

# 스케일 공간 필터링과 PCM 알고리듬을 이용한 칼라 영상 분할에 관한 연구

원 종 운<sup>1)</sup>, 조석제<sup>2)</sup>

## A Study on the Color Image Segmentation Using the Scale Space Filtering and the Possibilistic C-Means Algorithms

Jong-Un Won, Seok-Je Cho

### Abstract

This paper presents a segmentation algorithm for the color images based on the scale space filtering(SSF) and the possibilistic c-means(PCM) algorithm. The fuzzy c-means(FCM) algorithm which has used extensively in the color image segmentation uses the probabilistic constraint that the membership functions of a data point across the classes sum to 1. The membership functions resulting from the FCM, however, do not always correspond to the intuitive concept of the degree of belonging or compatibility. Moreover, the algorithm may have a considerable trouble in noisy environment.

Recently, the PCM algorithm for resolving these drawbacks has been proposed. The result of the PCM and the FCM depends highly on the number of clusters and the initial center values of each cluster. And, if the PCM is applied for the color image segmentation, there is the disadvantage that one needs to estimate the bandwidths of each cluster. So, in this paper, the SSF is applied for getting the reasonable clusters which are used for estimating the information(the number, the initial center values and the bandwidths) of the

1) 한국해양대학교 해양계측공학과 석사과정 재학개수 전공  
2) 한국해양대학교 자동화 정보공학부 교수

clusters, then the estimated information of the clusters is used to the PCM for color image segmentation. The simulation results indicate that the proposed algorithm requires less computational effort than the conventional algorithms.

## 1. 서 론

칼라 영상 분할 방법에는 여러 가지 방법<sup>[1] [2]</sup>이 있으나 클러스터링에 의한 방법이 우수한 결과를 얻을 수 있어 많이 연구되고 있다<sup>[3] [4] [5]</sup>.

PCM 알고리듬은 FCM 알고리듬을 먼저 실행하여 FCM 알고리듬에서 얻은 소속 합수 값을 이용하여 파라미터를 추정하는 복잡한 과정을 거치는 문제점이 있다.

본 논문에서는 스케일 공간 필터링을 이용하여 클러스터의 개수와 초기 중심값과 함께 PCM 알고리듬에 필요한 파라미터를 추정할 수 있는 데이터를 구하고, 구해진 데이터를 이용하여 PCM 파라미터를 추정하여 영상을 분할하는 알고리듬을 제안한다.

제안된 알고리듬은 PCM 알고리듬에 앞서 실행되어야 하는 FCM 알고리듬의 과정이 생략되어 연산 시간을 상당히 감소시키는 좋은 결과를 얻고 있다.

본문의 구성은 2장에서 타당한 클러스터 선택을 위한 스케일 공간 필터링에 대하여 설명하고, 3장에서는 PCM 방법에 대해서 설명한다. 4장에서는 제안한 방법을 이용하여 칼라 영상에 적용하여 제안된 방법과 기존의 방법을 실험을 통해 유용성을 보이며, 5장에서는 결론을 짓는다.

## 2. 스케일 공간 필터링을 이용한 클러스터 선택

영상의 물체 또는 배경 영역들은 비슷한 속성을 가지고 있어, 화소들의 칼라 속성에 대한 히스토그램에서 두드러진 마루 영역을 형성한다. 따라서 히스토그램에서 두드러진 마루 영역을 추정하면, 분할하여야 할 클러스터의 개수를 추정할 수 있다.

히스토그램을 분석하기 위해서는 먼저 가우시안 필터를 이용하여 히스토그램을 평활화시켜야 한다. 이때 가우시안 필터의 크기를 나타내는 표준 편차에 따라 히스토그램의 평활화 정도가 달라진다. 즉, 표준 편차가 점차 커짐에 따라 두드러진

마루 영역을 판별하고, 의미 없는 작은 마루들을 소멸한다. 그러나, 표준 편자가 마루 영역 경우에는 원하는 마루 영역을 까지 소멸하게 된다. 따라서, 원하는 두드러진 마루 영역들이 나타날 수 있는 표준 편자를 가지는 가우시안 필터를 이용하여 히스토그램을 평활화시켜야 한다.

