상미분방정식계의 응용에 관한 연구

박 신 규* · 김 장 욱**

A study on the application of a system of Ordinary Differential equations

Sin-Kyoo Park*

ABSTRACT

This thesis is designed to establish the logical inclusion relation of such concepts as stability, attraction and bound. It takes a look at their examples and focuses on the clear definition of such concepts and finally looks into the stability of linear differential equations.

1. 서 론

안정성, 흡수성, 유계성의 제개념에 대하여 이들의 논리적 포함관계를 정리하고, 여기에 따른 예문을 정리해 나가면서 나아가서는 제개념을 더욱 명확히 할 수 있는 정리를 다루어 선형미분방정식계의 안정성 등을 연구한다.

D를 O를 포함하여 R^m의 영역이라 하면 I를 $[0, \infty)$, $f: I\times D \to R^m$은 $f\in C[I\times D]$, $f(t,0)\equiv 0$을 만족하는 함수

$$\dot{x}=f(t,x),\ \ f(t,0)=0 \tag{1}$$

* 한국해양대학교 응용수학과 석사과정 미분방정식 전공
** 한국해양대학교 응용수학과 교수

이라 한다. 이 때, 다음과 같이 정의한다.

Definition2.1 (1)의 영해(零解) $x=0$이 안정(安定)일 때, 이를 간단히 $x=0$는 [S]로 표시한다.

$$\forall\varepsilon>0,\quad \forall t_0\in I,\quad \exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0:\quad \forall x^0\in B_\delta,\quad \forall t\leqq t_0$$

$$\|x(t;t_0,x^0)\|<\varepsilon$$

여기에서 $B_\delta=\{x\in R^m:\|x\|<\delta\}$

Example2.1 $\dot{x}=(t\sin t-1)x,\ \ I\times R^1$

(t_0,x_0)를 통하는 해 $x(t;t_0,x_0)$는 다음 식으로 주어진다.

$$x(t:\ t_0,x_0)=x_0\exp(-t-t\cos t+\sin t+t_0+t_0\cos t_0-\sin t_0)$$

따라서 $|x(t;t_0,x_0)|\leqq|x_0|e^{2t_0+2}$ $(t\geqq t_0\geqq 0,\ x_0\in R^1)$ 이 된다

그래서 방정식의 영해는 안정이다. 한편으로

$$|x((2n+1)\pi;\ t_0,x_0)|=|x_0|\exp(t_0+t_0\cos t_0-\sin t_0)\geqq|x_0|e^{-1}$$

이 전제의 자연수 n와 $x_0\in R^1$에 대하여 성립하며 더욱

$$x((2n+1)\pi;\ 2npi,\ x_0)=x_0e^{4n\pi}\to\infty\ (n\to\infty,x_0>0)$$

이므로 안정성의 정의가 된다.

δ는 t_0(이 경우 $=2n\pi$)에 관계없이 취급되지 않음을 알 수 있다.

Definition2.2 방정식계 (1)의 영해가 일양안정(Uniformly stable) (이를 간단히 [$U.\ S$]로 표시한다.)일 때,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\quad \forall t_0\in I,\ \forall x^0\in B_\delta,\quad \forall t\geqq t_0$$

$$\|x(t;t_0,x^0)\|<\varepsilon$$

Example 2.1는 영해인 안정이나 일양안정은 아니다. 이는 [$U.S$] ⇒[S]이다.

Example2.2 $\dot{x}=0,\ \ t\in I,\ x\in R^1$을 생각하면

$$x(t;t_0,x_0)\equiv x_0\ (-\infty<t<+\infty)\ \text{이므로}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists \delta = \varepsilon > 0 : \quad \forall t_0 \in I , \quad \forall x_0 \in B_\delta , \quad \forall t \geqq t_0$$

$$| x(t \ ; \ t_0 \ , \ x_0) | < \varepsilon$$

이는 영해는 일양안정이며, 따라서 이 해는 $t \to \infty$일 때, $x(t) \to 0$는 되지 않는다.

