若干의 待期行列과 待期時間

李　　鍾　　厚

Some Waiting Lines and the Waiting Times

Lee Jong-Hoo

〈目　次〉

Abstract

A single server with exponential servicing time distribution (density $f(t)=\mu e^{-\mu t}$) and the incoming traffic to be Poisson, that is, the inter-arrival times are independent with density $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda<\mu$ are given.

Arriving customers join a "Waiting line" and are served in order of arrival without interruption.

The probability of n customers in the waiting line equals qp^n with $p=\lambda/\mu$.

Assuming this steady state we see that the total time T spent by a customer at the server is a random variable with density $w(t)=(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}$ and expectation $E(T)=1/(\mu-\lambda)$.

A bus is supposed to appear every hour on the hour, but is subject to delays.

Denote by T_x the waiting time of a person arriving at epoch $x<1$. Here the epoch x of arrival is a free parameter. For example, for person arriving "at random" the epoch of arrival is a random variable distributed uniformly in $\overline{0,1}$. The expected waiting time in the case equals $\frac{1}{2}+\sigma^2$ where σ^2 is the variance of the delay.

1. 無作爲化

F를 파라미터 θ에 의존하는 分布函數라 하고, u는 하나의 密度函數라 하자. 이 때

$$W(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} F(x,\theta)\ u(\theta)\ d\theta \tag{1}$$

는 0에서 1까지 增加하는 λ의 單調函數이므로 하나의 分布函數이다. F가 連續인 密度 f를 가지면 W는

$$w(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x:\theta)\ u(\theta)d\theta \tag{2}$$

로 주어지는 密度를 가진다. 密度 u가 連續이 아니고 離散分布일 때 卽 θ_1, θ_2, …가 임의로 選擇되고 $p_k \geqq 0$, $\Sigma p_k=1$ 이면 다음과 같이 合하여도 된다.

$$w(x)=\sum_k f(x:\ \theta_k)\ p_k \tag{3}$$

는 새로운 確率密度를 定한다. 이 方法은 確率的으로는 無作爲化이다.

若干의 待期行列에 있어서 客이 들어오는 境過를 無作爲化하여 客이 待期하는 時間의 期待값을 求해보자.

다음 補助定理 1,2는 母數 λ의 Poisson 到着, 母數 μ의 指數分布 서어비스의 경우라 假定한다.

[補助定理 1] 無數히 많은 回線 또는 通信路가 있을 때 n回線이 通話될 確率을 p_n이라 하고 定常狀態分布를 假定하면 文獻 [3] (一卷 P377)에 의하여

$$p_n=e^{-\frac{\lambda}{n}}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \tag{4}$$

을 얻는다. 그러므로 極限分布는 母數 λ/μ의 Poisson 分布이다. 그것은 初期狀態에 無關係하다.

[補助定理 2] a個의 回線(通信路)이 있을 때 n번째 사람이 通話될 確率 p_n은 平衡狀態를 假定할 때

$$\begin{aligned} p_n &= p_0\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & n\leq a \\ &= p_0\frac{(\lambda/\mu)^n}{a!\ a^{n-a}} & n\geq a \end{aligned} \tag{5}$$

이다. $\lambda/\mu < a$ 일 때 收斂한다. 特히 $n=1$ 이면 $p_n=qp^n, p=\lambda/\mu$, $p+q=1$이다. ([2]의 p192).

2. 待期行列

[I] 無作爲合, X_1, X_2, …는 共通의 密度 f를 가지는 서로 獨立인 確率變數라 하자. 合 $S_n=X_1+\cdots+X_n$의 密度는 f^{n*} 卽 f와 그 自身과의 n回 重疊을 갖는다. 項의 數 n은 確率分布 $P\{N=n\}=p_n$에 의하여 無作爲化되는 파라미터이다. 단 事象 $\{N>n-1\}$이 일어나는 것은, n個의 組 X_1, …,

X_n의 最大項이 最初의 位置에 일어나는 것과 同等事象이다.

無作爲化한 項數 N을 가지는 合 S_N의 密度는

$$w=\sum_{1}^{\infty} p_n f^{n*} \tag{6}$$

이다. 지금 $\{p_n\}$을 幾何分布 $p_n=qp^{n-1}$을 取하고, f로서 指數密度를 取하면

$$f^{n*}=\alpha\frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}\ e^{-\alpha x} \qquad x>0 \ ^{(3)} \tag{7}$$

으로 주어진다. 따라서

$$w(t)=q\alpha e^{-\alpha x}\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}\frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}=q\alpha e^{-\alpha q x} \tag{8}$$

이다.

[Ⅱ] 待期行列에 관한 應用, 指數型, 서어비스 時間分布(密度 $f(t)=\mu e^{-\mu t}$)를 가지고 窓口가 하나인 境遇를 생각한다. 들어오는 사람의 數는 Poisson 分布 卽 到着時間 間隔은 獨立이고 密度 $\lambda e^{-\lambda t}$ $(\lambda<\mu)$를 가진다고 假定하자. 補助定理2 에서 n人의 客이 待期하고 있을 確率은 $qp^n(p=\lambda/\mu)$이며, 여기서 $n=0,1,\cdots$이다. 지금 時點 t에 到着하는 손님을 생각하자.

