

상자형 구조물의 중량최소법에 관한 연구

오 주 현¹⁾, 박 석 주²⁾

A Study on the Minimum Weight Modification Method of Box-type Structure

Joo-Hyun Oh , Sok-Chu Park

Abstract

Lately, the sub-structure synthesis method which analyzes the structure by dividing it into sub-structures is employed. But it can't provide optimal structure design techniques for engineers. In order to improve the aspects, the sensitivity analysis method is a useful tool. The change quantities and the modification positions are obtained by the optimum structural modification method using the sensitivities.

The objective of this paper is to offer the method of performing the minimum weight structure as keeping the observing natural frequency constantly.

The suggested method is as follows;

- 1) to analyze the vibrational characteristics of the box-type structure by the sub-structure synthesis method.
- 2) to decide the plate thickness of the position to be modified using the sensitivities analysis method by weight and the optimum structural modification method.

1) 한국해양대학교 선박공학과 석사과정 선체구조 전공

2) 한국해양대학교 조선공학과 교수

3) to reanalyze the structure making addition to the plate thickness in the structure.

1. 서론

똑같은 강도의 구조물 설계시 구조물의 안전성과 경제성을 고려한 설계방법으로 중량최소화법이 다수 제시되고 있다. 그러나 구조물의 중량 경감시 구조적 특성에 문제를 야기시킬 수 있기 때문에 감도해석법과 최적구조변경법을 사용하게 된다.

최근에는 구조물 해석방법 중 전체구조물을 단순한 여러 개의 부분구조물로 나누어 각각에 대해 해석한 후 적절한 결합조건하에서 해석결과를 결합하여 구조물을 해석하는 부분구조합성법(sub-structure synthesis method)^{[1]-[3]}이 실용화되고 있다. 부분구조해석법을 이용하면 구조물의 특성을 정도 높게 파악할 수 있으나 원하는 구조특성을 갖도록 구조물을 설계하기 위한 방법 중의 하나가 감도해석법(sensitivity analysis method)^{[4]-[6]}이다. 설계변수에 대한 감도값을 구하게 되면 효율적인 변경량을 정량적이고 안정적으로 계산할 수 있다. 그러나 일반적으로 구조물의 변경위치를 찾아내기란 매우 어려우므로 최적화수법(optimization method)을 이용하게 된다. 이 방법을 이용하면 목표하는 구조특성을 갖는 최적구조물을 얻을 수 있다.

본 연구에서는 상자형 구조물을 사용해 제약조건인 고유진동수를 일정하게 유지한 채 중량이 최소인 구조물로 변경시키려고 한다. 먼저 구조물의 진동특성을 파악하기 위해서 구속형 모우드합성법을 사용하여 구조물을 해석하고, 구해진 해석결과를 중량에 의한 감도해석법과 최적화수법을 이용하여 판두께를 결정한다. 구해진 판두께를 구조물에 부가해서 재해석하고, 해석 결과를 고찰함으로써 제시한 중량최소화법의 타당성을 검증하고자 한다.

2. 감도해석법

Fox^[7]의 방법을 이용하기로 하고, 다음과 같은 운동방정식을 고려한다.

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{X\} = (-\lambda [M] + [K])\{X\} = \{0\} \quad (2-1)$$

이 고유치 문제에서 r 차의 고유치 λ_r 에 대한 고유진동모우드 벡터를 $\{\phi_r\}$, 설계변수 γ 가 γ_0 에서 미소량 $\Delta\gamma$ 만큼 변화하면

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma \quad (2-2)$$

$[K]$, $[M]$, λ_r , ω_r , $\{\phi_r\}$ 들도 따라서 변화하게 된다.

설계변수에 대한 1차 미분항만을 고려하면

$$[K] = [K_0] + \frac{\partial [K]}{\partial \gamma} \cdot \Delta\gamma = [K_0] + [K'] \Delta\gamma$$

$$[M] = [M_0] + [M'] \Delta\gamma$$

$$\omega_r = \omega_{0r} + \omega_r' \Delta\gamma \quad (2-3)$$

$$\lambda_r = \lambda_{0r} + \lambda_r' \Delta\gamma$$

$$\{\phi_r\} = \{\phi_{0r}\} + \{\phi_r'\} \Delta\gamma$$

$$\omega_r' = \lambda_r' / 2 \omega_{0r} \quad (2-4)$$

고유진동수의 감도는 고유치의 감도에 의하여 구하게 된다.

$$\lambda_r' = \{\phi_{0r}\}^T ([K'] - \lambda_{0r} [M']) \{\phi_{0r}\} \quad (2-5)$$

3. 중량최소화법

3-1 제안방법

감도해석에 의해 구해진 중량감도행렬을 $[B]$, 중량을 변경하고자 하는 장소의 변경량을 $\{\Delta w\}$, 변경하고자 하는 고유진동수의 목표값과 현재값과의 차를 $\{\Delta f\}$ 라 하면, 이의 최적화 문제는

$$[B] \{\Delta w\} = \{\Delta f\} \quad (3-1)$$

일반적으로 구조변경의 문제는 변경량의 개수가 방정식의 개수보다 많은 것이 특징이다. 이 경우에 $\{\Delta w\}$ 는 무수히 많은 해를 가지게 되나 다음과 같은 S 를 최

소로 하는 제약을 가하면 해가 일의적으로 결정된다.

$$S = \{\Delta w\}^T \{\Delta w\} \quad (3-2)$$

이러한 경우를 의사 최소자승법의 문제라 부른다.

