水面波의 空間減衰에 關한 研究

俞 洪 善

A study on the space damping of gravity waves

Hong Sun Yu

<目 次>

Ⅰ. 序 論
Ⅱ. 基本方程式
Ⅲ. 特性方程式
Ⅳ. 特性方程式의 解
Ⅴ. 空間減衰係數
Ⅵ. 結 論
Reference

Abstract

Waves on the sea are damped with time and with distance at the same time. In this paper the damping with distance was discussed. The coefficient of damping was formulated and its approximation formulae in deep water and shallow water were derived thereof.

Ⅰ. 序 論

海面에 전파되는 波는 그 媒質인 海水의 粘性 때문에 減衰를 이르킨다. 이 減衰現象은 海面上의 한 點에서 振幅이 時間에 따라 줄어드는 時間減衰와 한 波峰이 進行해 나가면서 그 波高가 점점 줄어드는 減衰, 즉 空間減衰의 두 가지 面에서 考察될 수 있다. 實際의 減衰現象은 兩者의 複合으로 이해되어야 할 것이다.

이상의 두 減衰의 量的表現인 時間減衰係數와 空間減衰係數는 다음과 같이 定義된다. 水面에

$$\eta = h + A_o e^{i(kx-\sigma t)} \qquad \cdots\cdots (1)$$

로 表現되는 水面波가 進行하고 있다 하자. 여기서 h는 底面으로부터의 높이, A_o는 波의 振幅, k 및 σ는 複素數의 波數 및 角振動數이다. 波의 進行方向을 x方向으로, 鉛直上向을 y方向으로 잡고 底面의 一定點을 原點으로 하여 座標를 定했을 때 水表面에서 $y=\eta$이다.

k가 實數이고 $\sigma=\sigma_o-i\gamma$로 表現될 수 있을 境遇를 생각해 보면 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$는 波數가 되고 σ_o는 角振動數가 되어 波는

$$\eta = h + A_o e^{-\gamma t}\ exp(kx-\sigma_o) \qquad \cdots\cdots (2)$$

와 같은 꼴로 表現되며 式이 나타내는 바와 같이 이 波는 空間的으로는 無減衰의 週期性을 갖

는 한편 時間에 따라 波高가 $A_o e^{-\gamma t}$의 꼴로 減衰된다. 여기서 γ가 時間減衰係數이다.[1]

한편 σ는 實數이고 $k=k_o+iD$로 表現될 때에는 波는

$$\eta=h+A_o e^{-Dx} \exp i(k_o x+\sigma t) \cdots\cdots (3)$$

로 되어 時間的으로 無減衰의 週期性을 나타내는 反面, 空間的으로는 波가 x方向으로 進行해 감에 따라 波高가 $A_o e^{-Dx}$의 꼴로 減衰되어 간다. 여기서 D가 空間減衰係數이다.

本 論文에서는 微小振幅의 重力波에 대한 線形化된 Navier-Stokes 方程式을 풀어서 空間減衰係數 D를 求하고 그로부터 深海와 淺海에 있어서의 近似式도 求해 보았다.

그리고 微小振幅波理論의 基本假定들과 海水의 粘性이 작다는 點과 γ도 작지만 D는 훨씬 더 작다는 점등이 數式의 單純化處理에 充分히 利用되었음을 미리 밝혀 둔다.

Ⅱ. 基本方程式

깊이 h가 일정하고 動粘性이 ν인 海水面에 微小振幅의 重力波(1)이 進行할 때 流體速度의 x, y成分은 各各

$$u=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdots\cdots (4)$$

이 된다. 여기서 ϕ, ψ는 各各 速度 Potential과 流函數이며 兩者는 各各 連續方程式과 Navier-Stokos 方程式을[2] 滿足해야 한다.

즉

$$\Delta^2\phi=o, \qquad \nu\Delta^2\psi=\frac{\partial\psi}{\partial t} \cdots\cdots (5)$$

(1)의 波에 대해 (5)는 다음과 같은 解를 갖는다.

$$\phi=(Ae^{ky}+Be^{-ky})\ e^{i(kx-ct)} \cdots\cdots (6)$$

$$\psi=(Ce^{my}+D'e^{-my})\ e^{ikx-ct)} \cdots\cdots (7)$$

이들 解가 滿足해야 하는 境界條件은 다음과 같다. 水表面에서 즉 $y=\eta$에서

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\eta}{\partial t}=v \\ &\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ &-p+2\nu\rho\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\}^{3)} \cdots\cdots (8)$$

의 運動學的 境界條件과 動力學的 境界條件이 成立해야 한다. 여기서 壓力 p는

$$\frac{p}{\rho}=\frac{\partial\phi}{\partial t}-g(y-h) \cdots\cdots (9)$$

底面에서의 境界條件은

$$u=v=0 \cdots\cdots (10)$$

이 된다.

