해 고찰하기 위하여 실제로 왕복동 공기 압축기의 흡입 밸브와 토출밸브에 쓰이는 웨이브 와셔 스프링을 수집하여 하중과 변위사이의 관계를 측정에 의하여 구하였다.

Fig. 4-1은 샘플 1(웨이브 수2)에 대하여 가로축을 변위로 잡고 세로축을 하중으로 잡아서 하중-변위 관계를 나타낸 것이다.

Fig. 4-2는 샘플 2(웨이브 수3)에 대한 계산결과와 측정결과를 나타낸 것이다.

Fig. 4-3은 샘플 1에 대한 유한요소 메쉬를, Fig. 4-4는 샘플 2에 대한 유한요소 메쉬를 나타내는 데 골과 마루에서 반경방향의 변위가 다른 곳 보다 크다는 것을 알 수 있다.

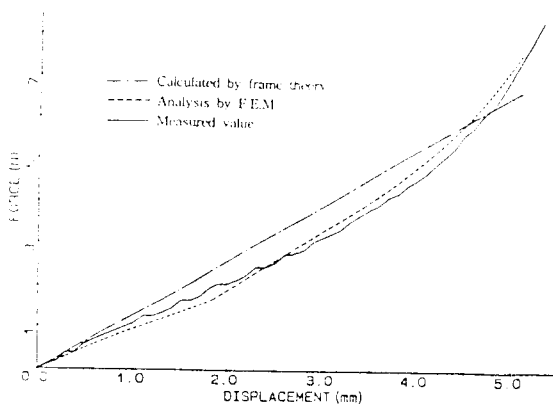


Fig. 4-1 Force displacement relations  
for wave washer spring of sample 1

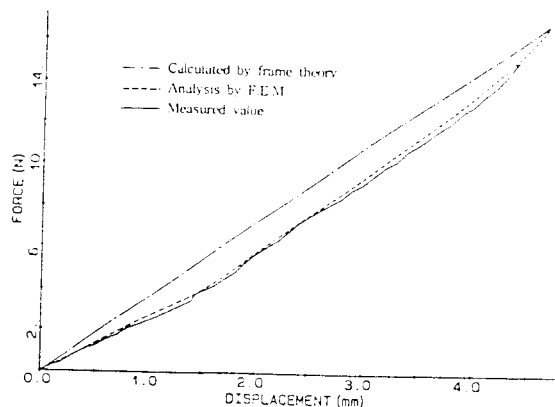


Fig. 4-2 Force displacement relations  
for wave washer spring of sample 2

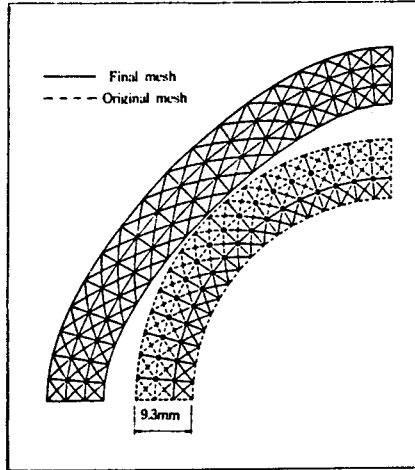


Fig. 4-3 Original and final meshes of sample 1

(Nodal displacements are magnified by 55)

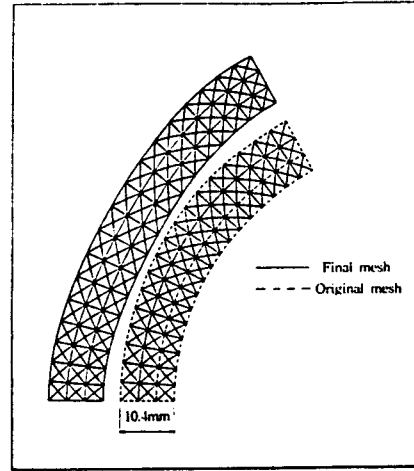


Fig. 4-4 Original and final meshes of sample 2

(Nodal displacements are magnified by 45)

## 5. 결론

웨이브 와셔 스프링에 대하여 스프링 상수를 계산하는 이론식을 유도하였으며, 하중과 변위의 관계를 유한요소법으로 해석하고 실험에 의하여 측정된 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 프레임의 굽힘 이론과 비틀림 이론에 의하여 웨이브 와셔 스프링 상수  $k$  를 구하는 이론식을 유도하였다.

$$k = \frac{n}{R^3 \left( \frac{S_n}{EI} + \frac{Q_n}{GJ} \right)}$$

(2) 유한요소법에 의한 3차원 관해석 이론을 웨이브 와셔 스프링에 적용하여 하중과 변위의 관계를 구하였으며, 실험 결과와 잘 일치함을 확인하였다.

(3) 선형해석을 위한 판이론 해석 프로그램에 구간선형법(piecewise linear method)을 적용하여 기하적인 비선형(geometrical non-linear) 문제를 해석하였다.

(4) 웨이브 와셔 스프링의 변형량이 작을 때에는 실측에 의한 스프링 상수가 프레임 이론에 의하여 구한 상수보다 작고, 변형량이 스프링의 자유길이의 중간쯤에 달하면 프레임 이론에 의하여 구한 스프링 상수와 비슷해지다가, 그 후 변형량이 증가함에 따라 비교적 빨리 증가하는 비선형성을 보였다.

(5) 웨이브 와셔 스프링에 하중을 가하면 반경방향으로 커지는 데, 골과 마루에



서는 비탈진 부분보다 더 많이 커진다.

(6) 폭 및 직경에 비하여 두께가 매우 작은 웨이브 와셔 스프링의 정적 특성은 프레임 이론으로 해석한 결과보다 판이론으로 해석한 결과가 실험결과와 잘 일치하는 경향을 나타내었다.

## 참 고 문 헌

- [1] J. F. Seffler, "The design Experimentation and Simulation of Novel Coulomb Friction Device for Automotive Valve Spring Damping", Journal of mechanical design. Dec. 01. Vol.5. No.4. p.871, 1993.
- [2] Jun Kawahara, Koji Tanabe, Toshio Banno and Masashi Yoshida, "Advance of valve Spring steel", Wire Journal International of mechanical design. Nov. 01. Vol. 25. No.11, p.55, 1992.
- [3] 平 修二, 現代 彈性力學, オ-ム社, 東京, pp.213-223, 1974.
- [4] R.E. Jones, "A Generalization of the Direct-Stiffness Method of Structural Analysis", AIAA J, Vol.2, pp.821-826, 1964.
- [5] M.A.Crifield, Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structure, Vol.1, Essentials, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1991.
- [6] S.P. Timosenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plate and Shells, McGraw-Hill, New-York, Chap. 10, 12, 1976.
- [7] R.W.Clough, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", Proceedings Second conference on Electronic Computation, American Society of Civil Engineers., Pittsburgh, pp.345-378, 1996.
- [8] O.C. Zienkiewicz, and R.L. Taylor, The Finite Element Method, 4Th Ed, Vol.1, McGraw-hill, London, Chapter 2 and 11, 1990.
- [9] W.C. CARPENTER, "Analysis of plate on elastic foundation", Department of Engineering Science, University of Durham.
- [10] C. D. Mote, Jr., "Gloval-Local Finite Element", Int. J Num Meth Eng., Vol.3, pp.656~574, 1971.
- [11] G.Wempner, Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies, 1981.
- [12] R.L. Taylor, "On Completness of Shape Functions for Finite Element Analysis", Int. J. Num Meth. Eng. Vol.4 17~22, 1972.

