원형경계를 가진 수면의 정상파에 관해서
(원형대칭이 아닌 해의 경우)

유 홍 선(俞洪善)

ON THE FUNDAMENTAL NORMAL MODES OF THE FREE OSCILLATION OF THE WATER SURFACE IN A CIRCULAR BASIN
(NON-CIRCULAR-SYMMETRIC CASES)

YU HONG SUN

Abstract.

The fundamental normal modes of the free oscillation of the water surface in a circular basin are investigated for the case that the wave forms are not circular-symmetric. The wave functions are expressed in power series, and the recurrence formula for the coefficients of the power series is obtained. With the wave functions the nodal dimeters, the radii of the nodal circles and the frequencies of the fundamental normal modes are investigated. The approximate formulas for the frequencies are obtained, and the values of the frequencies for two cases are obtained and compared with those obtained by Prof. Lamb.

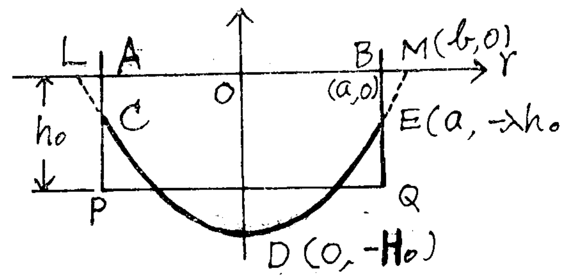
<차 례>

1. 서 론
2. 기호와 파동방정식의 도입
3. $h=h_0$일 경우의 해
4—1. $h=H^{\circ}\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)$인 경우의 해
4—2. 진동수 계산의 근사식
5. 결 론

1. 서 론

원형경계를 가진 자유수면의 기본진동 중 원형대칭의 경우에 대해서는 이미 논한 바 있다. 여기서는 경좌표 r 뿐 아니라. 방위각 φ에도 의존하는 정상파에 관해서 생각해 보려고 한다. 우선 등심일 경우에 대한 해를 구하고 다음 저면이 회전 포물면인 경우를 다룬다. 그리고 전논문에서 도입된 매개변수 λ를 저면곡율의 변화를 나타내는 변수로 계속 채용하겠다. 그리고 회전포물저면에 대한 일반 해를 구하는 방법을 상세히 따져보고, 그 실례로서 간단한 경우에 대해 구체적인 해를 구해 보겠다. 이 결과들을 등심인 경우의 결과와 또 Lamb 교수의 결과와 비교해 본다. 끝으로 전 논문에서 소개한 진동수 계산의 근사법을 이번 경우에도 적용해 보겠다.

2. 기호와 파동방정식의 도입



기호 설명을 그림 설명으로 간단히 하겠다.

LCDEM 곡선부분 : 회전포물면의 단면도,

ACDEB : 바닥이 회전 포물면이고, 경계면이 연직면인 물통의 단면도.

APQB : 앞의 물통과 같은 부피를 갖는 원통형 물통의 단면도. 깊이가 h_o이다.

λ; $0\leq\lambda\leq 1$: 물통의 부피와 물통의 구경(즉 수면 직경 : $2a$)을 일정히 유지하면서 회전포물면 바닥의 곡윤을 변화시키는 parameter. 곡윤의 완급에 따라 λ가 커지거나 작아지면서 E(혹은 C) 점을 내려가게 하거나, 올라가게 한다.

원점 O는 수면 AOB의 중점. 이 중심을 지나고 수면에 수직한 축을 Z축으로 하여 좌표계를 도입한다. 그러면 우리가 고찰하는 계는 이 Z축에 대하여 원형대칭이다.

다음 수면 상의 임의의 점$(r,\ \varphi)$에서의 깊이를 h라 하면

$$h=H_o\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right) \tag{1}$$

이 되고, 등용적의 조건을 써서 b와 H_o의 변화를 λ로 표현해 보면,

$$b=\sqrt{\frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)}}\,a, \tag{2}$$

$$H_o=(2-\lambda)h_o. \tag{3}$$

이제는 파동방정식을 정리해 보자.

일반적으로 수면상 임의점 (r,φ)에서 수면의 연직진동변위를 $z(r,\varphi,t)$라 하면, 파동방정식은

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=g\,\mathrm{div}(h\,\mathrm{grad}\,Z). \tag{4}$$

여기서

$$Z=R(r)\Phi(\varphi)T(t) \tag{5}$$

라 분리해서 풀어보면 시간종속부는

$$T(t)=\cos(\omega t+\theta_o), \tag{6}$$

φ종속부는

$$\Phi=\cos(n\varphi+\varphi_o) \tag{7}$$

로 각각 해를 얻는데 여기서 ω는 정상파의 각 진동수임을 알 수 있고, n은 z가 일가함수가 되기 위해서는 정수가 되어야 한다는 것도 알 수 있다.