Ⅲ. 特性方程式[1]

(6)과 (7)을 (4), (8), (9), (10)에 代入해서 A, B, C, D' 및 A_o 등을 消去하면 k, m 및 σ 사이의 關係式을 얻는다. 式의 表現을 간단히 하기 위하여 다음과 같은 無次元의 parameter들을

定義해 두자.

$$kh=k,\quad mh=M \qquad\cdots\cdots(11)$$

$$\varepsilon=\left(\frac{4\nu^2k^3}{g}\right)^{1/4} \qquad\cdots\cdots(12)$$

$$S=\sigma/(gk)^{1/2} \qquad\cdots\cdots(13)$$

이들을 導入하여 앞서 말한 關係式을 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&-(iS-\varepsilon^2)^2\{e^{2M}(\mathrm{Ktanh\,K-M})-(\mathrm{Ktanh\,K+M})\}\\&\qquad+\{e^{2M}(\mathrm{Mtanh\,K-K})+(\mathrm{Mtanh\,K+K})\}\\&-(\mathrm{M/K})\varepsilon^4\{e^{2M}(\mathrm{Mtanh\,K-K})+(\mathrm{MtanhK+\ K})\}\\&+4Me^M\varepsilon^2(iS-\varepsilon^2)\ \mathrm{sech\,K}=0 \qquad\cdots\cdots(14)\end{aligned}$$

한편 (7)을 Navier-Stokes式에 代入하면

$$\left.\begin{aligned}&m^2=k^2-i\sigma/\nu\\ \text{혹은}\quad &2K^2S=i\varepsilon^2(M^2-K^2)\end{aligned}\right\} \qquad\cdots\cdots(15)$$

를 얻는다. 이 式에서 $\varepsilon\to0$ 즉 粘性이 없어지는 極限을 取해 볼 때 K나 S는 理想流體에 대한 값으로서의 有限한 一定値를 갖게 될 것이다. 따라서 M은 $\frac{1}{\varepsilon}$의 程度로 ∞에 接近해야 함을 알 수 있다. 그러므로 (14)에서 ε^{-1}次項으로부터 시작되는 ε의 멱급수형의 解로 M을 求할 수 있음을 알게 된다.

그런데 海水의 경우 ε는 매우 작은 量이기 때문에 (14)에서 最大項인 e^{2M}의 項만을 남기고 나머지 項들을 무시하기로 한다. 그리고 (15)에서 S를 求하여 代入, 消去하면

$$\begin{aligned}&\varepsilon^4\left(1+\frac{M^2}{K^2}\right)^2(\mathrm{Ktanh\,K-M})\\&\quad+4\left(1-\frac{M}{K}\varepsilon^4\right)(\mathrm{Mtanh\,K-K})=0 \qquad\cdots\cdots(16)\end{aligned}$$

을 얻는데 이 式을 特性方程式이라 부르기로 한다. 뒤에 밝혀지겠지만 이 式에서 省略된 項 중에서 最大의 項은 深海에 있어서는 $e^{-kh/\varepsilon}$이고 淺海에 대해서는 $exp[-(kh)^{5/4}/\varepsilon]$이다. 前者는 확실히 無視될만한 量이지만 後者는 $\varepsilon/(kh)^{5/4}\ll1$가 만족되어야 한다. 例컨데 $kh>2.0$인 深海에서 $\lambda\geqq1$cm인 波에 대해서 $e^{-kh}/\varepsilon<5\times10^{-8}$이 되며 $kh=0.1$인 淺海에서 $\lambda>100$cm인 波에 대해서 $exp[-(kh)^{5/4}/\varepsilon]<5\times10^{-8}$이 됨을 확인할 수 있다. ε의 크기는 $\lambda=1$cm일 때 1.003×10^{-1}, 10cm일 때 1.784×10^{-2}, 10^2cm일 때 3.172×10^{-3}, 10^3cm일 때 5.642×10^{-4} 등의 값을 갖는다. ($\nu=0.01$ stokes로 계산된 값임.)