$$\{\Delta w\} = [B]^T ([B][B]^T)^{-1} \{\Delta f\} \quad (3-3)$$

식(3-3)에 의해서 $\{\Delta w\}$ 가 구해지면 식(3-2)로부터

$$\Delta t_j = \Delta w_j / (S_j \times \rho_j) \quad (3-4)$$

로 되고, 각 요소의 변경두께를 구하게 된다.^[8]

3-2 판정방법

총중량 $W(w)$ 는 각 요소중량 w_j 의 합으로써

$$W(w) = w_1 + w_2 + \dots + w_n = \{1\}^T \{w\} \quad (3-5)$$

i 번째의 고유진동수 g_i 를 $\{w\}$ 의 함수로써 제약조건을

$$g_i(w) = f_i \quad (i = 1, m) \quad (3-6)$$

제약조건을 만족하고 $W(w)$ 가 극소점으로 되는 요소상태를 $\{w\}$ 라 하면 설계 변수 w 가 w_0 에서 미소량 Δw 만큼 변해서

$$w = w_0 + \Delta w$$

$$g_i(w) = g_i(w_0) + \left\{ \frac{\partial g_i(w)}{\partial w} \right\}^T (\{w\} - \{w_0\}) \quad (3-7)$$

$$\left\{ \frac{\partial g_i(w)}{\partial w} \right\}^T = \{B_{i1}, \dots, B_{in}\} \quad (3-8)$$

Lagrange승수법(the method of Lagrange multiplier)^[9]을 적용한다.

Lagrange승수법은 제약조건하에서 함수의 극치를 찾아가는 방법으로 식(3-5)과 식(3-6)로부터 Lagrange함수 Z 를 정의할 수 있다.

$$Z = W(w) - \sum_{i=1}^m L_i(g_i(w) - f_i) \quad (3-9)$$

이 정의에서 제약조건을 만족하고 $W(w)$ 가 극소일 때,

$$\{\Delta Z\} = \{1\}^T - \sum_{i=1}^m L_i \{B_i\} = \{0\} \quad (3-10)$$

특히, 주목하는 고유진동수가 한 개 뿐일 때는

$$\{B_1\} = \{1\}^T 1/L_1 \quad (3-11)$$

로 되고, 극소중량상태에서는 각 요소의 중량감도가 일정하게 된다.

4. 상자형 구조물의 진동해석과 중량최소화

4-1 열린 상자형 구조물의 중량최소상태 고찰

본 연구를 위해서 Fig. 4.1과 같은 두께가 10mm인 연강판을 사용하여 제작한 길이 200mm, 폭 100mm, 높이 150mm인 열린 상자형 구조물을 해석모델로 사용하였다. 우선 구속형 모우드합성법으로 구조물의 진동특성을 파악하기 위해서 전체구조물을 Fig. 4.2와 같이 간단한 4개의 부분구조로 나뉘고, 각 부분구조를 50mm간격의 정방형 유한요소로 나누어 모델링(modeling)하였다. 이처럼 모델링된 구조물을 구속형 모우드합성법을 통해 진동해석을 하였다. 각 차수에 대한 고유진동수는 Table 4.2에 나타내었으며, 각각의 고유진동수에 대한 고유모우드는 Fig. 4.3에 나타내었다.

Fig. 4.10을 두께가 4.4mm인 초기상태로 진동해석을 하였다. 얻어진 진동특성을 이용해 중량감도행렬을 구하였다. 식(3-4)로부터 얻어진 내적이 최소인 변경량을 구조물의 두께에 부가시켜 재해석을 하였다. 이 해석 결과는 Lagrange승수법을 이용하여 구조물이 극소중량상태인지 판정하였다. 먼저 두께가 4.4mm인 초기상태 일 때의 고유진동수 181.9Hz를 식(3-6)의 제약조건인 고유진동수 410.1Hz로 이동시켰을 때, 식(3-9)의 우변 제2항 $\sum_{i=1}^m L_i (g_i(y) - f_i)$ 는 영(zero)으로 되고, 그 다음으로 식(3-11)의 감도가 중량최소화법을 통해 일정하게 유지되었으면 극소 중량상태로 판정하였다.

9번의 반복계산을 통해 고유진동수 181.91Hz로부터 제약조건인 410.1Hz로 변경되었을 때, 각 부분의 두께변화를 Table 4.1에 나타내었다. 이 표에서 감도가 1.633(Hz/kg)정도의 일정한 분포를 보였으며 총중량은 5.502kg에서 4.83kg으로 11.8%만큼 감소하였다. 중량최소상태에서 고유모우드는 Fig. 4.4에 나타내었다. 주

목한 고유진동수 410.1Hz에서 변경 전과 후의 고유모우드가 일치함을 알 수 있었다.

Fig. 4.5는 증량최소 전과 후의 전달함수를 보여주고 있다. Fig. 4.5는 1번 부분 구조의 8번 절점을 가진했을 때, 4번 부분구조 8번 절점에서의 전달함수이다.

