Journal of the Industrial Technology Research Institute.
Korea Maritime University. Vol. 14. 1997.

비선형 상태 공간모형의 모수 추정에 관한 연구

박춘일* · 송민구** · 오대호**

Parameter Estimate of Space Model with Non-linear State

Park Choon-Iℓ · Song Min-Gu · Oh Dae-Ho

Abstract

This paper examines methods for the recursive estimation of the state variables of nonlinear state equation and nonlinear measurement equation in the presence of noise. The three estimation algorithms are considered. Extended Kalman filter is obtained by linerization of nonlinear state and measurement equation and from modifiying linear Kalman filter. But truncation error is occurred from linearization procedure and therefore we discuss the iteration filtering method to reduce this errors. And sometimes system error produces divergence of the recursive state estimates, we discuss the algorithm which is adaptive in that it determine the noise input from measurement residuals.

Key words: nonlinear state estimation, linearization, exteded Kalman filter, adaptive filtering

1. 서 론

Kalman과 Bucy에 의해 제안된 Kalman 필터링은 혼합물로 부터 "분리" 한다는 개념을 뛰어 넘게 되었고 잡음이 있는 간접적 측정치로 부터 결손 정보를 추출하는 수단을 제공하게 되었다. Kalman 필터는 또한 우리가 제어하지 못하는 동적 시스템의 가능한 미래의 어떤 경로를 예측 하는데 이용 되었다. 예로써, 장마때의 강의 흐름, 천체의 궤도, 무역 상품의 가격등이 그것이다. Kalman 필터는 현재 많은 영역 분야에서 중요한 도구로서

* 한국해양대학교 응용수학과 부교수
** 동국대학교 통계학과

인식 되며 제어공학 뿐 아니라 시계열 분석에서도 유용한 도구로서 이용 되고 있다.

모든 자연 현상이나 사회 현상은 일정해 보이는 것이 거의 없다. 거의 모든 계(system)들은 어느 정도 동적(dynamic)인 요소를 갖고 있다. 우리가 시간에 따라 그 계 들의 특성들을 면밀하게 추정하기 원한다면 그 동적성을 고려 해야 한다. 그러나 그 계의 동적성을 우리는 잘 알지 못하며 우리가 할 수 있는 것은 우리의 무지를 확률을 이용해서 좀더 면밀하게 표현 하는것 이다. 계의 행동을 결정하는 변수를 상태 변수라 하며 Kalman 필터는 어떤 임의적 행동 형태의 동적 시스템의 상태를 추정 하는데 이용 될수 있을 뿐 아니라 예측, 잡음 필터링, 체계의 최적 제어 등에 이용 된다. 또한 많은 동적 시스템들이 선형적인 것은 아니며 비선형인 경우가 많다. 이때 Kalman 필터링은 더이상 비선형 계의 상태 추정 문제에 대해 최적 추정치가 아니다. 그러나 비선형 문제에 대해 근사해로써 Kalman 필터링을 이용 할수 있다. 본 논문에서는 비선형 동적 계 에서의 상태 추정 문제에 있어서 Kalman 필터의 확장으로 확장(extended) Kalman 필터, 반복(iteration) 필터등을 논의 한다.

Kalman 필터 반복법을 통해 상태 추정 문제에서 자주 발생하는 문제는 추정 오차의 발산 현상이다. 즉, 공분산 행렬이 이상(異常)적으로 작으면 필터 이득(gain)이 작아 지고 결과적으로 측정치로 부터의 정보가 무시되어 상태의 추정치가 모형 오차에 기인 해서 발산 하게 된다. 여기에서는 발산 문제에 대해 잡음의 모형 오차를 다루고 잡음 분산을 적응적(adaptive)으로 추정하는 방법을 논의한다. 필터 수행성을 판단 하는데는 잔차들이 이용된다. 잔차들이 충분히 작으면 그 필터는 만족할만 하게 수행된다 볼수 있다. 그러나 적응적 필터는 잔차들은 분석 하기 보다는 시스템 잡음 입력 수준의 견지에서 잔차들로 부터의 피이드 백을 제공한다. 이는 오차 공분산 행렬의 추정에(degrade) 영향을 주어 필터 이득을 증가 시키며 다음 시점의 관측치를 유용한 정보로 이용 하게 된다. 이는 잔차들이 그 통계량과 일치성을 갖는다는 개념을 도입하는 것이며 이로 부터 시스템의 상태 잡음 공분산 행렬의 추정을 생성해 내는 알고리즘을 산출한다. 이러한 적응적 개념을 통해 비선형 상태 추정을 해결하기 위해 확장 Kalman 필터와 반복 필터에 대한 적용을 논의 하기로 한다.

