# 어떤 Wishart行列函數의 漸近分布

李　　鍾　　厚

# On the asymptotic distribution of some Wishart matrix function.

Jonghoo Lee

目　次





## Abstract

Let $nS$ be distributed as a Wishart distribution $W_q(\Sigma, n)$. The problem is to determine the asymptotic distribution of a matrix function $f(S)$ or the limiting distribution of $W=\sqrt{n}(f(S)-f(\Sigma))$ as $n\to\infty$. Let $\Sigma=(\sigma_{ij})=P\Lambda P'$ with $P=(p_{ij})\in O(q)$. It is well known (Ref. 1. p. 75) that the limiting distribution of $B=(b_{ij})=\sqrt{n}(S-\Sigma)$ is normal with mean $\mathbf{0}$ and the covariances $E(b_{ij}b_{kl})=\sigma_{ik}\sigma_{jl}+\sigma_{il}\sigma_{jk}$. Applying the

$$f(S)=f(\Sigma+\frac{1}{\sqrt{n}}B)$$

$$=f(\Sigma)+\frac{1}{\sqrt{n}}Y+O_q\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

where $Y=PXP'$, $\quad X=(x_{ij})=\alpha_{ij}(P'BP)_{ij}$

$$\alpha_{ij}=\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}, \qquad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots\lambda_q),$$

and $f$ satisfies some regularity conditions.

The above expansion means that $W$ is asymptotically distributed to the same as $Y$. Furthermove we can show that $W$ is asymptotically distributed to normal distribution with mean $\mathbf{0}$ and the covariances

$$E(w_{ij}\cdot w_{kl})=\sum_{a,b=1}^{q}\alpha_{ab}\lambda_a\lambda_b p_{ia}p_{jb}(p_{ka}p_{lb}+p_{kb}p_{la}).$$

## 1. 緖 言

$S=V/n$가 正規標本에 있어서의 不偏共分散行列이라 하면 $nS$는 Wishart分布 $W_q(\Sigma, n)$을 따른다. 攝動論을 써서 行列函數 $f(S)$또는 $W=\sqrt{n}[f(S)-f(\Sigma)]$의 漸近分布 및 共分散行列의 要素를 求하려 한다.

## 2. 補助定理

實數의 集合 $R^1$의 部分集合 $D$를 定義域으로 하는 對角行列 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_q)$, $\lambda_i \epsilon D$, $i=1,2,\cdots\cdots,q$에 對하여 $f(\Lambda)=\mathrm{diag}\ (f(\lambda_1),\cdots\cdots f(\lambda_q))$으로 定義한다. 그리고 $A$가 實對稱行列이면 $A=P\Lambda P'$, $P\epsilon O(q)$ ($O(q)$는 $q$次의 直交行列)로 表示된다. 그러므로 實對稱行列의 行列函數 $f$는

(1) $\qquad f(A)=Pf(\Lambda)P'$

로 定義된다. (Ref. 2. p. 90) 따라서 $Q=GAG'$, $G\epsilon O(q)$이면 $f(Q)=Gf(A)G'$이다.

$B$가 實對稱行列이고 $\varepsilon$이 작은 값일 때 $(A+\varepsilon B)$의 攝動의 第1次項까지의 展開를 引用하여 漸近分布를 求하고자 한다. 特히 $B=I$(單位行列)일 때의 展開는 Ferrar(1951)에 의하여 이루어졌다.

**(補助定理 1)** 實對稱行列 $A$는 $A=P\Lambda P'$, $P\epsilon O(q)$이며 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\cdots\lambda_q)$, 固有値 $\lambda_i(i=1,\cdots q)$는 相異하다고 한다. $B$가 實對稱行列일 때, 攝動項 $\varepsilon B$가 加해진 $A+\varepsilon B$의 固有値는 $\Lambda+\varepsilon\Lambda'+\varepsilon^2\Lambda''+\cdots\cdots$, 固有 Vector는 $P(I+\varepsilon R+\varepsilon^2 R'+\cdots\cdots)$로 變化한다고 하면 $\varepsilon$의 係數는 $R=(r_{ij})$, $\Lambda'=(\lambda_{ij})$ $\lambda_{ij}=0$ $(i\neq j)$, $P'BP=C=(c_{ij})$에 對하여

(2) $\qquad \lambda_{ii}=C_{ii}, \qquad r_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{\lambda_j-\lambda_i}$

으로 表示된다.