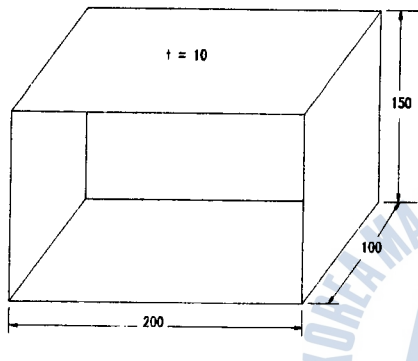


Fig. 4.1 Dimension of the open-box-type structure

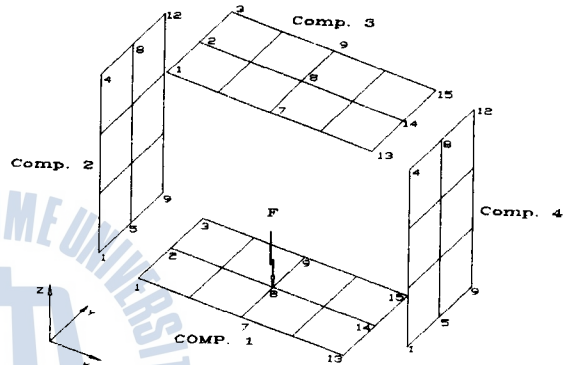
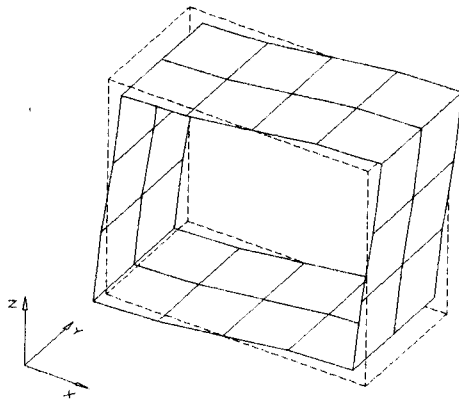
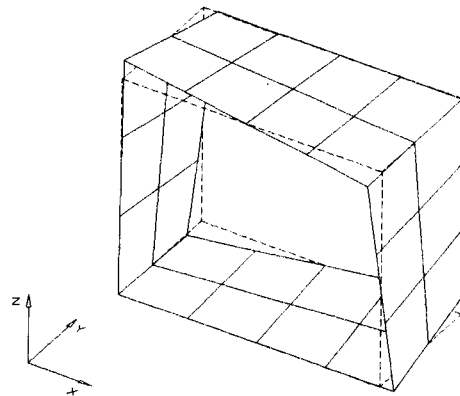


Fig. 4.2 Modeling of the open-box-type structure with 4 components



410.1 Hz

(a) 7th mode



652.0 Hz

(b) 8th mode

Fig. 4.3 Natural modes before modification

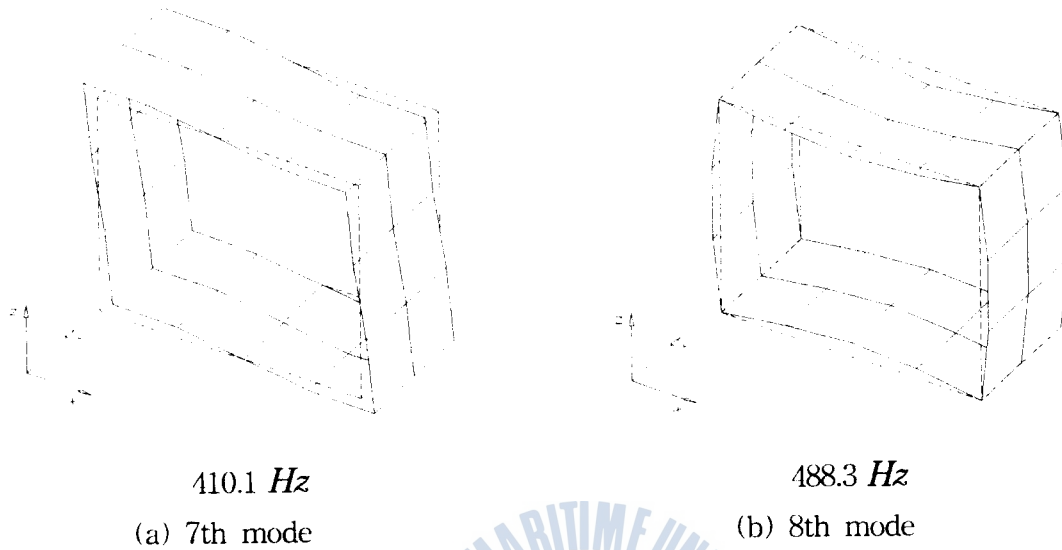


Fig. 4.4 Natural modes after modification

Table 4.1 Change of the sensitivity and thickness following the modified structure

Natural Frequency			410.1	181.9	316.4	408.9	410.0	409.97	410.1
	No.	No.	original	first	1st	3rd	5th	7th	9th
	Comp.	Elem.	modal	modal	Calc.	Calc.	Calc.	Calc.	Calc.
Sensitivity (Hz/kg)	1	1-2	2.8095	2.88	0.355	1.549	1.554	1.542	1.6334
		3-6	-0.0880	-0.085	5.303	1.536	1.531	1.520	1.6329
		7-8	2.8094	2.88	0.355	1.549	1.554	1.542	1.6334
	2	1-2	2.3802	2.43	0.878	1.822	1.822	1.807	1.6328
		3-4	-0.1483	-0.153	2.389	1.496	1.488	1.619	1.6338
	4	5-6	2.3802	2.43	0.878	1.822	1.822	1.807	1.6328
		1-2	10	4.4	10.2	10.8	10.8	10.8	10.7
		3-6	10	4.4	4.2	6.8	6.9	6.9	6.8
Thickness	3	7-8	10	4.4	10.2	10.8	10.8	10.8	10.7
		1-2	10	4.4	9.3	10.3	10.3	10.3	10.5
	2	3-4	10	4.4	4.1	5.7	5.7	5.6	5.6
		5-6	10	4.4	9.3	10.3	10.3	10.3	10.5
Total Weight(kg)			5.5						4.83