Definition2.3 방정식 (1)의 영해가 흡수적(attactive) 또는 준점근안정(quasi asymptotically stable)일 때,

$$\forall t_0 \in I , \quad \exists \delta_0 = \delta_0(t_0) > 0 \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ , \quad \forall x^0 \in B_{\delta_0} , \quad \forall x(\cdot \ ; \ t_0 \ , \ x^0)$$

$$\exists \ T = T(t_0 \ , \varepsilon \ , x^0 \ , x(\cdot \ ; t_0 , \ x^0)) : \quad \forall t \geqq t_0 + T$$

$$\| x(t \ ; \ t_0 \ , \ x^0) \| < \varepsilon$$

이를 간단히 $[A]$로 표시한다.

Definition2.4 방정식계 (1)의 영해가 점근안정(asymptotically stable)이다. (1)의 영해가 안정 또한 흡수적인 경우라 한다.

즉 $[S] \wedge [A]$이다. 이 때, $[A.S]$이라 표시한다.

Theorem 2.1 A를 $m \times m$ 정수행렬이면

$$\| \exp(tA) \| \leqq \exp(t\mu(A)) \quad (t \geqq 0)$$

이 성립한다.

proof $\| \exp(tA) \| = \sup_{\|\varepsilon\|=1} \| \exp(tA) \cdot \varepsilon \|$

한편, $\exp(tA)\varepsilon = x(t)$

$$\| \exp(tA) \| \leqq \sup_{\|\varepsilon\|=1} \|\varepsilon\| \exp(t\mu(A)) = \exp(t\mu(A)) \quad (t \geqq 0)$$

Theorem 2.2 $A(t) \in [t_0, \infty)$, $x(t)$를 $(1)_0$의 해이라 하면

$\|x(t)\| \exp(-\int_{t_0}^{t} \mu[A(s)]ds)$는 t에 따라서 $t \geqq t_0$: 비증가

$\|x(t)\| \exp(\int_{t_0}^{t} \mu[-A(s)]ds)$는 t에 따라서 $t \geqq t_0$: 비감소

$t \geqq t_0$으로 다음의 부등식이 성립한다.

$$\|x(t_0)\| \exp(-\int_{t_0}^{t} \mu[-A(s)]ds) \leqq \|x(t)\|$$

$$\leqq \|x(t_0)\| \exp(\int_{t_0}^{t} [A(s)]\,ds)$$

Theorem 2.3 $x(t)$를 $(1)_0$의 임의의 해라 하면

$$H(t) = \{A^*(t) + A(t)\}/2$$

$$\lambda(t) = \inf_{x \neq 0} \frac{x^* Hx}{x^* x}, \quad \Lambda(t) = \sup_{x \neq 0} \frac{x^* Hx}{x^* x}$$ 이라 두면

$$\|x(t_0)\| \exp(\int_{t_0}^{t} \lambda(s)\,ds) \leqq \|x(t)\|$$

$$\leqq \|x(t_0)\| \exp(\int_{t_0}^{t} \Lambda(s)ds) \quad (t \geqq t_0)$$ 이 성립한다

proof $\|x(t)\|^2 = x^*(t)x(t)$이므로 $\rho^2(t) = x^*(t)x(t)$이라 두면

$$\frac{d}{dt}\{x^*(t)x(t)\} = \dot{x}^*(t)x(t) + x^*(t)\,\dot{x}(t)$$

$$= x^*(t)A^*(x)x(t) + x^*(t)A(t)x(t)$$

$$2\rho(t)\,\dot{\rho}(t) = x^*(t)\{A^*(t) + A(t)\}x(t),$$

따라서 $\rho(t)\,\dot{\rho}(t) = x^*(t)H(t)x(t)$.

따라서 $\lambda(t) \leqq \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \leqq \Lambda(t)$이 된다.