그리고 남은 r 종속부 $R(r)$은 다음 방정식의 해로 주어짐도 알 수 있다.

$$gh\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{n^2}{r^2}R\right)-g\frac{dh}{dr}\frac{dR}{dr}+\omega^2R=0. \tag{8}$$

따라서 완전해는

$$Z(r,\varphi,t)=R(r)\cos(n\varphi+\varphi_o)\cos(\omega t+\theta_o) \tag{9}$$

로 표현되고 문제는 결국 방정식 (8)을 풀어 $R(r)$을 구하는 것으로 귀착된다.

끝으로 수면의 경계가 연직면이라는 데에서 $R(r)$은 경계조건

$$\left(\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)_{r=a}=0 \tag{10}$$

을 만족해야 한다.

3. $h=h_o$ 일 경우의 해

방정식 (8)은

이 경우 방정식 (8)은

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{n^2}{r^2}R+\frac{\omega^2}{gh_o}R=0 \tag{11}$$

가 된다. 이 방정식은 잘 알려진 Bessel의 미분방정식이다. $r=0$ 일 때 R이 유한해야 된다는 조건을 만족하는 이 방정식의 해는

$$R=A\,J_n\left(\frac{\omega}{\sqrt{gh_o}}r\right). \tag{12}$$

이 해가 만족해야 할 경계조건은 (10)에서

$$J'_n\left(\frac{\omega}{\sqrt{gh_o}}a\right)=0 \tag{13}$$

이 방정식의 정근을 최소근으로 부터 크기 순으로

$$\frac{\omega_{ni}\,a}{\sqrt{gh_o}}=\alpha'_{ni}\ ;\ i=1,2,3,\cdots\cdots \tag{14}$$

라 하면

$$\omega_{ni}\frac{\sqrt{gh_o}}{a}\alpha'_{ni}\ ;\ i=1,2,3,\cdots\cdots \tag{15}$$

로 기본진동들의 각진동수를 구할 수 있다. 따라서 완전해는

$$Z_{n_i}=AJ_n\left(\frac{\alpha'_{n_i}}{a}r\right)\cos(n\varphi+\varphi_o)\cos(\omega_{n_i}t+\theta_o). \tag{16}$$

다음 절원의 반경은 방정식

$$J_n\left(\frac{\alpha'_{ni}}{a}r\right)=0 \tag{17}$$

의 정근들 $\alpha_{ni}(i=1,2,3,\cdots)$에서 구할 수 있다. 또 절직경은 다음 식에서 정해 진다.

$$\cos(n\varphi+\varphi_o)=0. \tag{18}$$

이 방정식의 근은

$$n\varphi+\varphi_o=\frac{\pi}{2}+m\pi\ ;\ m=0,1,2,3,\cdots\cdots \tag{19}$$

에서 정해지는데 $0\leq\varphi\leq2\pi$ 의 범위에 포함되는 근의 수는 $2n$ 개가 된다. 이것은 n개의 절직경이 등각간격으로 있다는 것을 뜻한다.

다음엔 구체적으로 $n=0,1,2,$ 일 경우를 예로 들어 지금까지 제시한 방법을 적용해 본다.

i) $n=0$ 의 경우

이것은 전 논문에 취급한 경우에 해당되므로 생략한다.

ii) $n=1$ 의 경우

· 이 경우의 해는

$$Z_{1i}=AJ_1\left(\frac{\alpha'_1 i}{a}r\right)(\cos\varphi+\varphi_o)\cos(\omega_{1i}t+\theta_o) \tag{20}$$

로 표시되며 (19)에서 절직경이 1개임을 알 수 있다.

a) 제1기본 집동 ($i=1$)

frequency (: $2\pi/\omega_{11}$)는 다음식으로 정해진다.

$$\frac{\omega_{11}a}{\sqrt{gh_o}}=\alpha'_{11}=1.841 \tag{21}$$

따라서

$$R(r)=AJ_1\left(\frac{\alpha'_{11}}{a}r\right)=0 \tag{22}$$

의 근 $\alpha_{11},\alpha_{12}\cdots$ 등에서 절원의 반경을 구할 수 있다.