**(證明)** 假定에서 다음 式이 成立한다.

$$(A+\varepsilon B)P(I+\varepsilon R+\varepsilon^2 R'+\cdots\cdots)$$
$$=P(I+\varepsilon R+\varepsilon^2 R'+\cdots\cdots)(\Lambda+\varepsilon\Lambda'+\varepsilon^2\Lambda''+\cdots\cdots)$$

兩邊을 展開하여 $\varepsilon$의 係數를 比較하면

$$AP=P\Lambda$$
$$APR+BP=P\Lambda'+PR\Lambda$$

이다. 左邊에서 $P'$를 곱하여

$$P'BP+P'APR=\Lambda'+R\Lambda$$
$$P'BP+\Lambda R=\Lambda'+R\Lambda$$
$$P'BP=R\Lambda-\Lambda R'+\Lambda'$$

$R\Lambda-\Lambda R$의 對角要素는 0이고 $(i,j)$要素는 $r_{ij}\lambda_j-\lambda_i r_{ij}$이다. 그리고

$$P'BP=(c_{ij}), \qquad \Lambda'=(\lambda_{ij}), \qquad \lambda_{ij}=0\ (i\neq j)$$

이므로

$$\lambda_{ii}=C_{ii}, \qquad C_{ij}=(\lambda_j-\lambda_i)r_{ij}$$
$$r_{ij}=\frac{C_{ij}}{\lambda_j-\lambda_i} \qquad (i\neq j)$$

를 얻는다. 여기서 $r_{ii}=0$으로 定하면 行列 $R$은 定해진다. 以上으로서 攝動項 $\varepsilon B$에 依하여 生기는 固有値와 固有 Vector의 變化는 적어도 第一近似項까지는 求해진다.

微分可能한 行列函數 $f(A)$에서 $A$에 攝動項 $\varepsilon B$가 加해졌을 때, 一次 攝動을 求해본다.

**(補助定理2)** 函數 $f$는 定義域 $D$에서 連續微分可能이고 行列 $A$의 固有値 $\lambda_i$가 相異하다고 한다. 對稱行列 $A$에 對하여 $\varepsilon>0$일 때,

(3) $$f(A+\varepsilon B)=f(A)+\varepsilon PXP'+O(\varepsilon)$$

단 $X=(x_{ij})$, $x_{ij}=c_{ij}\cdot\alpha_{ij}$, $C=(c_{ij})=P'BP$ 그리고

(4) $$\alpha_{ij}=\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j} \quad (i\neq j)$$
$$=f'(\lambda_i) \quad (i=j)$$

이다.

**(證明)** 行列 $A$의 增分 $\varepsilon B$에 對한 固有値 $\lambda_i$와 固有 Vector $P_i$의 增分을 各各 $\Delta\Lambda=\text{diag}(\Delta\lambda_1, \cdots\cdots\Delta\lambda_q)$, $\Delta P=\{\Delta \boldsymbol{P}_1, \cdots\cdots\Delta \boldsymbol{P}_q\}$이라 한다. 그리고 $f(A)$, $f(\lambda_i)$ 및 $f(\Lambda)$의 增分을 各各 $\Delta f(A)$, $\Delta f(\lambda_i)$ 및 $\Delta f(\Lambda)$라 하면 定義에 의하여 $\Delta f(\Lambda)=\text{diag}(\Delta f(\lambda_1)\cdots\cdots\Delta f(\lambda_q))$이고

(5) $$\Delta f(\lambda)=f'(\lambda_i)\Delta\lambda_i+O(\varepsilon)$$

으로 表示된다. (1)에서

(6) $$\Delta f(A)=f(A+\varepsilon B)-f(A)$$
$$=\Delta Pf(\Lambda)P'+P\Delta f(\Lambda)P'+Pf(\Lambda)\Delta P'+O(\varepsilon)$$

