三角形의 五心의 座標

The coordinates of five centers of a triangle

金　　相　　輪

Kim Sang Lun

日本의 月刊 數學雜誌 數學세미나— 71年 2月號 note 欄에서 大學助教授 藤井宏道氏는「三角形의 五心의 座標」란 表題아래 xy—座標面上의 三角形의 5個의 心의 座標를 나타내는 簡潔한 公式을 誘導하고 있다. 空間三角形의 경우는 어떻게 될까 하는 關心이 이 小稿를 낳게한 動機이고 그 結果를 前記 表題와 같은「三角形의 五心의 座標」라고 한 것이다.

空間三角形을 ABC, 그 頂点 A, B, C의 座標를 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), 또 原点 O에 對하는 A, B, C의 位置벡터를 各各 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$라고 한다.

1. 重心의 座標 : 三角形 ABC의 重心을 $G(x, y, z)$라고 할 때 原点 O에 對하는 G의 位置벡터는

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$$

이고 여기서

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\quad z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

이다. 이것은 周知의 일이다.

2. 外心의 座標 : 三角形 ABC의 外心을 $H(x, y, z)$, 原点 O에 對하는 H의 位置벡터를 $\mathbf{h}$라고 한다. 또 邊 BC, CA, AB의 中点을 D, E, F라고 하면

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{FH}=0,\quad \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DH}=0,\quad \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CB}=0$$

인 關係가 있다. ·은 벡터의 內積을, ×는 벡터의 外積을 나타내는 것은 勿論이다.

이들로 부터

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\left(\mathbf{h}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\right)=0$$

$$(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot\left(\mathbf{h}-\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\right)=0$$

$$(\mathbf{h}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$$

이고 따라서

$$(x_1-x_2)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+(y_1-y_2)\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+(z_1-z_2)\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)=0$$

$$(x_2-x_3)\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right)+(y_2-y_3)\left(y-\frac{y_2+y_3}{2}\right)+(z_2-z_3)\left(z-\frac{z_2+z_3}{2}\right)=0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0$$

即

$$(x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y+(z_1-z_2)z=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)+\frac{1}{2}(y_1^2-y_2^2)+\frac{1}{2}(z_1^2-z_2^2)$$

$$(x_2-x_3)x+(y_2-y_3)y+(z_2-z_3)z=\frac{1}{2}(x_2^2-x_3^2)+\frac{1}{2}(y_2^2-y_3^2)+\frac{1}{2}(z_2^2-z_3^2)$$

$$\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} z_1-z_2 & x_1-x_2 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}z$$

$$=x_2\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}+y_2\begin{vmatrix} z_1-z_2 & x_1-x_2 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}+z_2\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}$$

이 連立한다. 여기서 行列式

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ \Delta_1=\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} & \Delta_2=\begin{vmatrix} z_1-z_2 & x_1-x_2 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix} & \Delta_3=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

는 第3行에 관해서 展開하면

$$\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2=\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_2 & x_1-x_2 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}^2$$

이 되고 이것은 一般의 경우는 0이 아니다. 따라서 다음의 한쌍의 外心의 座標를 얻는다.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+z_1^2-z_2^2) & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \frac{1}{2}(x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2+z_2^2-z_3^2) & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ x_2\Delta_1+y_2\Delta_2+z_2\Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ \Delta_1=\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} & \Delta_2=\begin{vmatrix} z_1-z_2 & x_1-x_2 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix} & \Delta_3=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & \frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+z_1^2-z_2^2) & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & \frac{1}{2}(x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2+z_2^2-z_3^2) & z_2-z_2 \\ \Delta_1 & x_2\Delta_1+y_2\Delta_2+z_2\Delta_3 & \Delta_3 \end{vmatrix}}{}$$

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ \varDelta_1 & \varDelta_2 & \varDelta_3 \end{vmatrix}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & \frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+z_1^2-z_2^2) \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & \frac{1}{2}(x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2+z_2^2-z_3^2) \\ \varDelta_1 & \varDelta_2 & x_2\varDelta_1+y_2\varDelta_2+z_2\varDelta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-y_1 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ \varDelta_1 & \varDelta_2 & \varDelta_3 \end{vmatrix}}$$

만일 $z_1=z_2=z_3=0$ 이면

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2) & y_1-y_2 & 0 \\ \frac{1}{2}(x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2) & y_2-y_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varDelta_3=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & 0 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varDelta_3=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}}$$

分子, 分母를 第3行에 관해서 展開해서 約分하면

$$x=\frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2 & y_1-y_2 \\ x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}$$

이고 같이 하여

$$y=\frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2 \\ x_2-x_3 & x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}$$

$$z=0$$

을 얻는다. 이 $(x,y,0)$는 xy-座標面上의 三角形의 外心의 座標이다.