양변을 t_0부터 t 까지 적분하면

$$\int_{t_0}^{t} \lambda(s)\,ds \leqq \log\rho(t) - \log\rho(t_0) \leqq \int_{t_0}^{t} \Lambda(s)\,ds.$$

Theorem 2.4

$\Phi(t)$를 $(1)_0$의 하나가 기본해 행렬이라 하면, $(1)_0$의 영해는

(1) [S] $\Leftrightarrow$ $\exists K>0$: $\|\Phi(t)\| \leqq K, \quad \forall t \geqq t_0$

(2) [U.S] $\Leftrightarrow$ $\exists K>0$: $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leqq K \quad (t_0 \leqq s \leqq t \leqq +\infty)$

proof $\Phi(t_0)=I$

따라서 (t_1, x^1)를 통하는 해

$$x(t;\ t_1,\ x^1) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(T_1)x^1$$

$$\|x^1\| < \delta \Rightarrow \|x(t;\ t_1, x^1) = \|\Phi(t)\|\,\|\Phi^{-1}(t)\|\,\|x^1\| < K(K\|\Phi^{-1}(t_1)\|)^{-1}\varepsilon = \varepsilon$$

역으로

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \delta(\varepsilon, t_0)>0 : \|x^0\| < \delta \Rightarrow \|\Phi(t)x^0\| < \varepsilon \quad (t_0 \leqq t)$$

$$\Rightarrow \|\Phi(t)\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|\Phi(t)\xi\| = \sup_{\|x_0\|=\frac{\delta}{2}} \frac{\|\Phi(t)x^0\|}{\|x^0\|} \leqq 2\delta^{-1}\varepsilon = K$$

(2) $\exists K>0, \quad \exists s>0 : \|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leqq K \quad (t_0 \leqq s \leqq t < +\infty) \Rightarrow$

$$\|x(t;\ t_1,\ x^1)\| = \|\Phi(T)\Phi^{-1}(T_1)X^1\| \leqq K\|x^1\| \quad (t_1 \leqq t < +\infty)$$

$$\forall \varepsilon>0, \ \delta = K^{-1}\varepsilon, \ \|x^1\| < \delta \Rightarrow \quad \|x(t;\ t_1,\ x^1)\| \quad (t_1 \leqq t)$$

영해는 [U.S]이다.

역으로 $\forall \varepsilon>0, \quad \exists \delta>0 : t_1 \geqq t_0 : \|x^1\| < \delta \Rightarrow \|x(t;\ t_1, x^1\| < \varepsilon$

$$\|x(t;\ t_1, x^1)\| = \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_1)x^1\| < \varepsilon \quad (\|x^1\| < \delta)$$

따라서

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_1)\| = \sup_{\|x\|^1=\delta/2} \frac{\|\Phi(t)\Phi(t_1)x^1\|}{\|x^1\|} \leqq 2\delta^{-1}\varepsilon$$

$(1)_0$의 영해는 [U.S]이다.

Definition 2.5 미분방정식계(1)의 영해는 다음 조건을 만족할 때, 대역적 지수점근안정(globally exponential-asymptotically stable)이라 한다.

$$\exists c>0,\ \forall \alpha>0,\ \exists K(\alpha)>0:\ \forall x^0 \in B_\alpha,\ \forall t_0 \in I,\ \forall x(\cdot\ ;\ t_0, x^0)$$

$$\forall t \geqq t_0,\quad \| x(t;\ t_0, x^0) \| \leqq K \| x^0 \| e^{-c(t-t_0)}$$

이 때, [*G. Exp. A. S*]이라 표시한다.

Theorem 2.5

(1) $A(t) \in C[I],\ A(t) \int_s^t A(\tau)d\tau = \int_s^t A(\tau)d\tau \cdot A(t)$

$$\overline{\overline{A}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{ \frac{1}{t} \int^t A(s)ds \} dt < +\infty$$

(2)의 고유치 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$의 실부가 음수이고

(3) $\overline{\lim_{t\to\infty}} \| \overline{\overline{A}} - \frac{1}{t} \int_0^t A(s)ds \| < \{ \min_{1\leqq j \leqq m} |Re\,\lambda_j| \} = \alpha$

$\Rightarrow$ $(1)_0$의 영해는 [*Exp.A.S*]이다.

proof. (1)의 조건으로부터 $A(t)A(s) = A(s)A(t)$,

$\forall t,\ \forall s \geqq 0$이다. 또한 (1)로부터

$$\int_{t_0}^t A(t)dt \cdot \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^\tau \{ \frac{1}{S} \int_{t_0}^s A(t)dt \} ds$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^\tau \{ \frac{1}{s} \int_{t_0}^s A(t)dt \}\ ds \int_{t_0}^t A(t)\,dt$$

$\tau \to \infty$이라 두면 $\int_{t_0}^t A(t)dt \cdot \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}} \int_{t_0}^t A(t)dt$가 성립한다.

