

역삼각형의 안정화 제어에 관한 연구

오 영 석¹, 유 영 호²

A Study on the Stabilization Control of an Inverted Triangle

Y. S. Oh

Abstract

This paper presents a method for designing a control system to stand upright inverted-triangle. A linearized model is obtained from the nonlinear system by Taylor series expansion and a state controller is designed based on the model. After implementing the control system which is combined control law and estimator with reference input, experiments are carried out to stand upright inverted triangle at any angular position.

1. 서 론

본 연구의 제어대상으로서 역삼각형 구조물의 꼭지점을 고정시키지 않고 좌우로 기울어질수 있게 제작한다. 삼각형 내부의 양변에 일정 질량의 물체를 두고 DC 모터로서 이동시켜 역삼각형 무게중심이 중심축으로부터 기울어지는 각도를 제어한다. 역삼각형 운동방정식을 유도함으로서 정현,여현 성분을 가지는 비선형 시스템을 알 수 있다. 유도된 비선형 상태방정식을 Taylor 급수로 전개하여 선형화하고 선형 상태방정식을 이산상태방정식으로 변환한다. 상태피드백제어에서는 모든 상태를 알아야한다. 따라서 현재의 출력을 추정하여 현재의 상태를 예측할 수 있는 동시상태추정기(Current estimator)를 설계하여 상태를 추정하고 각배

1. 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과
2. 한국해양대학교 자동화정보공학부 교수

치법(Pole placement method)을 이용하여 피드백이득을 구한다. 동시상태추정기와 피드백이득을 이용하여 역삼각형의 중심축이 임의의 각도로 기울어 질 수 있도록 기준입력을 갖는 제어기를 설계한다. 시스템은 DC 모터와 모터 드라이브, 인텔 80C196KC를 이용한 컨트롤러와 역삼각형 구조물로 구성된다. 제어기로부터 출력되는 제어추의 위치 명령값을 내부연산에 의해 PWM값으로 변환되어 DC 모터 드라이브에 인가된다. 각 물체의 위치 정보는 10회전의 포텐쇼미터를 사용하고 각도의 계측은 1회전의 포텐쇼미터를 사용한다. 설계된 상태추정기와 제어기는 PC상에서 MATLAB를 이용하여 시뮬레이션을 수행하고, 제작된 역삼각형 시스템에 적용하여 응답실험을 행하였다.

2. 시스템의 모델링

Fig. 1에서와 같이 역삼각형 내부양변에 일정 질량의 m_L, m_R 를 두고 이를 DC 모터로서 움직일 수 있게 하여 역삼각형을 임의의 각도에 안정화할 수 있도록 한다. 역삼각형이 시계방향으로 넘어 지고 있다고 가정하고 역삼각형의 질점 m_T 가 중심축으로부터 넘어지지 않게 m_L 를 움직여서 임의의 각도 θ 에서 직립할 수 있도록 제어 하고자 한다. 시계방향을 + , 반시계방향을 - 로 정의 하고 운동 방정식을 유도한다.

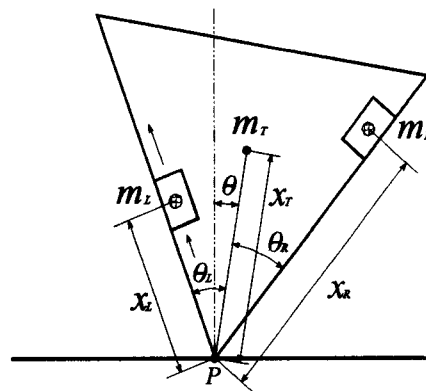


Fig. 1 Schematic diagram of inverted triangle

역삼각형이 θ 만큼 기울어졌을승력에 의한 모우먼트는

$$\Sigma M_R = m_T g x_T \sin \theta + m_R g x_R \sin(\theta_R + \theta) - m_L g x_L \sin(\theta_L - \theta) \quad (1)$$