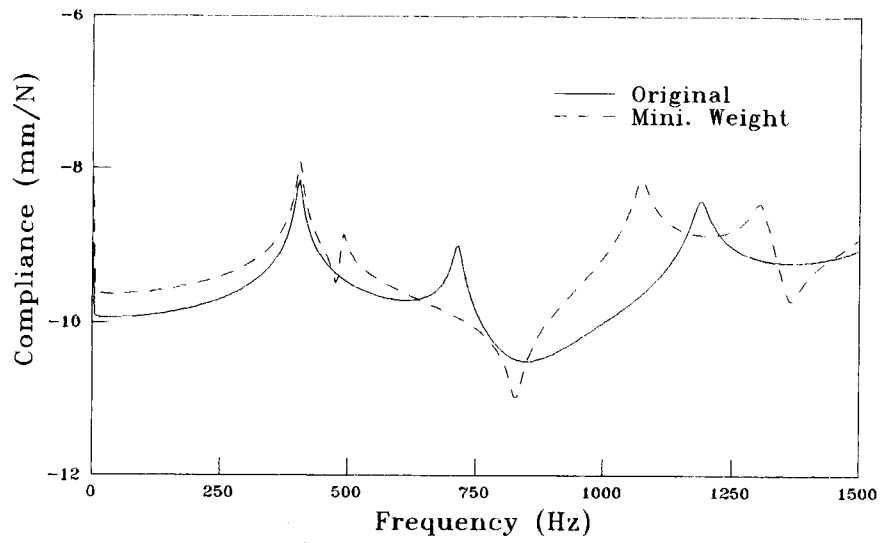
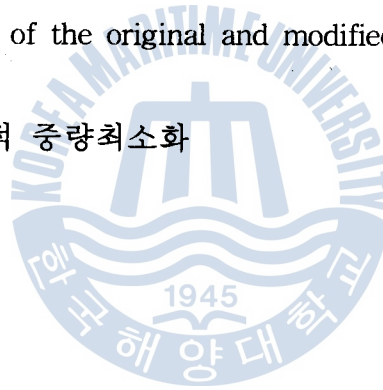


Fig. 4.5 Comparison of the original and modified compliances

4-2 구조물의 부분적 중량최소화



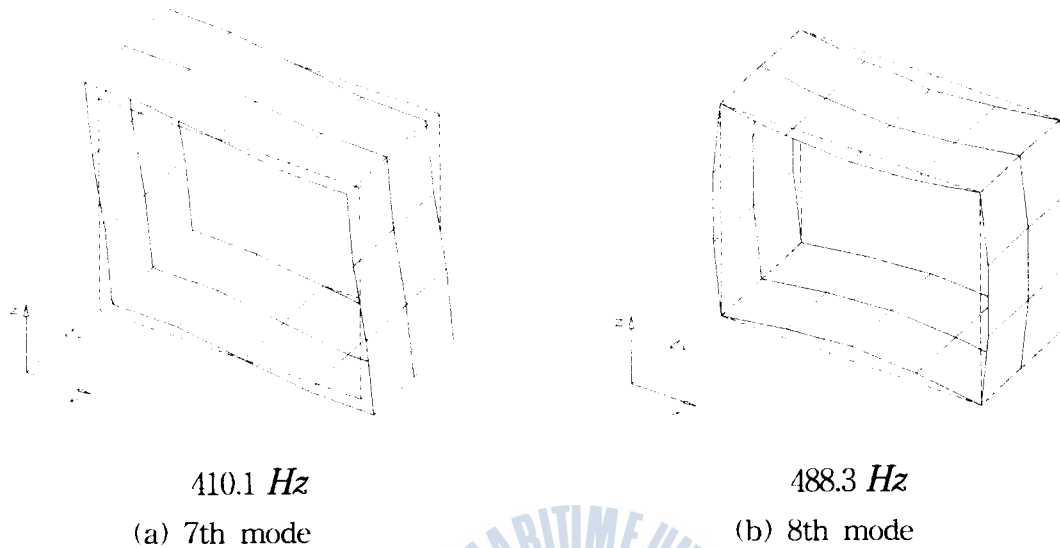


Fig. 4.4 Natural modes after modification

Table 4.1 Change of the sensitivity and thickness following the modified structure

Natural Frequency			410.1	181.9	316.4	408.9	410.0	409.97	410.1
	No.	No.	original	first	1st	3rd	5th	7th	9th
	Comp.	Elem.	modal	modal	Calc.	Calc.	Calc.	Calc.	Calc.
Sensitivity (Hz/kg)	1	1-2	2.8095	2.88	0.355	1.549	1.554	1.542	1.6334
		3-6	-0.0880	-0.085	5.303	1.536	1.531	1.520	1.6329
		7-8	2.8094	2.88	0.355	1.549	1.554	1.542	1.6334
	2	1-2	2.3802	2.43	0.878	1.822	1.822	1.807	1.6328
		3-4	-0.1483	-0.153	2.389	1.496	1.488	1.619	1.6338
		5-6	2.3802	2.43	0.878	1.822	1.822	1.807	1.6328
Thickness	1	1-2	10	4.4	10.2	10.8	10.8	10.8	10.7
		3-6	10	4.4	4.2	6.8	6.9	6.9	6.8
		7-8	10	4.4	10.2	10.8	10.8	10.8	10.7
	2	1-2	10	4.4	9.3	10.3	10.3	10.3	10.5
		3-4	10	4.4	4.1	5.7	5.7	5.6	5.6
		5-6	10	4.4	9.3	10.3	10.3	10.3	10.5
Total Weight(kg)			5.5						4.83