Ⅳ. 特性方程式의 解

(16)의 解로서 다음과 같은 멱급수를 생각해 보자.

$$\frac{M}{K}=\frac{m_0}{\varepsilon}+m_1+m_2\varepsilon+m_3\varepsilon^2+ \qquad\cdots\cdots(17)$$

(17)을 (16)에 代入하고 ε의 同次項들을 比較함에 의하여 m_i들을 구하면 다음과 같다.

$$m_0=(1-i)\tanh^{1/4}K$$

$$m_1=-\frac{1}{2}\,\mathrm{cosech}\ 2\mathrm{K}$$

$$m_2 = -(1+i)\coth^{1/4}K\frac{(Y+1)\ (Y+5)}{4Y(Y+4)}$$

$$m_3 = -i\tanh^{1/2}K\frac{Y^3+2Y^2-10Y-10}{2Y^2(Y+4)},\ \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

여기서　　$Y=4\sinh^2 K$

그리고 (15)에서 S를 구하면

$$S = s_0 + s_1\varepsilon + s_2\varepsilon^2 + s_3\varepsilon^3 + \cdots\cdots \tag{18}$$

여기서　　$s_o = \tanh^{1/2}K$

$$s_1 = -\frac{1}{2}(1+i)\ \tanh^{1/4}K\ \mathrm{cosech}\ 2K$$

$$s_2 = -i\frac{Y^2+5Y+2}{Y(Y+4)}$$

$$s_3 = (1-i)\tanh^{3/4}K\frac{2Y^3+3Y^2-26Y-25}{4Y^2(Y+4)}$$

이 결과에 대한 深海 및 淺海에서의 近似式을 求해보면 다음과 같다.

深海에서는 $|K|\to\infty$이므로

$$\frac{M}{K} = \frac{1-i}{\varepsilon} - \frac{3}{4}(1+i) - i\frac{\varepsilon^2}{2}\cdots\cdots$$

$$S = 1 - i\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(1-i)\varepsilon^3\cdots\cdots$$

의 결과를 얻는다.

淺海에서는 $|K|\to 0$이므로

$$M = (1-i)\left(\frac{K^{5/4}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{4} - \frac{5}{64}(1+i)\left(\frac{\varepsilon}{K^{5/4}}\right) + \frac{5i}{64}\left(\frac{\varepsilon}{K^{5/4}}\right)^2 + \cdots\cdots$$

$$S/K^{1/2} = 1 - \frac{1+i}{4}\left(\frac{\varepsilon}{K^{5/4}}\right) - \frac{i}{8}\left(\frac{\varepsilon}{K^{5/4}}\right)^2 - \frac{25(1-i)}{265}\left(\frac{\varepsilon}{K^{5/4}}\right)^3 + \cdots\cdots$$

V. 空間減衰係數

時間的으로는 無減衰의 波에 대해서 空間減衰係數를 求하기 위하여 $\sigma=(gh)^{1/2}S$가 實數가 되도록 하고 $k=k_o+iD$의 D를 求해 보자. (15)에 $k=k_o+i\ D$, $\varepsilon=\left(\frac{k}{k_o}\right)^{3/4}\varepsilon_o$를 代入한 후 實數部와 虛數部를 分離하여 σ와 D를 求한 結果는 다음과 같다.
(여기서 $(k_o+iD)^2\approx k^2+2kDi$, $\tanh(k_o+iD)h\approx\tanh k_oh\ +i\ Dh\mathrm{sech}^2\ k_oh$ 등의 近似를 取했고 $\varepsilon_o=\left(\frac{4\nu^2k_o^3}{g}\right)^{1/4}$이다)

$$\sigma = (gk_o)^{1/2}\{s_o' + s_1'\varepsilon_o + s_2'\varepsilon_o^2 + s_3'\varepsilon_o^3 + \cdots\cdots\} \tag{19}$$

여기서　　$s_o' = T^{1/2}$,　　$s_1' = -\frac{1}{2}T^{1/4}/S_2$

$$s_2' = -\frac{(1-T^4)(k_oh)^2+4T^3\ k_oh-3T^2}{4T^2(2k_oh+S_2)^2}$$

$$s_3' = S_2\ T^{-11/4}\times\frac{(k_o\ h^3)\ P_1(T)+(k_o\ h)^2\ P_2(T)+k_o\ hP_3(T)+P_4(T)}{128(2k_o\ h+S_2)^3},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

그리고

$$D = d_1\,\varepsilon_o + d_2\,\varepsilon_o^2 + d_3\,\varepsilon_o^3 + \cdots\cdots \quad (20)$$