固有値와 固有 Vector의 攝動展開를 利用하여

(7) $$\Delta\lambda_i=\varepsilon\ c_{ii}+O(\varepsilon), \qquad \Delta P=\varepsilon PR+O(\varepsilon)$$

그리고 $R=(r_{ij})$는 歪對稱行列로서 다음과 같이 決定된다.

$$r_{ii}=0, \qquad r_{ij}=\frac{c_{ij}}{\lambda_j-\lambda_i}, \quad i\neq j$$

(5), (7)을 (6)에 代入하면

$$\Delta f(A)=P[\varepsilon Rf(\Lambda)+\Delta f(\Lambda)-\varepsilon f(\Lambda)R']P'+O(\varepsilon)$$
$$=\varepsilon PXP'+O(\varepsilon)$$

을 얻는다.

**(補助定理3)** $nS=V(n)$, $V(n)=\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{x}_\alpha-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_\alpha-\bar{\boldsymbol{x}})'$, $n=N-1$, $\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\cdots\cdots\boldsymbol{x}_N$, 은 서로 獨立으로 正規分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $\Sigma=(\sigma_{ij})$를 따른다. 이 때 $B(n)=(b_{ij})=\sqrt{n}(S-\Sigma)=\frac{1}{\sqrt{n}}(V-n\Sigma)$의 漸近分布는 正規分布 $N(\boldsymbol{O}, \Psi)$이고 $\Psi$의 要素는

(8) $$E(b_{ij}\cdot b_{kl})=\sigma_{ik}\sigma_{jl}+\sigma_{il}\sigma_{jk}$$

이다. (Ref. 1 p. 75).

$(m, n)$行列 $A=(a_{ij})$, $(p, q)$行列 $B=(b_{ij})$의 Kronecker Product를

(9) $$A\otimes B=\begin{pmatrix} Ab_{11}\cdots\cdots Ab_{1q} \\ \cdots\cdots \\ Ab_{p1}\cdots\cdots Ab_{pq}\end{pmatrix}$$

으로 定義하면 다음 定理가 成立한다.

**(補助定理 4)** 行列 $A(m, n)$, $A'(n, p)$ $B(m', n')$, $B'(n', p')$에 對하여 Kronecker Product는

$$(AA')\otimes(BB')=(A\otimes B)(A'\otimes B')$$

이다. 따라서 $Y=PXP'$이면

(10) $$Y\otimes Y=(P\otimes P)(X\otimes X)(P'\otimes P')$$

이다.

여기서 $Y\otimes Y$의 要素를 살펴보면 $Y=PXP'$의 $(i, j)$要素 $y_{ij}$는 $P$의 $i$行과 $P'$의 $j$列로 決定되고 $Y=PXP'$의 $(k, l)$要素 $y_{kl}$은 $P$의 $k$行, $P'$의 $l$列로 決定되므므 $P\otimes P$에서는 行에 관해서 $i$째 小行列의 $k$째 行과 $P'\otimes P'$에서는 列에 관해서 $j$째 小行列의 $l$째 列에 관계된다. 따라서 $Y\otimes Y$의 $y_{ij}y_{kl}$ 즉$(i, j)$, $(k, l)$要素는 $(P\otimes P)(X\otimes X)(P'\otimes P')$에서 行의 $i$째 小行列의 $k$째 行과 列의 $j$째 小行列의 $l$째 列의 交叉点의 要素이다. 이것을 $(i_k, j_l)$要素라 하자.

## 3. 漸近分布

$nS$를 Wishart 分布 $W_q(\Sigma, n)$을 따르는 確率行列이라 하고, 行列函數 $f(S)$ 또는 $W=\sqrt{n}[f(S)-f(\Sigma)]$의 漸近分布를 考察하자.