이 사람이 窓口에서 消費하는 時間의 總合 T는 이 사람 自身의 서어비스 時間에 待期行列內의 이 사람앞에 있는 n人의 客의 서어비스 時間을 合한 것이다. 그러므로 T의 密度는

$$f^{(n+1)*}(t)=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\mu^{n+1}\ t^n e^{-\mu t} \tag{9}$$

이다. 待期行列에 대해서 定常狀態分布를 假定하면 無作爲化한 앞 例 [I]의 경우는 客이 窓口에서 消費하는 時間의 總合은 다음과 같다

$$w(t)=q\mu e^{-\mu t}\sum_{n=0}^{\infty} p^n\frac{(\mu t)^n}{n!}=q\mu e^{-(1-p)\mu t}=(\mu-\lambda)\ e^{-(\mu-\lambda)t} \tag{10}$$

그러므로

$$E(T)=\int_0^\infty t(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}\ dt=\frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (\mu>\lambda).$$

[定理 1] 버스가 1時間 間隔으로 0分에 오기로 되어있으나 延着을 免할 수 없다. 各 遲延時間 X_k를 共通의 分布 F와 密度 f를 가지는 獨立인 確率變數라 하고 $0\leqq X_k\leqq 1$이라 한다. 한 時點 $x(0<x<1)$에 到着한 사람의 待期時間을 T_x로 表示하면 T_x의 期待값은

$$E(T_x)=F(x)\ (\mu+1-x)+\int_0^{1-x} tf(t+x)\ dt$$

이다. 단 $\mu=E(X_k)$.

(證明) 어떤 時 0分에 到着豫定한 버스가 지나간 確率은 $F(x)$이다. 그리고

$$P\{T_x\leq t\}=\begin{cases} F(t+x)-F(x) & 0<t<1-x \\ 1-F(x)+F(x)F(t+x-1) & 1-x<t<2-x, \end{cases} \tag{11}$$

$t>2-x$이면 $P\{T_x\leq t\}=1$이고 密度는

$$\begin{cases} f(t+x) & 0<t<1-x \\ F(x)\ f(t+x-1) & 1-x<t<2-x \end{cases} \tag{12}$$

이다. 그러므로 $F(0)=0$, $F(1)=1$ 이며

$$\int_{1-x}^{2-x} tF(x)\ f(t+x-1)dt = F(x)\int_{1-x}^{2-x} tf(t+x-1)\ dt$$

$$=F(x)\int_0^1 (z+1-x)\ f(z)dz \quad (t+x-1=z)$$

$$=F(x)\left\{\Big[(z+1-x)\ F(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 F(z)dz\right\}$$

$$=F(x)\ (2-x) - F(x)\int_0^1 F(z)dz$$

$$\int_0^1 F(z)dz = \Big[zF(z)\Big]_0^1 - \int_0^1 zf(z)dz = 1 - \int_0^1 zf(z)dz$$

$$\therefore \int_{1-x}^{2-x} tF(x)\ f(t+x-1)dt = F(x)(2-x) - F(x) + F(x)\int_0^1 zf(z)dz$$

$$=F(x)\ (\mu+1-x) \quad \left(\mu=\int_0^1 zf(z)dz\right)$$

$$\therefore E(T_x) = \int_0^{1-x} tf(t+x)dt + \int_{1-x}^{2-x} tF(x)\ f(t+x-1)dt$$

$$=F(x)\ (\mu+1-x) + \int_0^{1-x} tf(t-x)dt.$$

[定理 2] 到着時點 x를 $0\leqq x\leqq 1$에서 無作爲化한 待期時間 T의 期待값은 $E(T)=\frac{1}{2}+\sigma^2$이다. 여기의 σ^2은 遲延時間의 分散이다. 다시 말하면 待期時間의 期待값은 버스가 延着하지 않을 때 最小가 되고 遲延時間의 分散의 增加와 더부러 增大한다.

(證明) 無作爲로 到着하는 사람의 到着時點은 區間 [0.1] 위의 平等分布를 하는 確率變數이다. 그러므로 이 때의 待期時間 T는 T_x를 無作爲化 한 것이며 T의 期待값은

$$E(T) = E\{E(T_x)\} = \int_0^1 (\mu+1-x)\ F(x)dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} (t-x)\ dt\ dx$$

이다.

$$\int_0^1 (\mu+1-x)\ F(x)\ dx = (\mu+1)\int_0^1 F(x)\ dx - \int_0^1 xF(x)dx$$

$$=(\mu+1)\ \{[xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xf(x)\ dx\} - [\frac{x^2}{2}\ F(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)\ dx$$

$$=\mu+1-\mu^2-\mu-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha_2-\mu^2 \quad \left(\alpha_2=\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

$\int_0^1 \{\int_0^{1-x} tf(t+x)dt\}dx$는 먼저 密度$f(t+x)$를 無作爲化한다. 卽 區間 [0,1]에서 平等分布를 하므로

$$w(t) = \int_0^1 f(x+t)\ dx = \Big[F(x+t)\Big]_0^1 = F(1+t) - F(t)$$

이고 $t>0$ 일 때 $F(t+1)=1$ 이므로

$$w(t) = 1 - F(t)$$

$$\therefore \int_0^1 tw(t)dt = \int_0^1 t(1-F(t))dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2}\ F(t)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 t^2 f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha_2=\frac{1}{2}\alpha_2$$

$$\therefore\ E(T)=\frac{1}{2}+\alpha_2-\mu^2=\frac{1}{2}+\sigma^2.$$

參 考 文 獻

1. 國澤淸典，近代確率論(1959)，岩波全書，142.
2. 依田 浩，技術者の OR入門(1976)，朝倉書店.
3. W. Feller. An Intro. to Probability Theory and Its Applications. Ⅰ, Ⅱ 1957. John Wiley.