$\alpha_{11}<\alpha'_{11}<\alpha_{12}$ 이므로 절원은 하나이고, 그 반경 a^1_{11} 은

$$a^1_{11}=\frac{\alpha_{11}}{\alpha'_{11}}a=\frac{3.831}{1.841}a \tag{23}$$

b) 제2기본진동 ($i=2$)

frequency($2\pi/\omega_{12}$)는 다음 식에서 정해진다.

$$\frac{\omega_{12}}{\sqrt{gh_o}}a=\alpha'_{12}=5.331 \tag{24}$$

그리고

$$R(r)=AJ_1\left(\frac{\alpha'_{12}}{a}r\right)=0 \tag{25}$$

의 근 $\alpha_{11},\alpha_{12}\cdots$ 등에서 $\alpha_{11}<\alpha_{12}<\alpha'_{12}<\alpha_{13}$ 이므로 절원은 2개 그 반경 a^1_{12} 와 a^2_{12} 는

$$a^1_{12}=\frac{\alpha_{11}}{\alpha'_{12}}a=\frac{3.832}{5.331}a \tag{26}$$

$$a^2_{12}=\frac{\alpha_{12}}{\alpha'_{12}}a=\frac{7.016}{5.313}a \tag{27}$$

이와 같은 논의를 계속하므로써 제3, 제4… 진동들의 성실을 계속 논의 할 수 있다.

iii) $n=2$ 일 경우

이 경우의 해는

$$Z_{2i}=AJ_2\left(\frac{\alpha'_{2i}}{a}r\right)\cos(2\varphi+\varphi_o)\cos(\omega_{2i}t+\theta_o). \tag{28}$$

역시 (19)에서 직교하는 두 개의 절직경이 있음을 알 수 있다.

(a) 제1기본진동 ($i=1$)

frequency 는 다음식으로 주어진다.

$$\frac{\omega_{21}}{\sqrt{gh_o}}a=\alpha'_{21}=3.054. \tag{29}$$

또 방정식

$$J_2\left(\frac{\alpha_{21}}{a}r\right)=0 \tag{30}$$

의 근 $\alpha_{21},\alpha_{22}\cdots$ 등에서 $\alpha_{21}<\alpha'_{21}<\alpha_{22}$ 이므로 절원은 1개 그것을 a^1_{21} 이라 하면

$$a'_{21}=\frac{\alpha_{21}}{\alpha'_{21}}\alpha=\frac{5.136}{3.054}a. \tag{31}$$

이상의 예로써 $h=h_o$ 인 경우에 관한 논의는 충분하다고 본다.

4—1. $h=H_o\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)$인 경우의 해

미분방정식 (8)에 (1)을 대입해서 정리하면

$$\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{n^2}{r^2}R\right)-\frac{2r}{b^2}\frac{dR}{dr}+\frac{\omega^2}{gH_o}R=0 \tag{32}$$

를 얻는다. 이 방정식의 해를 멱급수형으로

$$P=\sum_{l=-\infty}^{\infty}A_l r^l \tag{33}$$

라 표현하고, (32)를 만족시키도록 계수 A_l을 구해보자. 먼저 $r=0$에서 R이 유한해야 한다는 조건으로 부터

$$A_l=0\ ;\ l<0 \tag{34}$$

를 얻는다. 그리고 (32)를 만족시키기 위해서는

$$A_{l+2}=\frac{1}{b^2}\frac{l(l+2)-k^2}{(l+2)^2-n^2}A_l\ ;\ l\geq 0 \tag{35}$$

여기서

$$k^2=n^2+\frac{\omega^2b^2}{gH_o} \tag{36}$$

(35)에서 계수들을 순차적으로 구할 수 있는데 계수에 관한 지식을 정리하면 다음과 같다.

a) $l<n$ 인 모든 계수는 Zero.

b) n이 기수면 모든 우수차항의 계수는 Zero

n이 우수면 모든 기수차항의 계수는 Zero.

c) $l=n$인 A_l은 정해지지 않으며, 이것을 적분상수로 하여 그 이상의 A_{l+2}, $A_{l+4}\cdots$ 등등의 Zero가 아닌 계수들은 (35)로 구할 수 있다.