이 되고 θ 만큼 회전하므로써 발생하는 모우먼트는

$$\Sigma M_\theta = m_T x_T^2 \ddot{\theta} + m_R x_R^2 \ddot{\theta} + m_L x_L^2 \ddot{\theta} \quad (2)$$

가 된다. 식(1)과 식(2)를 합하면

$$\begin{aligned} m_T g x_T \sin \theta + m_R g x_R \sin(\theta_R + \theta) - m_L g x_L \sin(\theta_L - \theta) \\ = - m_T x_T^2 \ddot{\theta} - m_R x_R^2 \ddot{\theta} - m_L x_L^2 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

이 되고, 여기서 회전변위 θ 가 미세하다고 하면 $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ 로 볼수 있으므로 식(3)은

$$\begin{aligned} m_T g x_T \theta + m_R g x_R \sin \theta_R + m_R g x_R \cos \theta_R \theta - m_L g x_L \sin \theta_L + m_L g x_L \cos \theta_L \theta \\ = - m_T x_T^2 \ddot{\theta} - m_R x_R^2 \ddot{\theta} - m_L x_L^2 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

로 근사화 할수 있다. 식(4)에서 $a_1 = m_T g x_T$, $c = m_R g x_R \sin \theta_R$, $b_1 = m_T x_T^2$, $a_2 = m_R g x_R \cos \theta_R$, $a_3 = m_L g \sin \theta_L$, $a_4 = m_L g \cos \theta_L$, $b_2 = m_R x_R^2$, $b_3 = m_L x_L^2$ 라고 정리 하면

$$(a_1 + a_2)\theta - (a_3 - a_4)\theta x_L + c = -b_1 \ddot{\theta} - b_2 \ddot{\theta} - b_3 x_L^2 \ddot{\theta} \quad (5)$$

가 된다.

역삼각형 시스템의 왼쪽편 m_L 를 움직이는 DC 모터에 대한 운동방정식은 Fig. 2의 스텝응답 실험을 통하여 원형2차계통의 페루프전달함수로 유도한다.

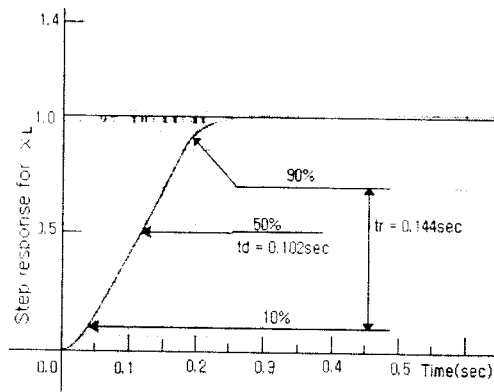


Fig. 2 Step response of the DC motor

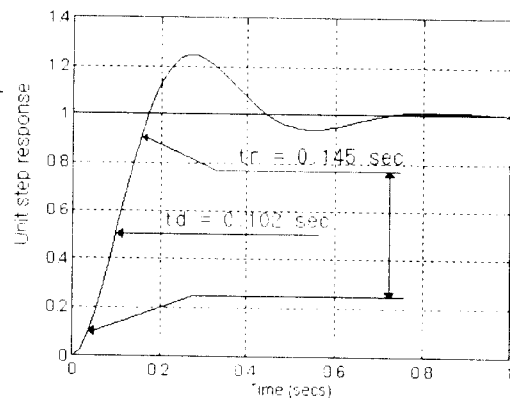


Fig. 3 Step response of DC motor model

Fig. 2로부터

$$\left. \begin{array}{l} t_r = 0.15 \text{ sec} \\ t_d = 0.10 \text{ sec} \end{array} \right\} \quad (6)$$

이 된다. 원형2차계통의 페루프전달함수는

$$\frac{X_L(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7)$$

이고 t_r, t_d 는

$$\left. \begin{array}{l} t_r = \frac{1 + 0.7\zeta}{\omega_n} \\ t_d = \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n} \end{array} \right\} \quad (8)$$