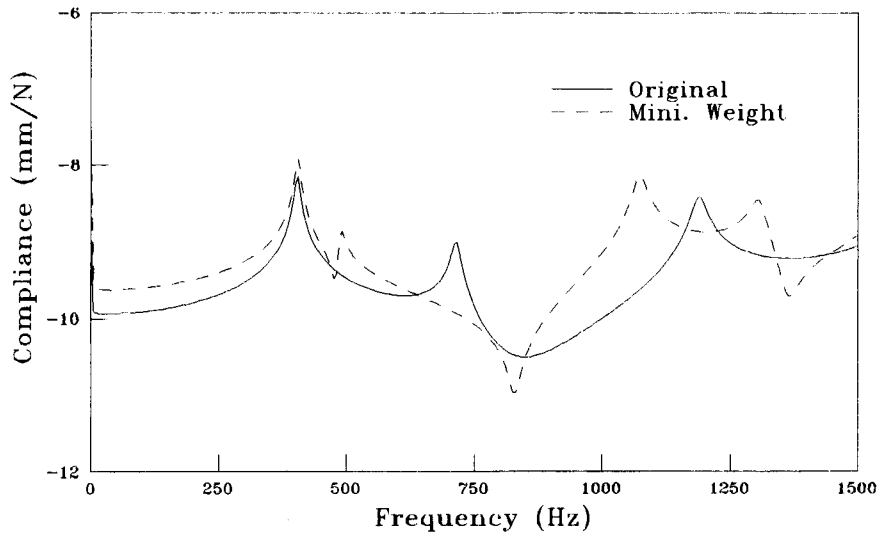


Fig. 4.5 Comparison of the original and modified compliances

4-2 구조물의 부분적 중량최소화

4-1절에서는 중량최소화를 구조물 전체에 대해 실시하였다. 본 절에서는 구조물의 일부분만을 변경시켜 그 부분의 중량최소화를 이루려고 한다. 모델은 Fig. 4.1에 나타내었으며 Fig. 4.6는 4개의 부분구조로 모델링하였다.

그리고 각각의 고유진동수에 대한 고유모우드를 Fig. 4.7에 나타내었다.

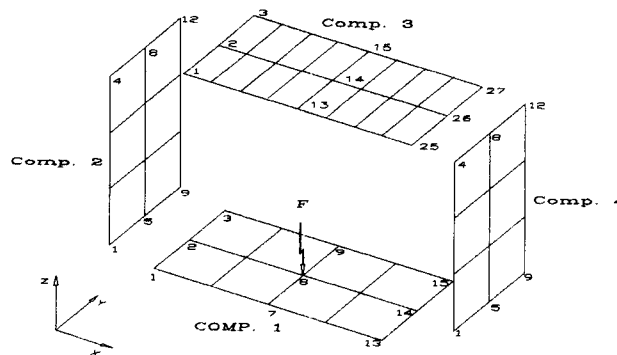


Fig. 4.6 Modeling of the open-box-type structure with 4 components

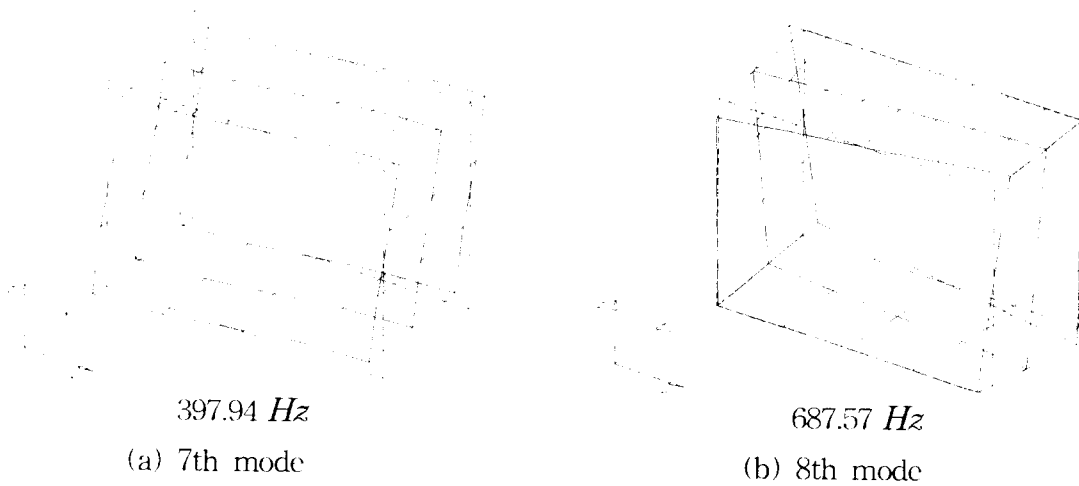


Fig. 4.7 Natural modes before modification

원래의 구조물을 두께 6mm인 초기상태로 잡고, 이 초기상태로부터 구한 7차 고유진동수 340.63Hz를 제약조건인 397.94Hz로 이동하였을 때, 각 부분의 감도와 두께 변화를 Table 4.2에 나타내었다. 이 표에서 감도가 0.9223(Hz/kg) 정도의 일정한 분포를 보였으며 총중량은 5.5kg에서 5.2kg으로 5.8% 만큼 감소하였다.

중량최소상태에서의 고유모우드는 Fig. 4.8에 나타내었다.