$\Sigma=(\sigma_{ij})=P\Lambda P'$, $\Lambda=\text{diag}(\lambda_1, \cdots\cdots\lambda_q)$, $P\in O(q)$라 하면 補助定理들에 依하여 다음 定理를 얻는다

**(定理)** $S$는 $nS$가 Wishart 分布 $W_q(\Sigma, n)$을 따르는 確率行列이라 하고 $\Sigma=P\Lambda P'$, $P=(p_{ij})\in O(q)$으로 둔다. $f$가 連續微分可能이면 $W=(w_{ij})=\sqrt{n}[f(S)-f(\Sigma)]$, $n\to\infty$의 極限分布는 平均値 0인 正規分布를 하며 共分散은

$$(11)\qquad E(w_{ij}\cdot w_{kl})=\sum_{a,b=1}^{q}\alpha^2{}_{ab}\lambda_a\lambda_b p_{ia}p_{jb}(p_{ka}p_{lb}+p_{kb}p_{la})$$

이다. 단 $\alpha_{ab}$는 (4)로 주어진다.

**(證明)** 攝動定理 즉 補助定理2, 3에 依하여

$$(12)\qquad f(S)=f(\Sigma+\frac{1}{\sqrt{n}}B)$$

$$=f(\Sigma)+\frac{1}{\sqrt{n}}Y+O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

단 $Y=PXP'$, $X=(x_{ij})$, $x_{ij}=\alpha_{ij}(P'BP)_{ij}$, $\alpha_{ij}$는 (4)로 주어진다.

(12)에서 $W$의 極限分布는 $Y$의 分布와 같다. 그리고 $X$는 $B$의 一次結合이고 $B$가 平均値 0인 正規分布이므로 $B$의 一次結合으로 된 $X$의 平均値도 0이다. 즉,

$$E(X)=\mathbf{0},\ E(x_{ij})=0,\ i,\ j=1,\cdots\cdots q.$$

그리고 $Y$는 $X$의 一次結合이므로

$$(13)\qquad E(Y)=\mathbf{0}$$

임은 明白하다. 問題는 $Y$의 分散 $E(y_{ij}y_{kl})=E(w_{ij}\cdot w_{kl})$을 求하는데 있다. 이를 求하는데 있어서 다음과 같이 4단계로 나누어 유도한다.

(Ⅰ) 假定에서

$$\Lambda=P'\Sigma P=\left(\sum_{\beta}\sum_{\alpha}p_{\alpha i}\sigma_{\alpha\beta}p_{\beta k}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q\end{bmatrix}$$

이므로

$$(14)\qquad \sum_{\alpha}\sum_{\beta}p_{\alpha i}\sigma_{\alpha\beta}p_{\beta j}=\lambda_i\delta_{ij},\qquad i,\ j=1,\cdots\cdots,p.$$

단 $\delta_{ij}$는 Kronecker delta이다.

(Ⅱ) $E(X\otimes X)$을 求하자.

$$X=(x_{ij})=\left(\alpha_{ij}\sum_{\rho}\sum_{\alpha}p_{\alpha i}b_{\alpha\beta}p_{\beta j}\right)$$

$$X\otimes X=(Xx_{ij})=\left(X\alpha_{ij}\sum_{\beta}\sum_{\alpha}p_{\alpha i}b_{\alpha\beta}p_{\beta j}\right)$$

이고 $P$가 定數行列이므로

$$E(Y\otimes Y)=(P\otimes P)E(X\otimes X)(P'\otimes P') \tag{15}$$

이다.

다음에 $E(X\otimes X)$를 求해보자.

$$\begin{aligned}x_{ij}x_{kl}&=\alpha_{ij}\alpha_{kl}\sum_{\alpha}\sum_{\beta}p_{\alpha i}b_{\alpha\beta}p_{\beta j}\sum_{\mu}\sum_{\nu}p_{\nu k}b_{\nu\mu}p_{\mu l}\\&=\alpha_{ij}\alpha_{kl}\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\nu}\sum_{\mu}p_{\alpha i}p_{\beta j}p_{\nu k}p_{\mu l}b_{\alpha\beta}b_{\nu\mu}\end{aligned}$$