정의로부터

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t \{ \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^\tau A(t)dt \} d\tau = \overline{\overline{A}} + B(t),\ \|B(t)\| \to 0\ \ (t \to \infty)$$

로 표시한다. 따라서 이 식의 양변에 t승하여 미분하면

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} A(t)dt = \bar{\bar{A}} + B(t) + t\frac{dB(t)}{dt}$$

따라서 $\bar{\bar{A}}\,[B(t)+t\frac{dB(t)}{dt}] = \bar{\bar{A}}\,[\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} A(t)dt - \bar{\bar{A}}\,]$

$$= \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} A(t)dt \cdot \bar{\bar{A}} - (\bar{\bar{A}})^2$$

$$= [B(t)+t\frac{dB(t)}{dt}]\,\bar{\bar{A}}$$

(1)의 조건으로부터 $(1)_0$의 $(t_0,\ x^0)$를 통하는 해는

$$x(t\ ;\ t_0,\ x^0) = x^0 \exp(\int_{t_0}^{t} A(t)dt)$$

$$= x_0 \exp(t\bar{\bar{A}} + tB(t) + t^2\frac{dB}{dt}(t)) \cdot t\bar{\bar{A}}$$ 와

$(tB(t)+t^2\frac{dB(t)}{dt})$는 교환 가능임을 위에서 명시하였다.

따라서 $\forall \rho>0\ (\alpha>\rho),\quad \exists\, T>0:\ t\geqq T\Rightarrow$

$$\|\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} A(t)dt - \bar{\bar{A}}\| < \alpha-\rho$$

$$\forall \varepsilon>0:\ 3\varepsilon<\rho,\ \exists\, T_2>0:\ t\geqq T_0 \Rightarrow \|B(t)\| < \varepsilon$$

따라서 $t\geqq T=\max\{T_1,\ T_2\}\ \Rightarrow$

$$\|t\frac{dB(t)}{dt}\| = \|\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} A(t)dt - \bar{\bar{A}} - B(t)\| \leqq \|\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} A(t)dt - \bar{\bar{A}}\| + \|B(t)\|.$$

따라서

$$t\|\frac{dB(t)}{dt}\| < \alpha-\rho+\varepsilon$$

또한 (2)로부터

$$\exists K>0\ :\ \|\exp(t\overline{\overline{A}})\| \leqq Ke^{(-\alpha+\varepsilon)t}$$

따라서 $\|x(t\ ;\ t_0, x^0)\| \leqq \|\exp(t\ \overline{\overline{A}})\|\ \|\exp(tB+t^2\frac{dB(t)}{dt})\|\ \ \|x^0\|$

$$\leqq K\|x^0\|\{\exp(-\alpha+\varepsilon)t\}\exp\{\ t\|B(t)\|+t^2\|\frac{dB(t)}{dt}\|\}$$

$$\leqq K\|x^0\|\ \exp[(-\rho+3\varepsilon)t]$$

$3\varepsilon<\rho$로부터 $-\rho+3\varepsilon<0$

따라서 영해는 [*Exp.A.S*]이다.

참 고 문 헌

[1] R. Bellman, Stability Theory of Differential Equations , McGraw-hill., 1953

[2] W. A. Coppel, Stability and Asymtotic Behavior of Ordinary Differential Equation. Heath., 1965

[3] L. Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations, Springer., 1970

[4] E. A. Coddington-N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. McGraww-Hill., 1955

[5] Solomon Lefschetz, Stability by Liapunov's Direct method, Academic press., 1961