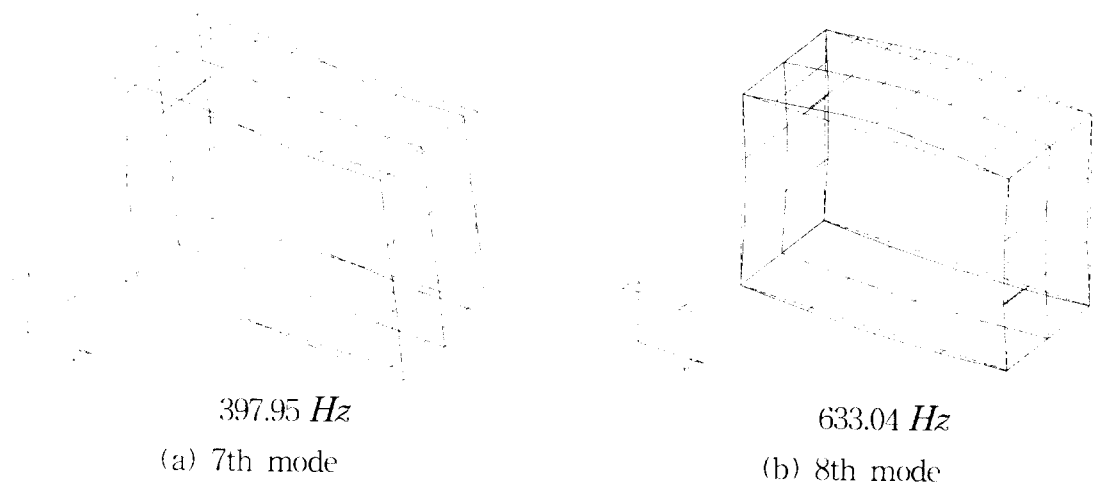


Fig. 4.8 Natural modes after modification

Table 4.2 Chang of the sensitivity and thickness following the modified structure

Natural Frequency			397.94	340.63	396.24	397.92	397.95	
	No.	No.	original modal	first modal	2nd Calculation	4th Calculation	6th Calculation	
	Comp	Elem.						
Sensitivity (Hz/kg)	1	1-2	2.7796	3.0288	2.8543	2.8522	2.8491	
		3-6	-0.0713	0.0652	-0.0507	-0.0545	-0.0551	
		7-8	2.7793	3.0288	2.8543	2.8522	2.8491	
	2 4	1-2	2.4054	3.1439	2.5420	2.5267	2.5293	
		3-4	-0.1785	0.2301	-0.1432	-0.1467	-0.14	
		5-6	2.2593	-0.3157	1.55	1.6431	1.6212	
	3	1-2	2.2253	3.0227	1.0969	1.0818	0.9228	
		3-4	0.6985	0.9696	1.1703	1.1268	0.9223	
		5-6	0.0785	0.0943	0.9276	0.8944	0.922	
		7-10	-0.2297	-0.3708	0.182	0.1969	0.922	
		11-12	0.0785	0.0943	0.9276	0.8944	0.922	
	13-14	0.6985	0.9695	1.1703	1.1268	0.9223		
	15-16	2.2253	3.0227	1.0969	1.0818	0.9223		
	Thickness	1	1-2	10	-	-	-	-
			3-6	10	-	-	-	-
7-8			10	-	-	-	-	
2 4		1-2	10	-	-	-	-	
		3-4	10	-	-	-	-	
		5-6	10	-	-	-	-	
3		1-2	10	6	11.0	11.1	11.4	
		3-4	10	6	8.5	8.7	9.0	
		5-6	10	6	7.0	7.2	7.1	
		7-10	10	6	5.5	5.6	4.5	
Total Weight(kg)				5.5			5.18	

4-3 Engine Block 모형의 중량최소화

이 절에서는 4실린더 엔진 블럭(engine block) 모형을 대상으로 중량최소화법을 적용시켜 보았다. 모델은 두께가 4mm, 크기가 320×160×280mm인 모형으로 Fig. 4.9에 나타내었다. 그리고 Fig. 4.10과 같이 7개의 부분구조로 나눠 모델링하였다.

그리고 각각의 고유진동수에 대한 고유모우드를 Fig. 4.11에 나타내었다.