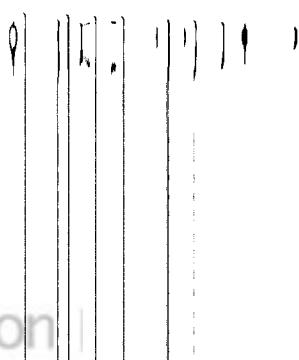
영상 분할에서 클러스터의 개수를 미리 정의했을 경우에는 원하는 개수의 마루가 나타나도록 적당한 표준 편자로 히스토그램을 평활화시킬 수 있다. 그러나, 대부분의 경우 분할하고자 하는 클러스터의 개수에 대해 사전에 알기 어렵다. 본 논문에서는 Witkin이 제안한 스케일 공간 필터링 방법<sup>[6]</sup>을 이용하여 두드러진 마루 영역을 나타낼 수 있는 표준 편자를 찾아 히스토그램을 평활화시킨다.

평활화된 히스토그램의 1차 미분과 2차 미분을 이용하여 골의 위치를 기준으로 마루 영역을 구분한다. 평활화된 골의 위치는 실제 골의 위치와 맞지 않으며, 골의 영역은 인접한 마루 영역들이 혼존하는 곳으로 일정한 허용범위를 두어 마루 영역을 구분하여야 한다. 허용범위는 골의 위치를 기준으로 인접한 마루 위치까지 기준의 1/2에 해당하는 거리를 허용범위로 잡았다.

이렇게 얻어진 각 칼라 요소에 대한 마루 영역들을 3차원 칼라 공간 상에 표지시켜 서로 교집합하는 영역을 실제 클러스터를 추정할 수 있는 타당한 클러스터의 후보 영역으로 정한다. 이를 후보 영역들 가운데 각 영역에 포함된 화소의 개수가 일정 수준 이상에 해당하는 후보 영역들만을 타당한 클러스터로 선택한다. 이렇게 얻어진 타당한 클러스터들은 실제 클러스터화 유사하다. 이를 타당한 클러스터를 이용하여 클러스터링에 필요한 클러스터의 개수와 초기 중심값 그리고, 클러스터의 대역폭을 추정한다.

### 3. 클러스터링에 의한 영상 분할

PCM 알고리듬은 클러스터의 대역폭을 추정하기 위해 퍼지 분할을 먼저 실행하



마루 영역은 출제하고, 의미 없는 작은 마루들을 소멸한다. 그러나, 표준 편자가 마루 구조 경우에는 원하는 마루 영역들 까지 소멸하게 된다. 따라서, 원하는 두드러진 마루 영역들이 나타날 수 있는 표준 편차를 가지는 가우시안 필터를 이용하여 히스토그램을 평활화시켜야 한다.

영상 분할에서 클러스터의 개수를 미리 정의했을 경우에는 원하는 개수의 마루가 나타나도록 적당한 표준 편차로 히스토그램을 평활화시킬 수 있다. 그러나, 대부분의 경우 분할하고자 하는 클러스터의 개수에 대해 사전에 알기 어렵다. 본 문에서는 Witkin이 제안한 스케일 공간 필터링 방법<sup>[6]</sup>을 이용하여 두드러진 마루 영역을 나타낼 수 있는 표준 편차를 찾아 히스토그램을 평활화시킨다.

평활화된 히스토그램의 1차 미분과 2차 미분을 이용하여 꿀의 위치를 기준으로 마루 영역을 구분한다. 평활화된 꿀의 위치는 실제 꿀의 위치와 맞지 않으면, 꿀의 영역은 인접한 마루 영역들이 혼존하는 곳으로 일정한 허용범위를 두어 마루 영역을 구분하여야 한다. 허용범위는 꿀의 위치를 기준으로 인접한 마루위치까지 거리의 1/2에 해당하는 거리를 허용범위로 잡았다.

이렇게 인어진 각 칼라 요소에 대한 마루 영역들을 3차원 칼라 공간 상에 교차 시켜 서로 교집합하는 영역을 실제 클러스터를 추정할 수 있는 타당한 클러스터의 후보 영역으로 정한다. 이를 후보 영역들 가운데 각 영역에 포함된 화소의 개수가 일정 수준 이상에 해당하는 후보 영역들만을 타당한 클러스터로 선별한다. 이렇게 인어진 타당한 클러스터들은 실제 클러스터화 유사하다. 이를 타당한 클러스터를 이용하여 클러스터링에 필요한 클러스터의 개수와 초기 중심값 그리고, 클러스터의 대역폭을 추정한다.