이 되며 식(6)과 식(8)로부터

$$\left. \begin{array}{l} \zeta = 0.4067 \\ \omega_n = 12.5812 \end{array} \right\} \quad (9)$$

가 된다. 식(7)과 식(9)로부터 DC 모터의 운동방정식을 유도하면

$$\ddot{x}_L + 10.252 \dot{x}_L + 158.634x_L = 158.634u \quad (10)$$

과 같다. 식(6)의 시뮬레이션 결과를 Fig. 3에 나타내었으며 Fig. 2와 Fig. 3으로부터 상승시간과 지연시간은 일치하고 있으나 오버슈트가 서로 상이하다, 이것은 실제 DC 모터 구동 프로그램에서 시작과 끝이 부근에서 가감속 프로그램으로 DC 모터 구동을 원활하게 했기 때문으로 생각된다.

$x_1 = \theta, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}, x_3 = x_L, x_4 = \dot{x}_3 = \dot{x}_L$ 로 두고 식(5)와 (10)을 상태방정식으로 정리하면 식 (11)과 같다.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{(b_1 + b_2 + b_3 x_3^2)} ((a_1 + a_2)x_1 - (a_3 - a_4 x_1)x_3 + c) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -158.63x_3 - 10.25x_4 + 158.6u \end{array} \right\} \quad (11)$$

식(11)은 비선형 시스템이므로 직립상태 $x_0(t), u_0(t)$ 에서 선형화하기 위하여 $\Delta x_i = x_i - x_{0i}$ 라 두고 Taylor 급수로 전개한 후 모든 고차항을 무시하면 아래의 식을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta u \\ y &= \mathbf{C}\Delta \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

단,

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -158. & -10. \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 158]^T, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

이 되며 여기서,

$$a_{21} = -\frac{1}{(b_1 + b_2 + b_3 x_{03}^2)} ((a_1 + a_2) + a_4 x_{03}) \quad (13)$$

$$a_{23} = \frac{(2b_3 x_{03} ((a_1 + a_2)x_{01} + c) + (a_3 - a_4 x_{01})((b_1 + b_2 + b_3 x_{03}^2) - 2b_3 x_{03}^2))}{(b_1 + b_2 + b_3 x_{03}^2)^2} \quad (14)$$

이다.

본 연구에서는 $m_T = 3.05\text{kg}$, $m_L = m_R = 0.64\text{kg}$, $g = 981\text{cm/s}^2$, $x_R = 25.0\text{cm}$, $x_T = 21.4\text{cm}$ 이며 직립상태 $x_0 = [0.0 \ 0.0 \ 25.0 \ 0.0]^T$ 가 된다. 이 직립상태에서 선사화된 식(12)의 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 는

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.00 & 0.00 \\ -0.0165 & 0.0000 & 0.2475 & 0.00 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.00 & 1.00 \\ 0.0000 & 0.0000 & -158.63 & -10.25 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 158.634 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (15)$$

가 된다. 식(12)의 연속상태방정식에서 샘플링 시간을 0.1sec로 하여 이산 상태방정식으로 변환하면

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= \mathbf{H} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

이며, 제어대상 시스템의 각 계수를 대입하면

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0.1000 & 0.0011 & 0.000 \\ -0.0016 & 0.9999 & 0.0199 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0.4863 & 0.0481 \\ 0 & 0 & -7.5958 & 0.0056 \end{bmatrix}, \Gamma = [0.0001 \ 0.0048 \ 0.5137 \ 7.5958]^T$$

$$\mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (17)$$

이 된다.