3. 垂心의 座標: 三角形 ABC의 垂心을 $K(x,y,z)$, 原点 O에 對하는 K의 位置벡터를 $\mathbf{k}$ 라고 하면

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CK}=0,\quad \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AK}=0,\quad \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CB}=0$$

即

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{c})=0,\quad (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{a})=0,\quad (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$$

이고 따라서

$$(x_1-x_2)(x-x_3)+(y_1-y_2)(y-y_3)+(z_1-z_2)(z-z_3)=0$$
$$(x_2-x_3)(x-x_1)+(y_2-y_3)(y-y_1)+(z_2-z_3)(z-z_1)=0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0$$

即

$$(x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y+(z_1-z_2)z=x_3(x_1-x_2)+y_3(y_1-y_2)+z_3(z_1-z_2)$$
$$(x_2-x_3)x+(y_2-y_3)y+(z_2-z_3)z=x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)+z_1(z_2-z_3)$$
$$\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} z_1-z_2 & x_1-x_2 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}z$$
$$=x_1\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}+y_1\begin{vmatrix} z_1-z_2 & x_1-x_2 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}$$

따라서 垂心의 座標

$$x=\frac{\begin{vmatrix} x_3(x_1-x_2)+y_3(y_1-y_2)+z_3(z_1-z_2) & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)+z_1(z_2-z_3) & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ x_1\Delta_1+y_1\Delta_2+z_1\Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ \Delta_1=\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} & \Delta_2=\begin{vmatrix} z_1-z_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} & \Delta_3=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_3(x_1-x_2)+y_3(y_1-y_2)+z_3(z_1-z_2) & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)+z_1(z_2-z_3) & z_2-z_3 \\ \Delta_1 & x_1\Delta_1+y_1\Delta_2+z_1\Delta_3 & \Delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & x_3(x_1-x_2)+y_3(y_1-y_2)+z_3(z_1-z_2) \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)+z_1(z_2-z_3) \\ \Delta_1 & \Delta_2 & x_1\Delta_1+y_1\Delta_2+z_1\Delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_1 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}}$$

를 얻는다. 이때의 分母는 垂心의 座標의 경우와 같다.

만일 $z_1=z_2=z_3=0$ 이면

$$z=\frac{\begin{vmatrix} x_3(x_1-x_2)+y_3(y_1-y_2) & y_1-y_2 \\ x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3) & y_2-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_3(x_1-x_2)+y_3(y_1-y_2) \\ x_2-x_3 & x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}$$

$$z=0$$

을 얻는다. 이 $(x, y, 0)$은 xy-座標面上의 三角形의 垂心의 座標이다.

4. 內心의 座標 : 角 A, B 의 二等分線은

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}+\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|}\right)$$

이므로 原点을 O, 內心을 $I(x, y, z)$라고 하면

$$\overrightarrow{OI}=\boldsymbol{a}+\left(\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}\right)t_1=\boldsymbol{b}+\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}+\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|}\right)t_2$$

即

$$\boldsymbol{a}\left\{1-\frac{t_1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}-\frac{t_1}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}-\frac{t_2}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}\right\}+\boldsymbol{b}\left\{\frac{t_1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}-1+\frac{t_2}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}+\frac{t_2}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|}\right\}$$
$$+\boldsymbol{c}\left\{\frac{t_1}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}-\frac{t_2}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|}\right\}=0$$

인 關係가 있다. 여기서

$$t_1\doteq\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|}$$

가 誘導된다. 따라서 $\overrightarrow{OI}=\boldsymbol{r}$ 라고 하면

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\left(\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}\right)\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}$$

가 된다. 三角形 ABC에서 頂点 A, B, C에 마주 보는 邊의 길이를 各各 a, b, c 라고 하면

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=c,\quad |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=a,\quad |\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|=b$$

가 되므로

$$\boldsymbol{r}=\frac{(a+b+c)\boldsymbol{a}+b(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+c(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})}{a+b+c}=\frac{a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b}+c\boldsymbol{c}}{a+b+c}$$

이다. 여기서

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\quad y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c},\quad z=\frac{az_1+bz_2+cz_3}{a+b+c}$$

를 얻고 $z_1=z_2=z_3=0$ 이면

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\quad y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c},\quad z=0$$

을 얻는다.

5. 傍心의 座標: 角 B 內의 傍心을 $B_I(x,y,z)$, 原点 O 에 對하여 B_I 의 位置벡터를 $\boldsymbol{r}_B$ 라고 하면

$$\boldsymbol{r}_B=\boldsymbol{a}+\left(\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}\right)\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|}$$

가 計算된다. $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|=b$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=c$, $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|=a$ 라고 하면

$$\boldsymbol{r}_B=\frac{(a-b+c)\boldsymbol{a}+c(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+b(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{a-b+c}=\frac{a\boldsymbol{a}-b\boldsymbol{b}+c\boldsymbol{c}}{a-b+c}$$

이고 여기서

$$x=\frac{ax_1-bx_2+cx_3}{a-b+c},\quad y=\frac{ay_1-by_2+cy_3}{a-b+c},\quad z=\frac{az_1-bz_2+bz_3}{a-b+c}$$

이 求해진다. 같이하여 角 A, C 內의 傍心 I_A, I_C 의 座標는

$$x=\frac{-ax_1+bx_2+cx_3}{-a+b+c},\quad y=\frac{-ay_1+by_2+cy_3}{-a+b+c},\quad z=\frac{-az_1+bz_2+cz_3}{-a+b+c}$$

$$x=\frac{ax_1+bx_2-cx_3}{a+b-c},\quad y=\frac{ay_1+by_2-cy_3}{a+b-c},\quad z=\frac{az_1+bz_2-cz_3}{a+b-c}$$

이 될 것이다. xy-座標面上의 三角形의 傍心은 x, y 의 값은 위의 式과 같고 z 를 0 으로 놓으면 된다.

內心・傍心의 座標(x,y,z)에서 x, y 가 頂点의 z 座標를 품지 않는 理由로 다음과 같은 定理가 成立하는 것을 알 수 있다.

定理 空間三角形을 座標面에 投影할 때는 처음 三角形의 內角 또는 外角의 二等分線의 投影線은 投影된 三角形의 內角 또는 外角의 二等分線이 된다.