### 3. 클러스터링에 의한 영상 분할

PCM 알고리듬은 클러스터의 대역폭을 추정하기 위해 퍼지 분할을 먼저 실행하여 상당한 연산량을 필요로 한다. 이러한 기준의 PCM 알고리듬에서 클러스터의 대역폭 추정을 변형하여 변형된 PCM 알고리듬을 제안한다. 변형된 PCM 알고리듬에서는 클러스터의 대역폭을 추정하기 위해 퍼지 분할이 필요없어 연산량을 상당히 줄일 수 있다.

PCM 알고리듬은 식(3-1)의 목적함수를 최소화할 수 있도록 데이터 집합을 분할하는 알고리듬이다.

$$J_m(L, U) = \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^N (u_{ij})^m d_{ij}^2 + \sum_{i=1}^C \eta_i \sum_{j=1}^N (1 - u_{ij})^m \quad (3-1)$$

여기서,  $\eta_i$ 는 적당한 양의 정수로 이에 대한 내용은 뒤에 언급하겠다. 첫 번째 항은 속성 데이터로부터 클러스터 중심사이의 거리를 가능한 작게 유지하고, 반면에 두 번째 항은 쓸모없는 해를 얻는 것을 피하기 위해  $u_{ij}$ 를 가능한 크게 유지하도록 하여, 하찮은 해를 피하도록 한다.

$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ 는 특징 벡터 집합,  $L = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_C)$ 를 클러스터의 중심 벡터 집합,  $d_{ij}^2$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, C$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ )는 특징점  $x_j$ 에서 클러스터의 중심  $\beta_i$  사이의 거리이고,  $U = [u_{ij}]$ 는 가능성 소속 정도로 이루어진  $C \times N$  행렬이다.  $U$ 가 식(3-2)을 만족한다면,  $U$ 는  $J_m(L, U)$ 를 위한 전역 최소치가 된다.

$$u_{ij} = \left\{ 1 + \left( \frac{d_{ij}^2}{n_i} \right)^{1/(m-1)} \right\}^{-1} \quad (3-2)$$

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^N (u_{ij})^m x_j}{\sum_{j=1}^N (u_{ij})^m} \quad (3-3)$$

식(3-2)는 클러스터  $\beta_i$ 를 위한 가능성 분포 함수를 나타내며, 이것을  $\Pi_i$ 라고 표시한다.  $m$  값은 최종 가능성 c-partition의 퍼지화(fuzziness)와 가능성 분포의 형태를 결정한다.  $m = 1$  일 때, 소속 정도는 hard값을 가지고,  $m \rightarrow \infty$  일 때 소속 정도는 최대로 퍼지화된 값을 가지게 된다.

$\eta_i$ 는 클러스터에서 특징 데이터의 소속 정도가 0.5가 되는 거리를 정의한다. 이와 같이  $\eta_i$ 는 각 클러스터에 대한 가능성 분포의 적절한 대역폭에 따라 선택될 필요가 있다. 만일, 모든 클러스터가 비슷할 것 같으면,  $\eta_i$ 는 모든 클러스터에 대해 동일하게 되어야 할 것이다. 이처럼  $\eta_i$ 는 클러스터의 전체 모양과 크기에 관계되는 것이 타당하다<sup>[7][8]</sup>. Raghu는  $\eta_i$ 를 식(3-4)와 식(3-5)를 이용하여 추정하였다.

$$\eta_i = K \frac{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m d_{ij}^2}{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m} \quad (3-4)$$

여기서,  $K$ 는 보통 1로 선택한다.  $\eta_i$ 는 클러스터  $\beta_i$ 의 평균 퍼지 클러스터 내부 거리(average fuzzy intracluster distance)에 비례한다.

$$\eta_i = \frac{\sum_{x_j \in (H_i)_a} d_{ij}^2}{|(H_i)_a|} \quad (3-5)$$

여기서,  $(H_i)_a$ 는  $H_i$ 의 적절한 수준의  $\alpha-cut$ 이다.  $\eta_i$ 는 클러스터  $\beta_i$ 에 속하는 소수 상수가 있는 특정 맵터들의 평균 클러스터 내부 거리(average intracluster distance)이다.