3. 제어 시스템 설계

3.1 Estimator 설계

상태 피드백 제어에서는 모든 상태를 알아야 하지만, 계측이 어렵거나 계측의 정도가 저하될 경우가 있으므로 상태추정기를 설계하여 상태를 추정하고 이 상태를 피드백하여 제어한다. 상태추정기에는 예측상태추정기, 동시상태추정기등이 있지만 본 연구에서는 예측상태추정기를 기본으로 하여 현재의 출력값으로 현재의 상태를 추정하는 동시상태추정기를 설계한다. 예측상태추정기의 구조는 Fig. 4와 같다. Fig. 4의 예측상태추정기로부터

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \Phi \bar{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + L_P [y(k) - H \bar{\mathbf{x}}(k)] \quad (18)$$

이 되고 식(16)과 식(18)로부터 $\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k)$ 라 두면

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\Phi - L_P H] \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (19)$$

이 되고 상태추정기의 오차 $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ 가 0으로 수렴하여야 한다. 식(19)의 특성방정식

$$\det(zI - \Phi + L_P H) = 0 \quad (20)$$

에서 L_P 는 상태추정기의 특성방정식의 근이 주어진다면 아크만(Ackermann)의 공식을 이용하여 구할수 있다.

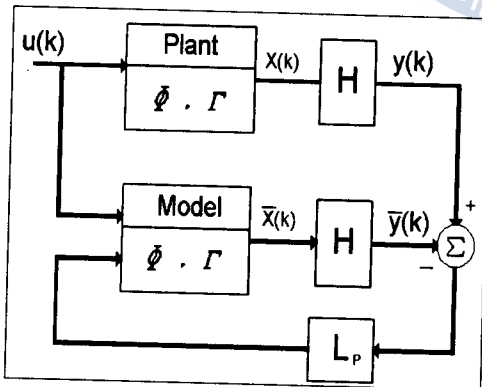


Fig.4 Prediction estimator.

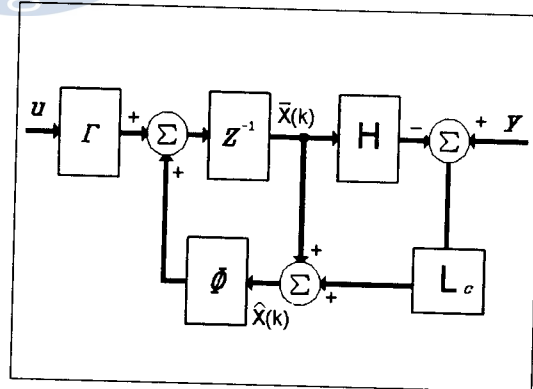


Fig. 5 Current estimator

Fig. 5에서 동시상태추정기는

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k) &= \mathbf{x}(k) + L_c [y(k) - H\hat{\mathbf{x}}(k)] \\ \hat{\mathbf{x}}(k) &= \Phi \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \Gamma u(k-1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \Phi \hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \Phi L_c [y(k) - H\hat{\mathbf{x}}(k)] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

가 되며 식(21)을 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 에 관하여 정리하면

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = [\Phi - L_c H \Phi] \hat{\mathbf{x}}(k-1) + [\Gamma - L_c H \Gamma] u(k-1) + L_c [y(k)] \quad (22)$$

이 된다. 식(16)에서 식(22)을 빼면 추정오차는

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\Phi - \Phi L_c H] \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

이 되며 식(23)의 $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ 가 0으로 수렴하여야 한다. 두 추정기의 피드백 이득

L_P, L_C 의 관계는 식(18), 식(21)로부터

$$\left. \begin{aligned} L_P &= \Phi L_C \\ L_C &= \Phi^{-1} L_P \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

가 된다. 본 연구에서의 특성방정식의 Pole을 $z=[0.1 \pm 0.01i, 0.3 \pm 0.01i]$ 에 두고

L_P, L_C 를 구하면

$$\left. \begin{aligned} L_P &= [1.6917 \quad 5.0928 \quad -106.4993 \quad 705.7342]^T \\ L_C &= [0.9975 \quad 7.975 \quad -93.844 \quad -1265.3]^T \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

이 되며 식(23)을 $\tilde{\mathbf{x}}_1(0) = 0.009$ 라디안으로 하여 시뮬레이션한 $\tilde{\mathbf{x}}_1(k), \tilde{\mathbf{x}}_3(k)$ 의 그래프는 Fig. 6과 같으며 1.0초후에 $\tilde{\mathbf{x}}$ 가 0이 되어 정확히 상태를 추종 하였음을 보여준다.