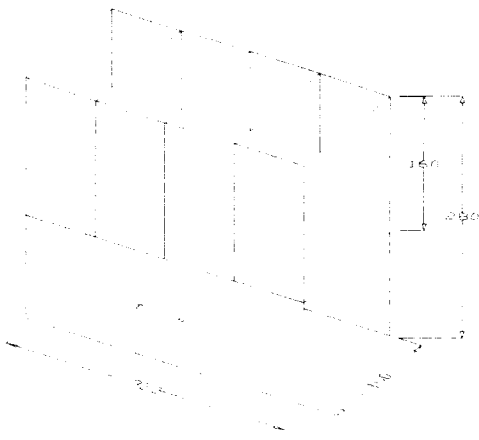


Fig. 4.9 Dimension of the engine-block-type structure

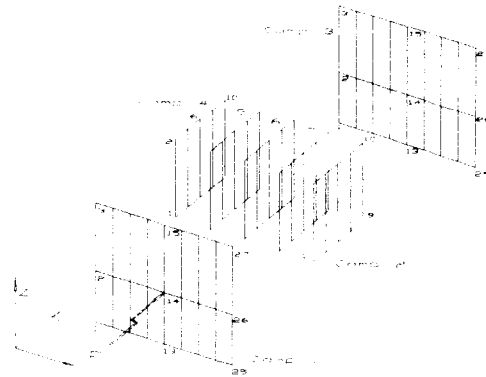
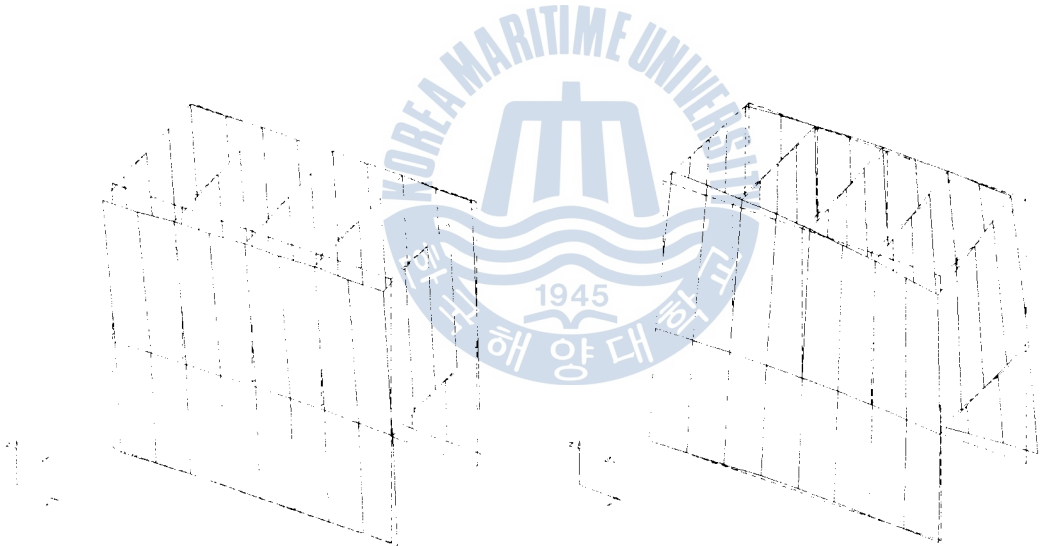


Fig. 4.10 Modeling of the engine-block-type structure with 7 components



112.92 *Hz*
(a) 7th mode

135.9 *Hz*
(b) 8th mode

Fig. 4.11 Natural modes before modification

원구조물의 두께 4mm를 초기상태로 각각 2mm와 3mm로 잡고, 이 두께들에 대해서 중량최소화법을 적용하였다. 감도와 두께의 변화상태를 Table 4.3에 나타내었다. 전체적인 감도차를 보면 최고 2.2 정도이지만 부분적으로는 최고 0.9 정도의 비교적 양호한 분포를 보였다. 이 때의 총중량은 9.7kg에서 6.6kg과 7.8kg으로 각

각 줄였으며 상대적인 두께 감소율은 34.5%와 19.6%의 감소율을 보였다.

각각의 상태에 대한 변경 후의 고유모우드는 Fig. 4.12와 Fig. 4.13에 나타내었다.

Table 4.3 Change of the sensitivity and thickness following the modified structure

	No. Co.	No. Elem.	Original Model	t=2.0 (mm)	t=3.0 (mm)		Orig. Mod.	t=2.0 (mm)	t=3.0 (mm)
Sensitivity (Hz/kg)	1 3	1	-0.1279	0.51737	1.01921	Thick-ness (mm)	4	2.124	2.051
		2	1.64604	0.25942	0.34371			3.36	4.033
		3	-0.1071	1.26015	1.74665			2.31	2.176
		4	2.49812	0.95697	1.09371			4.169	4.491
		5	-0.8058	1.39375	2.05902			2.386	2.074
		6	2.8329	1.66419	1.40975			4.551	4.349
		7	-0.1729	0.85252	1.59198			2.172	2.327
		8	2.33359	1.27006	1.16449			4.069	4.445
		9	-0.1434	1.05973	1.67465			2.256	2.187
		10	2.22971	1.98319	1.30452			4.087	4.198
		11	-0.1102	1.10175	1.56335			2.278	2.299
		12	2.03523	1.55761	0.98516			3.858	4.391
		13	-0.0405	1.39674	1.87862			2.404	2.253
		14	1.67111	1.93961	0.93146			3.615	3.84
		15	-0.0511	0.41105	0.86737			2.188	2.082
		16	0.83172	0.15954	0.23684			2.682	4.093
	2	1 4	-0.6686	-0.2796	-0.1030	4	1.906	3.074	
		2 3	-0.0580	-0.2039	-0.1205		1.92	3.068	
	4	1 4	-0.2728	-0.1410	-0.2065	4	1.752	3.062	
		2 3	-0.1688	-0.1071	-0.1726		1.841	3.051	
	5	1 4	-0.1847	0.01329	-0.0346	4	1.935	2.973	
		2 3	-0.0991	-0.0605	-0.0413		1.952	3.026	
	6	1 4	-0.1243	0.06773	-0.0348	4	1.905	2.954	
		2 3	-0.0589	-0.0263	-0.0344		1.944	3.017	
	7	1 4	-0.0753	0.15377	-0.0657	4	1.87	2.974	
		2 3	-0.0445	-0.1374	-0.0642		1.913	3.025	
Total Weight(kg)							9.66	6.55	7.76