그러나, 기존의 PCM 알고리듬에서는 클러스터의 대역폭  $\eta_i$ 를 추정하기 위해 퍼지 분할 과정을 수행해야 한다는 것이다. PCM 알고리듬을 shell 클러스터링에 이용하는 경우에는 shell 클러스터들의 원하는 두께를 사전에 알 수 있으므로 이러한 문제는 한 단점이 되지 않는다. 그러나, PCM 알고리듬을 칼라 영상 분할에 이용할 경우 영상의 각 영역에 해당하는 클러스터들의 대역폭은 사전에 알 수 없다. 클러스터의 대역폭에 대한 사전 정보가 없다면,  $\eta_i$ 를 추정하기 위해서는 퍼지 분할을 먼저 실행하고, 퍼지 분할로 부터 얻은 정보를 식(3-4), 식(3-5)에 적용하여  $\eta_i$ 를 추정한다. 이러한 방법으로  $\eta_i$ 를 추정하는 것은 퍼지 분할 과정을 도입하면서 전체 PCM 알고리듬 과정이 복잡해지며, 퍼지 분할에 필요한 연산량이 많아 상당한 연산 시간이 걸리는 단점이 있다. 따라서, 영상 분할에 PCM 알고리듬을 이용할 때 대역폭  $\eta_i$ 를 추정하는 것은 문제가 된다.

본 논문에서는 스케일 공간 필터링 과정에서 구한 타당한 클러스터에 속하는 데이터를 이용하여 영상의 각 영역에 대한 대역폭  $\eta_i$ 를 추정하였다. 스케일 공간 필터링 방법에서 얻은 타당한 클러스터에 속하는 데이터들은 식(3-5)와 같이 소수 상수가 있는  $(H_i)_a$ 의 데이터라고 생각할 수 있다. 따라서, 클러스터의 개수와 초기 중심값을 추정하기 위해 사용한 스케일 공간 필터링 방법에서 얻어진 타당한 클러스터에 속하는 데이터들의 평균 내부 거리를 구하여  $\eta_i$ 를 추정하므로서,  $\eta_i$ 를 추정하기 위한 퍼지 분할 과정을 생략하여 전체 영상 분할 과정을 단순화시킨다.

며, 퍼지 분할에 해당하는 연산량을 감소시켰다. 클러스터  $i$ 의 평균 내부 거리  $\eta_i$ 는 다음과 같다.

$$\eta_i = \frac{\sum_{x_j \in P_i} d_{ij}^2}{n(P_i)} \quad (3-6)$$

여기서,  $d_{ij}^2$ 는  $i$  번째 클러스터의 중심  $v_i^{(0)}$ 에서 데이터  $x_j \in P_i$ 까지 거리이고,  $P_i$ 는  $i$  번째 타당한 클러스터에 속하는 데이터의 집합이고,  $n(P_i)$ 는  $P_i$ 의 데이터의 개수이다.

$\eta_i$ 는 모든 반복과정에서 고정될 수도 있고, 각 반복마다 변할 수도 있지만, 각 반복마다  $\eta_i$ 를 변화시킬 때, 불안정한 상태로 빠질 수 있다. 변형된 PCM알고리듬은 식(3-2)와 식(3-3)의 과정을 반복하므로서  $J_m$ 은 어떤 정해진 값에 수렴하게 된다. 변형된 PCM 알고리듬에 의한 영상 분할 알고리듬은 다음과 같다.

- 단계 1 : 스케일 공간 필터링을 하여  
타당한 클러스터 선택
- 단계 2 : 타당한 클러스터로부터 클러스터 개수  $C$ ,  
초기 중심값  $v_i^{(0)}$ 과  $\eta_i$ 를 추정  
퍼지 정도를 나타내는  $m \in [1, \infty)$ ,과  
반복 횟수를 나타내는  $p=1$ 로 설정
- 단계 3 : 식(3-2)을 이용하여  $U(p)$ 를 구한다.
- 단계 4 : 식(3-3)을 이용하여 클러스터의 중심  
 $\{v_i^{(p)}\}$ 를 계산
- 단계 5 :  $U(p)$ 와  $U(p-1)$ 을 비교한다.  
만약  $\|U(p) - U(p-1)\| \leq \epsilon$  을  
만족하면 끝낸다.  
그렇지 않으면,  $p$ 를 1증가시키고  
단계 3으로 되돌아간다.

#### 4. 실험 및 고찰

실험에 사용한 영상은 그림4-1의 COLOR IMAGE로  $256 \times 256$ 의 크기를 가지고,

칼라 요소는 R(Red), G(Green), B(Blue)로 구성되어 있다. IBM PC호환용 펜티엄 386(133MHz)에서 실험을 하였다.