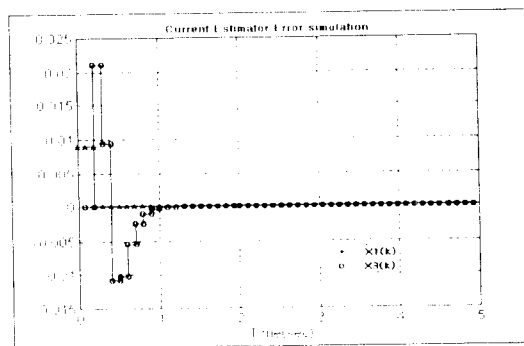


Fig. 6 Time history of $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$

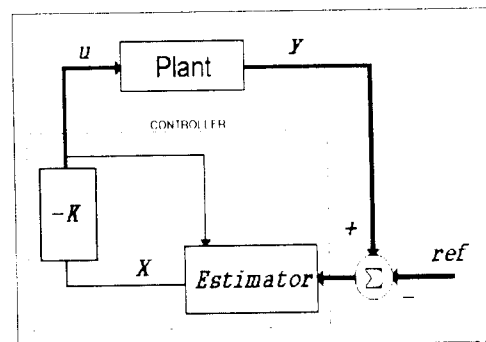


Fig. 7 Tracking control system

3.2 제어칙 설계

식(16)에서 제어칙을

$$u(k) = -Kx(k) \quad (26)$$

로 하면 식(16)은

$$x(k+1) = \Phi x(k) - \Gamma K x(k) \quad (27)$$

이 되고 이의 특성 방정식은

$$\det(zI - \Phi + \Gamma K) = 0 \quad (28)$$

이 된다. 식(28)의 K 는 시스템 특성방정식의 근이 주어지면 아크만의 공식을 이용하여 구할수 있다. 본 연구에서의 시스템 특성방정식의 근을 $0.1 \pm 0.1i, 0.3 \pm 0.01i$ 로 하면

$$K = [168.4937 \ 57.6361 \ 1.1812 \ 0.0779] \quad (29)$$

가 된다.

3.3 Reference 입력을 가지는 제어기 설계

위에서 구한 L_c, K 를 이용하여 동시상태추정기와 기준입력을 가지는 제어시스템을 설계한다. 기준입력이 있는 시스템은 Fig. 7과 같이 제어기의 입력을 시스템 출력과 기준입력의 오차라고 볼수 있으므로 식(23)에서 $u(k) = -K\hat{x}(k)$ 를 대입하면

$$\hat{x}(k) = [\Phi - \Gamma K - L_c H \Phi + L_c H \Gamma K] \hat{x}(k+1) + L_c [y(k) - ref] \quad (30)$$

이 된다.

제어대상시스템의 각 계수를 대입하면

$$[\Phi - \Gamma K - L_c H \Phi + L_c H \Gamma K] = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 \\ -8.6502 & -0.0283 & -0.0064 & 0.0005 \\ -5.6981 & -20.7641 & -0.0283 & 0.0074 \\ -35.9498 & -318.5511 & -15.3255 & -0.5960 \end{bmatrix} \quad (31)$$

이 된다.

3.4 H/W 설계

(1) MOTOR 구동부

DC 모터의 구동부는 Fig. 8과 같이 구성되어 있다. 모터의 구동은 H브릿지형의 드라이브와 마이크로프로세서 인텔80C196KC를 사용하였다. 80C196KC로부터의 PWM값을 모터의 제어 입력으로 하였다. 위치정보는 포텐쇼미터를 사용하여 10Bit로 A/D변환하여 얻어진다. A/D채널0으로부터 제어추의 위치를 피드백하여 제어기로 부터의 제어추위치명령값에 추종하도록 PWM을 발생하는 DC모터제어기를 제작하였다.