$E(b_{\alpha\beta}\cdot b_{\nu\mu})=\sigma_{\alpha\nu}\sigma_{\beta\mu}+\sigma_{\alpha\mu}\sigma_{\beta\nu}$이므로

$$\begin{aligned}E(x_{ij}x_{kl})&=\alpha_{ij}\alpha_{kl}\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\nu}\sum_{\mu}p_{\alpha i}p_{\beta j}p_{\nu k}p_{\mu l}E(b_{\alpha\beta}\cdot b_{\nu\mu})\\&=\alpha_{ij}\alpha_{kl}\left\{\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\nu}\sum_{\mu}p_{\alpha i}p_{\beta j}p_{\nu k}p_{\mu l}\sigma_{\alpha\nu}\sigma_{\beta\mu}\right.\\&\qquad\left.+\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\nu}\sum_{\mu}p_{\alpha i}p_{\beta j}p_{\nu k}p_{\mu l}\sigma_{\alpha\nu}\sigma_{\beta\mu}\right\}\end{aligned}$$

(14)에 의하여

$$\sum_{\mu}\sum_{\beta}\left(\sum_{\alpha}\sum_{\nu}p_{\alpha i}p_{\nu k}\sigma_{\alpha\nu}\right)\sigma_{\beta\mu}p_{\beta j}p_{\mu l}=\begin{cases}0 & i\neq k\\0 & j\neq l\\\lambda_i\lambda_j & i=k,\ \ j=l\end{cases}$$

$$\sum_{\beta}\sum_{\nu}\left(\sum_{\alpha}\sum_{\mu}p_{\alpha i}p_{\mu l}\sigma_{\alpha\beta}\right)\sigma_{\beta\nu}p_{\beta j}p_{\nu k}=\begin{cases}0 & i\neq l\\0 & j\neq k\\\lambda_i\lambda_j & i=l,\ \ j=k\end{cases}$$

이므로 다음 式을 얻는다.

$$E(x_{ij}\cdot x_{kl})=\begin{cases}\alpha_{ij}\alpha_{ij}\lambda_i\lambda_j & i=k,\quad j=l\\\alpha_{ij}\alpha_{ji}\lambda_i\lambda_j & i=l,\quad j=k\\\alpha_{ii}\alpha_{ii}\lambda_i\lambda_i+\alpha_{ii}\alpha_{ii}\lambda_i\lambda_i & i=j=k=l\\0 & i\neq k\ \text{or}\ i\neq l\ \text{or}\ j\neq k\ \text{or}\ j\neq l\end{cases} \tag{16}$$

이 結果를 利用하면

$$E(X\otimes X)=\begin{pmatrix}E(x_{1l}X)\cdots\cdots E(x_{lk}X)\cdots\cdots E(x_{lq}X)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\E(x_{i_l}X)\cdots\cdots E(x_{ik}X)\cdots\cdots E(x_{iq}X)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\E(x_{q^l}X)\cdots\cdots E(x_{qk}X)\cdots\cdots E(x_{qq}X)\end{pmatrix}$$

의 各 小行列의 값은

$$E(x_{ij}X)=\begin{array}{c}\\ \\ i)\\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c}\qquad\qquad i\\\begin{pmatrix}0\cdots\cdots\cdots 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\0\cdots\alpha^2_{ii}(\lambda^2_i+\lambda^2_i)\cdots 0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\0\cdots\cdots\cdots 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\end{pmatrix}\end{array}\quad(i=1,\ \cdots,\ q)$$

$$E(x_{ik}X)=\begin{array}{c}\\ \\ \\ i)\\ \\ k)\\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c}\qquad i\qquad\qquad k\qquad\\\begin{pmatrix}0\cdots\cdots 0\cdots\cdots 0\cdots\cdots 0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\0\cdots\cdots 0\cdots\cdots\alpha^2_{ik}\lambda_i\lambda_k\cdots\cdots 0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\0\cdots\cdots\alpha^2_{ik}\lambda_i\lambda_k\cdots\cdots 0\cdots\cdots 0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\0\cdots\cdots 0\cdots\cdots 0\cdots\cdots 0\end{pmatrix}\end{array}\quad(i\neq k)$$

으로 表示된다.

(Ⅲ) $(P\otimes P)E(X\otimes X)$의 要素를 考察하자.