COLOR IMAGE의 R, G, B각각에 대한 적당한 스케일 상수  $\sigma$ 는 표4-1과 같다. 평활화된 히스토그램에서 골 영역은 선택된 절을 중심으로 인접한 마루까지의 가리에 비례하도록 허용범위를 구하였다. 이렇게 구한 히스토그램의 두드러진 절과 마루 영역을 3차원 칼라 공간 상에 고자시킨다. 이때, 마루 영역들이 고자하는 영역이 타당한 클라스터가 될 수 있는 후보 영역이 된다. 이를 후보 영역들 가운데 화소의 개수가 1,000이상이 되는 후보 영역들을 타당한 클라스터 영역으로 선별했다.

표4-2는 COLOR IMAGE에 대한 초기 중심값을 나타내고 있다. 초기 중심값을 이용하여 FCM 알고리듬을 실행하여 영상을 분할하고, 그 결과를 이용하여 기준의 PCM 파라미터를 추정한다. 본 논문에 사용한 식(3-5)을 이용하여  $\eta_i$ 를 구하였다. 추정된  $\eta_i$ 를 이용하여 영상을 분할하였다. 제안한 PCM 알고리듬은 스케일 공간 필터링 과정에서 구한 타당한 클라스터에 속하는 데이터들을 이용하여 식(3-6)으로  $\mu_i$ ,  $\eta_i$ 를 추정하였다. 따라서, 제안한 PCM 알고리듬에서는 FCM 알고리듬과 같은 생략하여 상당한 연산 시간을 줄일 수 있었다. 표4-4는 기존의 PCM 알고리듬과 제안한 PCM 알고리듬의 연산시간이 나타내고 있다. 제안한 방법에서는 폐지 분할 과정을 생략할 수 있어 기존의 방법 보다 연산량이 상당히 줄었다.

영상 분할 결과를 평가하기 위한 정해진 평가 기준이 없기 때문에, 대부분의 영상 분할 결과는 사람의 시각에 의해 평가되어 진다. 표4-3은 기존의 PCM 알고리듬과 제안한 PCM 알고리듬에서 추정한 클라스터의 대역폭  $\eta_i$ 를 나타내고 있으며, 그림4-1은 실험에 사용된 COLOR IMAGE이고, 그림4-2는 기존의 PCM 알고리듬으로 영상을 분할한 결과이고, 그림4-3은 제안한 PCM 알고리듬을 이용하여 영상을 분할한 결과이다. 기존의 PCM 알고리듬에서 구한  $\eta_i$ 값과 제안한 PCM 알고리듬에서 구한  $\eta_i$ 가 약간은 차이가 있으나 비슷한 분할 결과를 얻을 수 있었다.

표 4-1 R,G,B 히스토그램에 대한 적당한  $\sigma$

점화 표본	R	G	B
$\sigma$	13	12	11

표4-2 타당한 클러스터로 부터 초기 중심값 추정

클러 스터 칼라요소	1	2	3	4	5	6	7
R	82	41	70	129	190	185	218
G	50	118	176	79	51	198	189
B	70	78	160	160	48	103	171

표4-3  $\eta_i$ 의 추정값

클러 스터 방법	1	2	3	4	5	6	7
기존 방법	115	89	326	250	204	149	103
제안 방법	99	97	318	209	243	163	143

표4-4 각 알고리듬의 연산시간 (단위 : 초)