(2) 전체 시스템 구성

전체 제어 시스템의 구성은 Fig. 9와 같다. 제어기는 DC모터제어기와 병렬 통신으로 제어입력값과 출력값을 송수신한다. 또한 제어시스템은 상위 시스템과 병렬로 통신이 가능하도록 설계되었다.

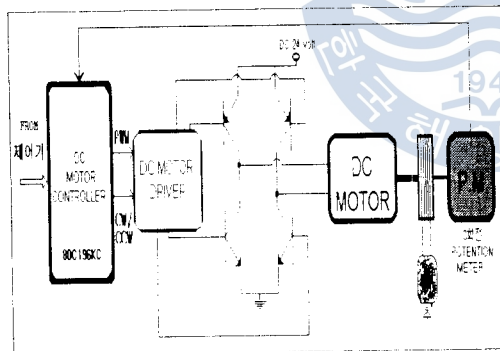


Fig. 8 DC motor driving part

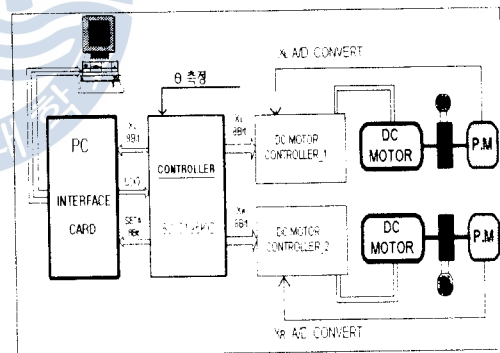


Fig. 9 Configuration of control system

4. 시뮬레이션

역삼각형은 정삼각형으로 한번의 길이가 48cm이고 제어추의 변위 한도는 25.6cm이며 제어추의 무게는 640g으로서 역삼각형의 기울기가 커지면 제어추 변위 한도를 넘게 되므로 제어가 가능한 범위내에서 시뮬레이션을 행하였다. Fig. 10은 초기상태가 0.5도 기울어졌을 때 0도로 직립할 때를 시뮬레이션한 것으로 Fig. 10은 기울어진 각도와 제어추의 위치 명령값을 그린 것이다.

Fig. 11는 초기 0도에서 기준변위각을 0.5도로 하였을때의 시뮬레이션으로 변위각과 제어추의 위치 명령값을 나타낸다.

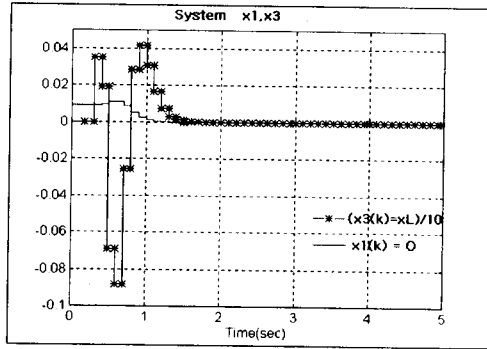


Fig. 10 Responses of $\hat{x}_1(k)$ and $\hat{x}_3(k)$ when initial condition is 0.5 degree

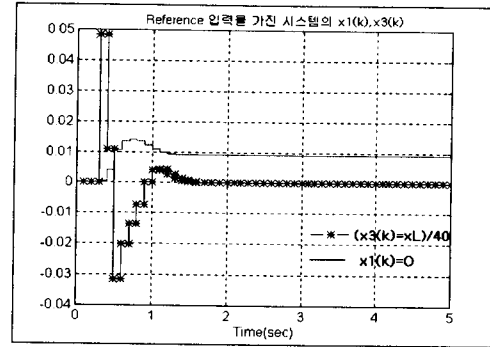


Fig.11 Responses of $\hat{x}_1(k)$ and $\hat{x}_3(k)$ when reference is 0.5 degree