다음 간단한 경우에 대한 해를 구체적으로 구해 보자. 절직경에 관한 얘기는 $h=h_o$의 경우와 같으므로 여기서는 생략한다.

i) $n=0$일 때

기수차항의 모든 계수는 모두 0, A_o는 정해지지 않고 이것을 적분상수로 하여 우수차항의 계수들은 (35)에서 구할 수 있다. 이 경우의 해는 전 논문의 결과가 된다.

ii) $n=1$일 때

$l<1$인 계수, 즉 $A_o=0$, 우수차항의 계수도 모두 Zero. A_1은 정해지지 않으며, 이것을 상수로 해서 기수차항들의 계수는 (35)에서 구해진다. 따라서 해는

$$R=A_1\frac{r}{b}\left\{1-\frac{(k-3)}{2\cdot 4}\frac{r^2}{b^2}+\frac{(k-3)(k-15)}{2\cdot 4^2\cdot 6}\frac{r^4}{b^4}-\frac{(k-3)(k-15)(k-35)}{2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8}\frac{r^6}{b^6}+\cdots\right\}. \tag{37}$$

물론 여기서

$$k^2=1+\frac{\omega^2b^2}{gH_o} \tag{38}$$

이 경우 경계조건 (10)을 구체화하면

$$1-\frac{3(k-3)}{8}\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{5(k-3)(k-15)}{8\cdot 24}\left(\frac{a}{b}\right)^4-\frac{7(k-3)(k-15)(k-35)}{8\cdot 24\cdot 48}\left(\frac{a}{b}\right)^6+\cdots=0 \qquad (39)$$

a/b는 λ의 값에 따라 정해지는 상수이므로, 방정식 (39)를 풀면, k의 값을 얻을 수 있는데 (39)의 정근을 최소치로 부터 순서로 k_{11}, k_{12}, … 등등이라 놓으면, 이것들에서 각진동수 ω_{11}, ω_{12}… 등등이 정해진다. (38)에서 k_{1i}와 ω_{1i}의 관계는

$$\frac{\omega_{1i}a}{\sqrt{gh_o}}=\sqrt{2(1-\lambda)}\sqrt{k_{1i}-1}\ ;\ i=1,2,3,\cdots \qquad (40)$$

$\lambda=1$일 경우에는 이 결과는 (20)과 일치한다. 제1, 제2 등 일반적으로 제 i기본진동의 해는

$$R_{1i}=A_1\frac{r}{b}\left\{1-\frac{(k_{1i}-3)}{2\cdot 4}\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{(k_{1i}-3)(k_{1i}-15)}{2\cdot 4^2\cdot 6}\left(\frac{r}{b}\right)^4-\right\} \qquad (41)$$

가 되는데 (41)을 Zero로 놓은 방정식을 풀므로써 $h=h_o$의 경우와 같은 방법으로 절원의 반경을 구할 수 있다,

iii) $n=2$의 경우

앞의 경우와 같은 방법으로 계수를 정해 해를 구해보면, 다음과 같다.

$$R_{2i}=A_2\left(\frac{r}{b}\right)^2\left\{1-\frac{k_2-8}{2\cdot 6}\left(\frac{r}{b}\right)^3+\frac{(k_{2i}-8)(k_{2i}-24)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{r}{b}\right)^4 \right.$$
$$\left. \frac{(k_{2i}-8)(k_{2i}-24)(k_{2i}-48)}{2\cdot 4\cdot 6^2\cdot 10}\left(\frac{r}{b}\right)^6+\cdots\right\}. \qquad (42)$$

이 경우의 음미도 $h=h_o$와 같으므로 생략하기로 하고 다만 $n=1$의 경우 (40)에 대응되는 식은

$$\frac{\omega_{2i}a}{\sqrt{gh_o}}=\sqrt{2(1-\lambda)}\sqrt{k_{2i}-4} \qquad (41)$$

그리고 $\lambda=1$일 때 이 값은 $h=h_o$의 경우 이므로 (29) 이하의 설명과 일치하게 된다. 이 이상의 음미는 진부하므로 생략한다.