	기존의 PCM 방법	제안한 PCM 방법
COLOR IMAGE	68	8

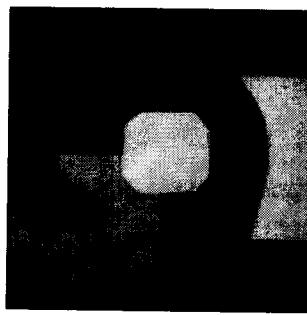


그림4-1  
COLOR IMAGE

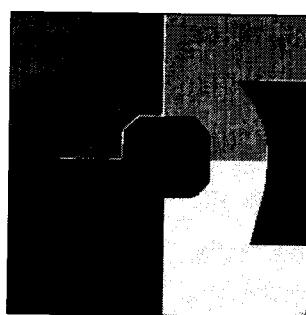


그림4-2 기존의 PCM  
처리 결과 영상

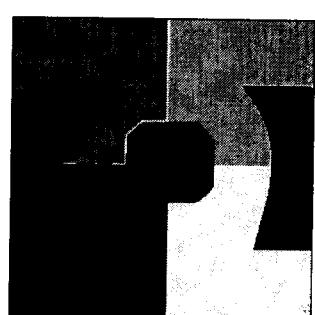


그림4-3 제안한 PCM  
처리 결과 영상

## 5. 결 론

컬러스터링 방법에 의한 컬라 영상 분할은 비교적 우수한 결과를 얻을 수 있어 많이 사용되고 있으나, 클러스터의 개수를 미리 지정해야하고 연산량이 많은 문제점이 있다. 여러 가지 컬러스터링 방법들 가운데 널리 연구되고 있는 FCM 알고리듬에 의한 컬러스터링 방법은 화소적 제약조건과 모든 클러스터에 관계되는 소속함수 등의 문제 때문에 항상 성화한 클러스터의 원형을 추정하는 것은 아니니, 또한 FCM 알고리듬으로 얻어진 소속함수 값이 클러스터에 대한 실질적인 소속 정도와 일치하지 않으면 잡음에 민감한 편이다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 최근에는 가능성 이론에 기초하여 Krishnapuram과 PCM 알고리듬을 제안하였다. 그러나 PCM 알고리듬을 실행하기에 앞서 클러스터의 대역폭을 추정하기 위해 폐지 분할을 먼저 실행하여야 했다. 이와 같이 기존의 PCM 알고리듬은 클러스터의 대역폭을 추정하기 위해 폐지 분할을 선행해야므로 연산량이 증가하게 된다.

본 논문에서는 컬러스터링 방법에서 클러스터의 개수와 초기 중심값을 선정하기 위해 사용되는 타당한 클러스터의 데이터를 이용하여 클러스터의 대역폭을 추정하는 새로운 방법을 제안했다. 제안된 방법은 기존의 PCM 알고리듬에서 클러스터의 대역폭 추정을 위해 사용했던 회자 분할 과정을 생략하여 연산량을 상당히 줄일 수 있었다.

제안된 방법은 민족 스케일 공간 필터링을 이용하여 타당한 클러스터를 구하고, 이를 타당한 클러스터를 사용하여 클러스터의 개수와 초기 중심값 그리고 클러스터의 대역폭  $\eta_i$ 를 추정하여 PCM 알고리듬을 이용하여 영상을 분할한다. 이렇게 하므로서 기존의 PCM 방법에서 클러스터의 대역폭  $\eta_i$ 를 추정하기 위해 선행되었던 폐지 분할 과정을 생략하여 연산량을 상당히 감소시킬 수 있었으며, 영상 분할 결과는 비슷하였다. 실험에서 기존의 방법보다 분할하고자 하는 클러스터의 개수에 따라 약 4배~9배 정도 연산 시간이 줄어들음을 볼 수 있었다.

컬러스터링에 의한 방법만으로는 영상을 깔끔하게 분할하기 어렵다. 컬러스터링에 의한 방법은 화소들이 각각의 특징 정보만을 이용하여 특징 공간상에서 클러스터링을 하기 때문에 영역 내부에 많은 구멍(Hole)들을 포함하게 된다. 이를 영역 확장법등의 후처리 과정을 통해 제거할 수 있다.

## 참고문헌

- [1] R. Ohlander, K. Price, and D.R. Reddy, "Picture segmentation using a recursive region splitting method," CGIP, Vol. 8, pp. 313-333, 1978.
- [2] Y. Otha, T. Kanade and T. Sakai, "Color information for region segmentation," CGIP, Vol. 13, pp. 224-241, 1980.
- [3] G. B. COLEMAN, and H. C. ANDREWS, "Image Segmentation by Clustering," Proceedings of the IEEE, Vol. 67, No. 5, 1979.
- [4] Y. W. Lim and S. U. Lee, "On the color image segmentation algorithm based on the thresholding and fuzzy c-means techniques," Pattern Recognition, Vol. 23, pp. 935-952, 1990.
- [5] K. B. Eun and J. W. Lee, "Possibilistic C-Mean 클러스터링과 영역 확장을 이용한 칼라 영상 분할," 대한전자공학회논문지, Vol. 34, No. 3, pp. 97-107, 1997.
- [6] A. P. Witkin, "Scale-space filtering," Proc. IJCAI-83, pp. 1019-1022, 1983.
- [7] R. Krishnapuram, J. M. Keller, "A possibilistic approach to clustering," IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 1, No. 2, pp. 98-110, 1993.
- [8] R. Krishnapuram, H. Frigui and O. Nasraoui, "Fuzzy and Possibilistic shell Clustering algorithms and Their Application to Boundary Detection and Surface Approximation," IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 3, No. 1, pp.29-60, 1995.