5. 시스템의 응답 실험

Fig. 12는 실 시스템에서 초기위치를 0으로 하고 외란이 가해졌을 때의 응답 실험이며 Fig. 13는 목표각을 0도에서 0.5도로, 0.5도에서 0.2도로 변화하였을 때의 각변위와 DC모터에 인가되는 전압을 그린 것이다. Fig. 12, 13에서와 같이 외란이 인가된 경우나 목표치를 변경한 경우에도 만족하게 추종하여 제어되고 있음을 알 수 있다.

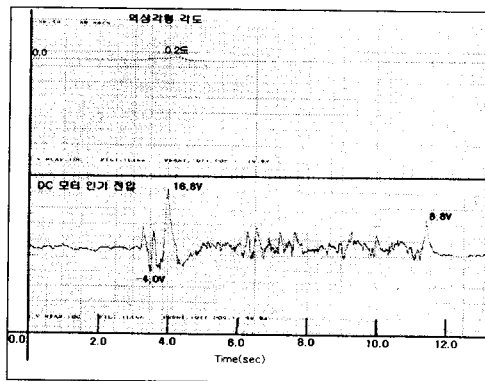


Fig. 14 Responses to a disturbance

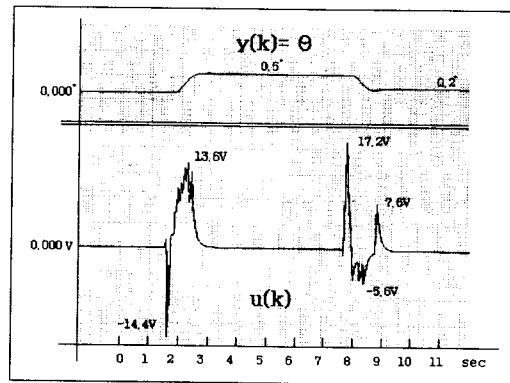


Fig. 15 Responses to reference changes

결 론

본 연구에서는 역삼각형과 같은 비선형 불안정시스템을 선형화하여 모델링하고 상태추정기를 이용한 상태피드백 제어시스템을 설계하고 구성하여 시뮬레이션과 응답실험을 통하여 원만히 제어될 수 있음을 확인하였다. 제어주 구동모터 용량의 제한과 역삼각형 크기의 제한에 의해 광범위한 각변화에 대한 응답실험을 행할 수는 없었으나, 외란이 인가되는 경우와 직립각도를 변화시키는 경우에도 원활하게 제어되는 것을 확인 할 수 있었다.

본 연구에서는 한쪽 제어추만 사용하여 실험하였으나 양쪽 제어추 모두를 사용하는 경우에는 보다 광범위한 각도변화에서도 원활히 제어될 수 있을것으로 생각 된다.

참고문헌

- 1) Gene F.Franklin and J.David Powell, "Digital Control of Dynamic Systems," Adison Wesley,1990.
- 2) Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design," Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- 3) Benjamin C. Kuo, "Automatic Control Systems," Prentice Hall, 1996.
- 4) Katsuhiko Ogata, "Modern Control Engineering," Prentice Hall, 1990.
- 5) William L. Brogan, "Modern Control Theory," Prentice Hall, 1991.
- 6) Katsuhiko Ogata, "Disrete Time Control Systems," Prentice Hall, 1991.
- 7) Bahram, Shahian and Michael, "Control SystemDesign Using MATLAB," Prentice Hall, 1993.
- 8) Ohm社, "i8096 A.프로그래밍," Ohm, 1993.
- 9) 李注憲, "모터 제어 기술," 성안당, 1996.
- 10) 河注植 劉永昊, "自動制御應用," 태화출판사, 1994.
- 11) intel, "Microcontroller Handbook," Intel, 1991.
- 12) 朴鎭鏡, "TURBO C 수치해석," 영진출판사, 1996.