여기서
$$d_1 = \frac{k_o\,T^{-1/4}}{2k_o\,h + s_2}$$

$$d_2 = \frac{k_o\,S_2\,T^{-5/2}}{16(2k_o\,h + S_2)^2}\left\{\begin{matrix} 2k_o\,h(T^4 + 30T^2 + 1) \\ +S_2(T^4 + 22T^2 + 9) \end{matrix}\right\}$$

$$d_3 = \frac{k_o\,S_2\,T^{-15/4}}{64(2k_oh + S_2)^4}\left\{\begin{matrix} (k_oh)^3\,Q_1(T) + (k_oh)^2Q_2(T) \\ +k_o\,h\,Q_3(T) + Q_4(T) \end{matrix}\right\}$$

이상에서 $T = \tanh k_oh$, $S_2 = \sinh 2k_oh$, 그리고 $P_i(T)$와 $Q_i(T)$는 T에 관한 다음과 같은 多項式들이다.

$$P_1(T) = 41T^8 - 508T^6 + 506T^4 - 108T^2 - 31$$
$$P_2(T) = T\{-35T^6 + 305T^4 + 103T^2 - 117\}$$
$$P_3(T) = \frac{1}{2}S_2T\{53T^6 - 655T^4 + 927T^2 - 69\}$$
$$P_4(T) = \frac{1}{4}S_2^2T\{47T^6 - 493T^4 + 557T^2 + 145\}$$
$$Q_1(T) = \frac{1}{3}\{3174T^6 + 3262T^4 - 4162T^2 - 3510\}$$
$$Q_2(T) = S_2\{1083T^6 + 1191T^4 - 1319T - 1219\}$$
$$Q_3(T) = \frac{1}{4}S_2^2\{1094T^6 \quad 1550T^4 - 958T^2 - 1190\}$$
$$Q_4(T) = \frac{1}{8}S_2^3\{-14T^6 \quad 298T^4 + 150T^2 + 78\}$$

$k_oh \to \infty$가 되는 深海에서는 (19)와 (20)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\sigma}{(gk_o)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_o^3 + \quad \cdots\cdots \quad (21)$$

$$\frac{D}{k_o} = 2\varepsilon_o^2 + \varepsilon_o^3 + \quad \cdots\cdots \quad (22)$$

$k_oh \to 0$인 淺海에서는

$$\frac{\sigma}{(gk_o)^{1/2}} = (k_o\,h)^{5/2}\left\{1 - \frac{1}{4}\;\frac{\varepsilon_o}{(k_oh)^{5/4}} + \frac{1}{32}\;\frac{\varepsilon_o}{(k_o\,h)^{5/2}} - \frac{19}{1024}\;\frac{\varepsilon_o^3}{(k_oh)^{15/4}} + \cdots\right\} \quad \cdots\cdots \quad (23)$$

$$\frac{}{k_o} = \frac{1}{4}\;\frac{\varepsilon_o}{(k_oh)^{5/4}} + \frac{5}{32}\;\frac{\varepsilon_o^2}{(k_oh)^{5/2}} - \frac{295}{521}\;\frac{\varepsilon_o^3}{(k_oh)^{15/4}} \quad \cdots\cdots \quad (24)$$

Ⅵ. 結　　論

복잡하기는 하지만 空間減衰係數 D를 (20)과 같이 얻었다. 그러나 實際의 경우 (20)보다는 近似式 (22)와 (24)로 充分할 것 같다.

深海의 境遇에는 $\varepsilon_o \ll 1$의 條件, 즉 波長이 매우 짧지만 않다면 (22)는 충분히 빨리 수렴하므

그리고

$$D = d_1\,\varepsilon_o + d_2\,\varepsilon_o^2 + d_3\,\varepsilon_o^3 + \cdots\cdots \tag{20}$$

여기서

$$d_1 = \frac{k_o\,T^{-1/4}}{2k_o\,h + s_2}$$

$$d_2 = \frac{k_o\,S_2\,T^{-5/2}}{16(2k_o\,h+S_2)^2}\left\{\begin{array}{l}2k_o\,h(T^4+30T^2+1)\\ +S_2(T^4+22T^2+9)\end{array}\right\}$$

$$d_3 = \frac{k_o\,S_2\,T^{-15}/_4}{64(2k_oh+S_2)^4}\left\{\begin{array}{c}(k_oh)^3\,Q_1(T)+(k_oh)^2Q_2(T)\\ +k_o\,h\,Q_3(T)+Q_4(T)\end{array}\right\}$$