2. 비선형 상태 공간 모형(nonlinear state space model)

시스템의 상태 공간 방법론은 현재 제어 이론의 기본적 개념이다. 그러나 제어 이론 뿐만 아니라 시계열 자료의 표현 그외 여러 분야에 걸쳐 많이 사용되고 있는 방법이다.

시스템의 상태는 미래 행동이 현재 상태의 지식과 미래의 입력에 의해 완전히 기술 될 수 있는 현재와 과거로 부터의 최소 정보 집합이다. 따라서 상태 공간 표현은 현 상태가 주어 졌을때 체계의 미래는 과거와 독립적이라는 마아코프 성질에 근거한다. 결과적으로 시스템의 상태공간 표현은 마아코프 표현 이라고도 불린다. y_{1t} 와 y_{2t} 가 입력 x_{1t}, x_{2t} 에 대한 출력이라 하면 임의의 상수 a, b 에 대한 입력의 선형 조합 $ax_{1t}+bx_{2t}$ 은 같은 출력들의 선형조합 $ay_{1t}+by_{2t}$ 를 산출 할때 시스템은 선형이라 한다. 또한 체계의 특성이 시간에 따라 변화하지 않으면 즉, 입력 x_t 가 출력 y_t 를 생성할때 입력 x_{t-t_0} 은 출력 y_{t-t_0} 을 생성 한다면 그 계는 시간 불변(time-invariant) 이라 한다. 이때 선형 시간 불변 체계에 대한 상태 공간 표현은 일반적으로 상태 혹은 시스템 방정식과 관측 방정식의 두 방정식 계로 이루어지며 다음과 같다

$$x_{t+1}=Ax_t+Bw_t\ ,\ y_t=Hx_t+v_t\ . \tag{2.1}$$

또한 시간 변동을 포함한 선형 상태 공간 모형은

$$x_{t+1}=A_{t+1}x_t+B_tw_t\ ,\ y_t=H_tx_t+v_t \quad \text{으로 표현되나 유일한 것은 아니다.} \tag{2.2}$$

단, x_t 은 n-벡터 상태 이며, A 는 $n\times n$ 상태 추이 행렬, B 는 $n\times r$ 행렬, y_t 는 $m\times 1$ 벡터 관측치, H는 $m\times n$ 관측 추이 행렬, $\{w_t\}$ 은 $E(w_t)=0$, $E\{w_tw_u^T\}=Q\delta_{tu}$ 의 r-벡터 백색 가우지안 과정, $\{v_t\}$ 는 $E(v_t)=0$, $E\{v_tv_u^T\}=R_t\delta_{tu}$ 의 $m\times 1$ 벡터 백색 가우지안 과정이며 $\{w_t\}$ 와 $\{v_t\}$ 은 무상관이라 가정 한다. 이 모형에 대한 잘 알려진 Kalman 필터 반복법〔4〕은 다음과 같다.

$$\hat{x}_{t+}=\hat{x}_{t-}+P_{t-}H_t^T(H_tP_{t-}H_t^T+R_t)^{-1}(y_t-H_t\hat{x}_{k-}),$$

$$P_{t+}=P_{k-}-P_{k-}H_t^T(H_tP_{t-}H_t^T+R_t)^{-1}H_tP_{t-}$$

$$\hat{x}_{(t+1)-}=A_{t+1}\hat{x}_{t+}$$

$$P_{(t+1)-}=A_{t+1}P_{t+}A_{t+1}^T+B_tQB_t^T \tag{2.3}$$

이때 -(+) 기호는 관측의 이전(이후)의 시점을 가르키며 이 추정치들은 최소 평균 자승 오차(minimum mean squar error, MMSE) 추정치 들이다.