$(P\otimes P)E(X\otimes X)$

$$=\begin{pmatrix} p_{11}P\cdots\cdots p_{1j}P\cdots\cdots p_{1q}P \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{v1}P\cdots\cdots p_{ij}P\cdots\cdots p_{iq}P \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{q1}P\cdots\cdots p_{q1}P\cdots\cdots p_{qq}P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(x_{11}X)\cdots\cdots E(x_{1j}X\cdots\cdots E(x_{1q}X) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ E(x_{q1}X)\cdots\cdots E(x_{qj}X)\cdots E(x_{qq}X) \end{pmatrix}$$

의 $i$行의 小行列

$$\sum_{a=1}^{q} p_{ia}PE(x_{a1}X), \qquad \sum_{a=1}^{q} p_{ia}PE(x_{aj}X), \qquad \sum_{a=1}^{q} p_{ia}PE(x_{aq}X)$$

의 $k$行의 값은 各各 다음과 같다.

$$\sum_a p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{a1}\lambda_a\lambda_1+p_{i1}p_{k1}\alpha^2{}_{11}\lambda^2{}_1,\ \ p_{i2}p_{k1}\alpha^2{}_{12}\ \lambda_1\lambda_2,\ \cdots\cdots$$

$$\cdots,\ \ p_{ij}p_{k1}\alpha^2{}_{j2}\lambda_j\lambda_1,\cdots\cdots,p_{iq}p_{k1}\alpha^2{}_{q1}\lambda_q\lambda_1$$

$$p_{i1}p_{kj}\alpha^2{}_{1j}\lambda_1\lambda_j,\ \ p_{i2}p_{kj}\alpha^2{}_{2j}\lambda_2\lambda_j,\cdots\cdots$$

$$\cdots,\ \sum_a p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{aj}\lambda_a\lambda_j+p_{ij}p_{kj}\alpha^2{}_{jj}\lambda^2{}_j,\ \ \cdots\cdots,p_{iq}p_{kj}\alpha^2{}_{qj}\lambda_q\lambda_j.$$

$$p_{i1}p_{kq}\alpha^2{}_{1q}\lambda_1\lambda_2,\ \ p_{i2}p_{kq}\alpha^2{}_{2q}\lambda_2\lambda_q,\cdots\cdots,\ \ p_{ij}p_{kq}\alpha^2{}_{jq}\lambda_jp_q,\cdots\cdots$$

$$\cdots,\ \sum_a p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{aq}\lambda_a\lambda_q+p_{iq}p_{kq}\alpha^2{}_{qq}\lambda^2{}_q$$

(Ⅳ) 끝으로 $E(y_{ij}\cdot y_{kl})$을 求하자.

$Y\otimes Y$의 $y_{ij}y_{kl}$ 要素 即 $((i,j),(k,l))$要素는 $(P\otimes P)(X\otimes X)(P'\otimes P')$의 $(i_k,\ j_l)$要素이므로 다음의 結果를 얻는다.