이상에서 $T=\tanh k_oh$, $S_2=\sinh 2k_oh$, 그리고 $P_i(T)$와 $Q_i(T)$는 T에 관한 다음과 같은 **多項式**들이다.

$$P_1(T) = 41T^8 - 508T^6 + 506T^4 - 108T^2 - 31$$

$$P_2(T) = T\{-35T^6 + 305T^4 + 103T^2 - 117\}$$

$$P_3(T) = \frac{1}{2}S_2T\{53T^6 - 655T^4 + 927T^2 - 69\}$$

$$P_4(T) = \frac{1}{4}S_2^2T\{47T^6 - 493T^4 + 557T^2 + 145\}$$

$$Q_1(T) = \frac{1}{3}\{3174T^6 + 3262T^4 -- 4162T^2 - 3510\}$$

$$Q_2(T) = S_2\{1083T^6 + 1191T^4 - 1319T - 1219\}$$

$$Q_3(T) = \frac{1}{4}S_2^2\{1094T^6 \quad 1550T^4 - 958T^2 - 1190\}$$

$$Q_4(T) = \frac{1}{8}S_2^3\{-14T^6 \quad 298T^4 + 150T^2 + 78\}$$

$k_oh\to\infty$가 되는 深海에서는 (19)와 (20)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\sigma}{(gk_o)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + \cdots\cdots \tag{21}$$

$$\frac{D}{k_o} = 2\varepsilon_o^2 + \varepsilon_o^3 + \cdots\cdots \tag{22}$$

$k_oh\to 0$인 淺海에서는

$$\frac{\sigma}{(gk_o)^{1/2}} = (k_o\,h)^{5/2}\left\{1 - \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_o}{(k_oh)^{5/4}} + \frac{1}{32}\frac{\varepsilon_o}{(k_o\,h)^{5/2}} - \frac{19}{1024}\frac{\varepsilon_o^3}{(k_oh)^{15/4}} + \cdots\right\} \tag{23}$$

$$\frac{}{k_o} = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_o}{(k_oh)^{5/4}} + \frac{5}{32}\frac{\varepsilon_o^2}{(k_oh)^{5/2}} - \frac{295}{521}\frac{\varepsilon_o^3}{(k_oh)^{15/4}} \cdots\cdots \tag{24}$$

Ⅵ. 結　　論

복잡하기는 하지만 空間減衰係數 D를 (20)과 같이 얻었다. 그러나 實際의 경우 (20)보다는 近似式 (22)와 (24)로 充分할 것 같다.

深海의 境遇에는 $\varepsilon_o\ll 1$의 條件, 즉 波長이 매우 짧지만 않다면 (22)는 충분히 빨리 수렴하므로 한 項, 혹은 몇개의 項으로 충분한 近似를 얻을 수 있다. 그러나 淺海의 境遇에는 위의 條件 외에 $\varepsilon_o\ll(k_oh)^{5/4}$의 條件이 追加되어야 한다. 즉 $k_oh\ll 1$인 淺海에 있어서 깊이가 정해져 있

을 境遇 波長이 짧을수록 그波의 減衰를 검토하는데 있어서 (24)의 高次項들을 무시할 수 없게 된다.

그러나 結論的으로 $k_0h \ll 0.1$인 中間 및 深海에 있어서는 (22)의 수렴은 충분히 빠르고 또 淺海의 境遇일찌라도 一定値의 k_0h가 주어진 경우 그에 相應하는 적당히 긴 波長의 영역에 있어서는 역시 (24)의 수렴이 충분히 빠르다. 예컨데 $k_0h=0.1$인 경우 $\lambda<100$cm인 波의 영역에 대해서 (24)의 수렴은 충분히 빠르다. 그러므로 대부분의 實際 영역에서 (22)와 (24)의 近似式으로 充分하다고 생각된다.

(20)의 第1項은 Biesel[5]에 의해서 計算된 結果와 같으며 (22)의 第1項은 Massoud[6]가 計算한 結果와 一致하지만 高次項들은 比較할 수 있는 資料를 찾지 못했다. 그리고 (24)도 역시 다른 資料와 比較할 수가 없었다.

Reference

① Hunt: Viscous damping and wave generation. La Houille Blanche 1964, 6, 687.

② Kinsman: Wind waves (日譯版) 下卷 243.

③ Kinsman: Wind wave (日譯版) 下卷 240~243.

④ Hunt: ibid.

⑤ Biesel: Viscous damping of gravity waves. La Houille Blanche 1949, 4, 630.

⑥ Massoud: Viscous damping in deep water. J. Geophys. Res., 1959, 64, 437.