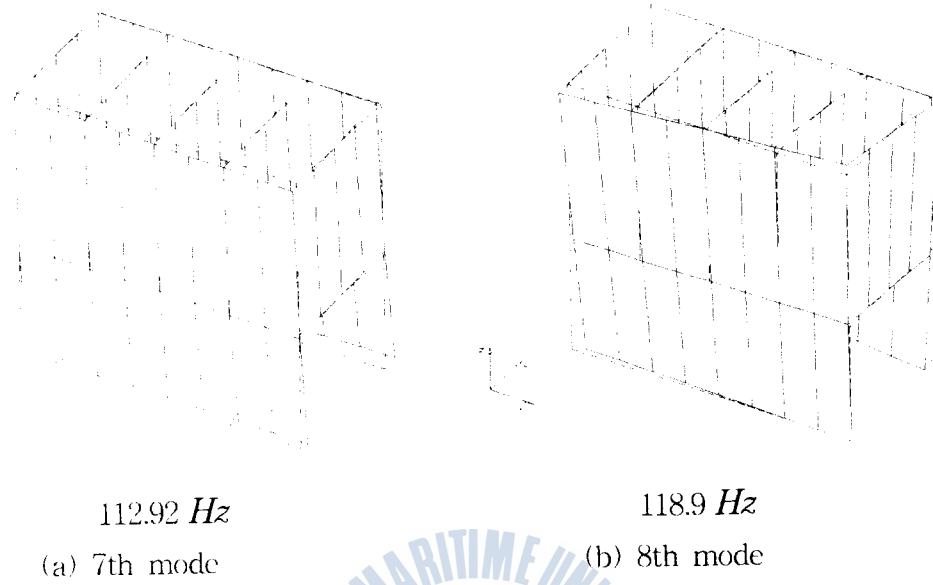


Fig. 4.12 Natural modes after modification

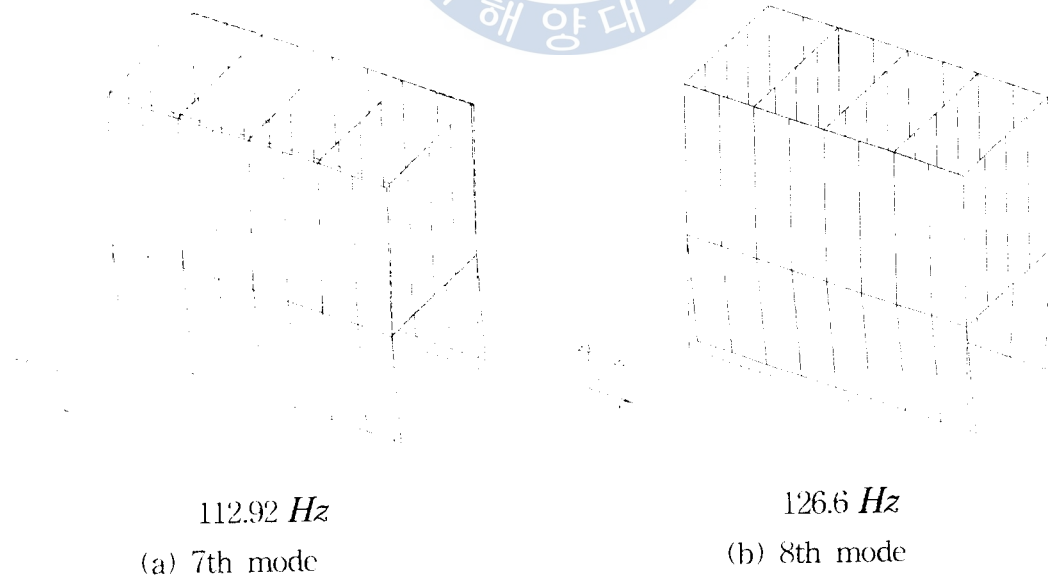
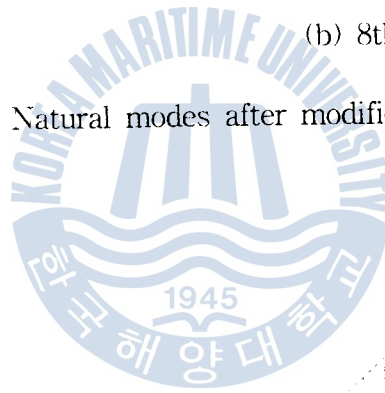


Fig. 4.13 Natural modes after modification

5. 결론

1. 감도해석법을 통해 중량을 최소로 하려는 부분의 감도를 쉽게 구할 수 있었다.
2. 중량에 의한 감도를 이용하면 구조물의 변경량을 최적화수법에 의해 정량적이고 안정적으로 구할 수 있었다.
3. 목표하는 고유진동수의 변화 없이 구조물의 중량최소화를 이뤘다.
4. 구조물의 일부분만을 중량최소화할 수 있었다.
5. 4실린더 엔진 블럭 구조물에도 중량최소화법을 적용할 수 있었다. 따라서 실제 구조물에 대하여 적용할 수 있는 가능성을 보여 주었다.

참 고 문 헌

- [1] 朴錫柱, 長松召男, “프레스 機械의 振動解析과 動特性的의 最適化”, 韓國船用機關學會誌, 第14卷, 第3號, 1990, p.34
- [2] 오재웅 외 3인, “부분구조합성법을 이용한 대형 구조물의 동특성 규명 및 개선에 관한 연구”, 한국소음진동학회 추계학술발표대회 논문집, 1993, p.177
- [3] K.F.Ehmann, Joo H. H., “A Method for Substructural Sensitivity Synthesis” ASME J. Vol.113, 1991, p.201
- [4] 朴錫柱 外4人, “感度解析技法에 의한 最適 構造變更法”, 韓國船用機關學會誌, 第16卷, 第1號, 1992, p.47
- [5] 김종현, 임채환, “섭동법을 이용한 구조 재설계 기법”, 대한조선학회지, 제31권, 제1호, 1994, p.22
- [6] 岩原光男, 長松召男, 朴錫柱, “動特性を考慮した構造物の最適化方法”, 日本機械學會論文集, 56卷 423號, 1990, p.1753
- [7] R.L.Fox, “Rates of Changes of Eigen Values and Eigen Vectors”, AIAA J., Vol.6, No.12, 1968, p. 2426
- [8] 柳井晴夫, 竹内 啓, “射影行列, 一般行列, 特異値分解”, 東京大學出版會, 1983, p.65
- [9] Kyuichro, Washizu, “Variational Methods in Elasticity and Plasticity”, Pergamon Press, 1975, p.254