$$\begin{aligned}E(y_{ij}\cdot y_{kl})=&\Big(\sum_a p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{a1}\lambda_a\lambda_1+p_{i1}p_{k1}\alpha^2{}_{11}\lambda^2{}_1\Big)p_{j1}p_{l1}\\
&+p_{i2}p_{k1}\alpha^2{}_{21}\lambda_1\lambda_2p_{j1}p_{l2}+\cdots\cdots+p_{iq}p_{k1}\alpha^2{}_{1q}\lambda_1\lambda_qp_{j1}p_{lq}\\
&+p_{i1}p_{k2}\alpha^2{}_{12}\lambda_1\lambda_2p_{j2}p_{l1}+\Big(\sum_a p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{a2}\lambda_a\lambda_2+p_{i2}p_{k2}\alpha^2{}_{22}\lambda^2{}_2\Big)p_{j2}p_{l2}\\
&+\cdots\cdots+p_{iq}p_{q2}\alpha^2{}_{q2}\lambda_q\lambda_2p_{j2}p_{lq}+\cdots\cdots\\
&+p_{\ 1}p_{kj}\alpha^2{}_{1j}\lambda_1\lambda_jp_{jj}p_{l1}+p_{v2}p_{kj}\alpha^2{}_{2j}\lambda_2\lambda_jp_{jj}p_{l2}+\cdots\cdots\\
&+\Big(\sum_a p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{aj}\lambda_a\lambda_j+p_{ij}p_{kj}\alpha^2{}_{jj}\lambda^2{}_j\Big)p_{jj}p_{lj}+\cdots\\
&+p_{i1}p_{kq}\alpha^2{}_{1q}\lambda_q\lambda_1p_{jq}p_{l1}+p_{i2}p_{kq}\alpha^2{}_{2q}\lambda_q\lambda_2p_{jq}p_{l2}+\cdots\cdots\\
&+\cdots\cdots+\Big(\sum_a p_{ia}p_{qa}\alpha^2{}_{aq}\lambda_a\lambda_q+p_{jq}p_{qq}\alpha^2{}_{qq}\lambda^2{}_q\Big)p_{iq}p_{lq}\\
&=\sum_b\sum_a p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{ab}\lambda_a\lambda_bp_{jb}p_{lb}+\sum_b p_{ib}p_{k1}\alpha^2{}_{b1}\lambda_1\lambda_bp_{j1}p_{lb}\\
&+\sum_b p_{ib}p_{k2}\alpha^2{}_{b2}\lambda_2\lambda_bp_{j2}p_{lb}+\cdots\cdots+\sum_b p_{ib}p_{kj}\alpha^2{}_{bj}\lambda_b\lambda_jp_{jj}p_{lb}\\
&+\cdots\cdots+\sum_b p_{ib}p_{kq}\alpha^2{}_{bq}\lambda_b\lambda_qp_{jq}p_{lb}\end{aligned}$$

$$=\sum_a\sum_b p_{ial}p_{ka}\alpha^2{}_{ab}\lambda_a\lambda_bp_{jb}p_l{}^q+\sum_a\sum_b p_{ib}p_{ka}\alpha^2{}_{ba}\lambda_a\lambda_bp_{ja}p_{lb}$$

$$=\sum_a\sum_b p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{ab}\lambda_a\lambda_bp_{jb}p_{lb}+\sum_a\sum_b p_{ia}p_{ka}\alpha^2{}_{ab}\lambda_a\lambda_bp_{jb}p_{la}$$

$$=\sum_a\sum_b p_{ia}\alpha^2{}_{ab}\lambda_a\lambda_bp_{jb}\ (p_{ka}p_{lb}+p_{kb}p_{la}).$$

(系) 共分散行列 $\Sigma$가 $\Sigma=\Lambda$(對角行列)이면 $w_{ij}$와 $w_{kl}$의 共分散의 漸近값은

$$E(w_{ij}\cdot w_{kl})=\alpha_{ij}\alpha_{kl}\lambda_i\lambda_j(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

이다.

**(證明)** $\Sigma=\Lambda$이므로 $P'\Sigma P=\Lambda$으로 두면 $P=I$이다. 따라서 $x_{ij}=\alpha_{ij}(P'BP)_{ij}=\alpha_{ij}b_{ij}$이다. 그러므로

$$X=(\alpha_{ij}b_{ij}).$$
$$x_{ij}\cdot x_{kl}=\alpha_{ij}\alpha_{kl}b_{ij}b_{kl}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}E(x_{ij}x_{kl})&=\alpha_{ij}\alpha_{kl}E(b_{ij}b_{kl})\\&=\alpha_{ij}\alpha_{kl}(\sigma_{ik}\sigma_{jl}+\sigma_{il}\sigma_{jk})\\&=\alpha_{ij}\alpha_{kl}\lambda_i\lambda_j(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\end{aligned}$$

를 얻는다.

## 參 考 文 献


1. Anderson, T. W. (1958). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley. & Sons. New York.
2. Bellman, R. (1960). Introduction to Matrix Analysis. McGraw Hill. New York.
3. Ferrar. W. L. (1951). Finite Matrices. Clarender Press. Oxford.
4. 北川敏男 多變量解析論(1966). 共立社.