4—2 진동수 계산의 근사식

근사식의 유도 방법은 전 논문에서 자세히 다뤘으므로 다시 반복치 않겠고, 결과 만을 제시하겠다. 그것도 구체적 해를 낸 $n=1$, $n=2$의 경우에서 제 1 기본 진동의 진동수만을 다루겠다.

i) $n=1$일 때

$\lambda=1$일 때는

$$\frac{\omega_{11}a}{\sqrt{gh_o}}=1\cdot 841 \qquad (42)$$

근사식은

$$\frac{\omega_{11}a}{\sqrt{gh_o}}=1\cdot 841+0.2478(1-\lambda) \qquad (43)$$

Lamb 교수의 결과는

$$\frac{\omega_{11}a}{\sqrt{gh_o}}=2 \qquad (44)$$

ii) $n=2$ 일 때

$\lambda=1$ 일 때는

$$\frac{\omega_{21}a}{\sqrt{gh_o}}=3\cdot054$$

근사식은

$$\frac{\omega_{21}a}{\sqrt{gh_o}}=3\cdot054-0.55(1-\lambda)$$

Lamb 교수의 결과는

$$\frac{\omega_{21}a}{\sqrt{gh_o}}=2\cdot828$$

5. 결　　론

전번의 논문에서 취급치 못했던 진동 변위가 원대칭이 아닌 경우를 다루는 데서 발견되는 차이점은 절직경이 존재한다는 점이다. 그 밖의 논의 방법엔 큰 차이가 없다. 그리고 절직경의 결정은 단순하므로 여기서도 결국 관심의 대상은 r 종속부 $R(r)$이었다. 회전포물 저면의 경사변화를 나타내는 parameter λ를 포함하는 식들을 결과로 제시했는바, 이 이상의 수치적 음미는 더 구체적인 상항설정이 없는 한 단순히 계산 technigue 문제로 귀착된다 보고 생략했다.

근사식으로 표시된 $\omega a/\sqrt{gh_o}$의 값을 보면 전 논문의 결과를 포함, 모든 경우가 다 λ의 값에 큰 영향을 받지 않는다는 사실을 알 수 있다. 즉 저면이 일정한 깊이를 갖거나 경사변화가 있거나 그 진동수는 큰 차이가 없다는 결론을 얻을 수 있다. 그리고 이 논문의 결과가 $\lambda=0$의 경우에 해당되는 Lamb 교수의 결과와 거의 일치함도 알 수 있다.

References

1. H. Lamb : Hydrodynmics, 6th ed. Cambridge univ. press. 291-292.
2. F. Bowman : Introduction to Bessel Functions, Japanese translation. 日新出版社 139-142.
3. M. R. Spiegel ; Mathematical Handbook, McGraw Hill Co. 119-126, 250, 142-143.
4. 유홍선 : 한국해양대학논문집 제3집(1969)

密閉壓力水冷式 內燃機關의 Thermostat의 特性에 關한 考察

金　　垣　　寧

A study of the characteristics of thermostat in the closed pressure cooling water system of Internal combustion Engine.

Kim Won-Young

Abstract

It is important for the best condition of Internal combustion engine to keep it's moderate temperature. Therefore, thermostatic valve is employed to control the flow of water through jackets or through a by-pass recirculating line so as to maintain constant engine temperature.

Here, several dicussions were made about the relationship between the characteristics of thermostat and engine speed, and between the over-flow from radiator pressure cap and the amount of circulating water.

＜目　次＞

1. 緒　　言
2. Thermostat의 種類와 原理
3. Thermosfat의 特性
4. Radiator pressure cap에서의 overflow가 循環量에 미치는 影響
5. 實驗裝置 및 實驗課程
6. 實驗結果
7. 結　言

1. 緒　　言

內燃機關의 性能을 最良의 狀態로 維持하기 爲하여 그 溫度를 適溫으로 保持한다는 것은 重大한 條件이다.

冷却水系는 말하자면 人體에 있어서 分泌器官과 같은 役割을 하는 것으로 表面에 나타나는 것은 적지만 極히 重要한 機能을 分擔하는 것으로서 일단 그 Balance가 維持되지 않는 限 그것이 미치는 影響은 大端히 크다.

內燃機關에 消費되는 燃料의 約 2/3는 熱 Energy로서 放出되는데 그 1/2이상은 排氣로써, 나머지는 Engine block 及 冷却裝置에서 放出된다.

따라서 Engine을 恒常 最適溫度로 維持하기 爲하여 충분한 放熱能力을 가진 System으로서 設計된 裝置의 放熱量을 適當히 制御하여야 된다. 制御方法으로써 여러가지 方法이 있지만 水冷 Engine에 있어서 冷却水溫度에 따라 熱交換器에 흐르는 水量을 制御하는 方法으로서 使用되는 制御裝置인 Thermostat의 特性에 對해서 論述하고 密閉壓力式 冷却水系에서 Radiator의 pressure Cap에서의 Over flow가 다음 循環量에 미치는 影響에 對하여 論述코저 한다.