$Y_t = \{\cdots, y_{t-1}, y_t\}$ 이라 할때,

$$\hat{x}_{t-} = E\{x_t | Y_{t-1}\} = \hat{x}_{t|t-1}, \quad \hat{x}_{t+} = E\{x_t | Y_t\} = \hat{x}_{t|t},$$

$$P_{t-} = E\{(x_t - \hat{x}_{t-})(x_t - \hat{x}_{t-})^T | Y_{t-1}\} = P_{t|t-1},$$

$$P_{t+} = E\{(x_t - \hat{x}_{t+})(x_t - \hat{x}_{t+})^T | Y_t\} = P_{t|t} \quad \text{이다.} \tag{2.4}$$

위 Kalman 반복법은 제어공학 분야에서 선형 상태 공간 모형에서의 상태 추정에 많이 사용 되었으나 사회, 경제, 통계 분야에서도 그 응용은 확산되고 있다. 시계열 자료의 분석 에서도 상태 공간 모형으로 모형화 한 후 모수 추정과 우도 함수 계산등에 많이 사용되는 중요한 도구이다. 이때의 모형은 그러나 상태 방정식과 관측 방정식의 관계가 선형인 경우의 MMSE 추정치 이며 상태, 관측 방정식의 잡음 분포가 가우지안이고 상태와 관측 방정식이 선형 관계에 있는 동적 선형 모형에 있어서 Kalman 필터는 최적 필터이다. 그러나 많은 사회적 현상이나 물리적 계 들은 상태에 관해 선형 함수 형태가 아닐수 있다. 실제적으로 추정 문제들은 비선형 계에 대한 경우가 많다. 즉, 관측 방정식이나 시스템 상태에 관한 상태의 동적성의 함수 종속성들은 비선형인 경우가 많다. 비선형 상태 공간 모형은 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$x_t = a(x_{t-1}) + Bw_t$$

$$y_t = h(x_t) + v_t \tag{2.5}$$

$a(x_{t-1})$ 은 상태의 전개(evolution)에 대한 진정한 물리적 모형을 나타내며 w_t 는 모형 오차를 설명한다. 마찬가지로 $h(x_t)$는 상태 변수로 부터 잡음이 없는 이상적 관측으로의 변환을 나타낸다. 이러한 경우 MMSE 추정치는 구하기 용이 하지 않다. 다음절에서 부터 (2.5)의 상태 공간 모형에 대한 근사해를 구하는 문제을 논의 하기로 한다.

3. 확장(extended) Kalman 필터

상태 방정식이나 관측 방정식이 비선형 차분 혹은 미분 방정식에 의해 표현되는 계에 대한 n-차원 상태 x_t 를 추정하는 문제는 그 해를 구하기가 매우 어렵거나 명시적 형태로 해를 구하기 어렵다 그리고 계산적(computing) 문제에서도 많은 어려움이 따른다. 따라서 이들 어려움으로 인해 최적해 대신 근사해를 구하는 연구가 이루어 지는 것은 당연한 것이다. 선형 동적 모형의 추정 방법을 비선형 상태 공간 모형에 이용함으로써 근사 추정치를 구할수 있다. 다음 비선형 상태 공간 모형을 고려하자.

$$\begin{aligned} x_t &= a(x_{t-1}) + Bw_t \\ y_t &= h(x_t) + v_t \end{aligned} \tag{3.1}$$

이때 x_t : n 벡터, $a(\cdot)$: n 차원 함수, B: $n \times r$ 행렬, w_t: 백색 잡음 r 벡터,

y_t : m 벡터, $h(\cdot)$: m 차원 함수, v_t : 백색 잡음 m 벡터

이제 근사해를 구하기 위해 $a(x_{t-1})$를 x_{t-1} 의 추정치 x^*_{t-1} 에 관해서 선형화(linearize)하고 함수 $h(x_t)$를 x_t의 추정치 x^*_t 에 관해 선형화를 한다. 이에 각 함수를 일차 Taylor 전개 하면,

$$a(x_{t-1}) \simeq a(x^*_{t-1}) + \left.\frac{\partial a}{\partial x_{t-1}}\right|_{x_{t-1}=x^*_{t-1}} (x_{t-1} - x^*_{t-1}) \tag{3.2}$$

$$h(x_t) \simeq h(x^*_t) + \left.\frac{\partial h}{\partial x_t}\right|_{x_t=x^*_t} (x_t - x^*_t) \tag{3.3}$$

이때 Jacobian들을 각각 다음과 같이 정의 하자.

$$A_{t-1} = \left.\frac{\partial a}{\partial x_{t-1}}\right|_{x_{t-1}=x^*_{t-1}}, \qquad H_t = \left.\frac{\partial h}{\partial x_t}\right|_{x_t=x^*_t} \tag{3.4}$$

따라서 선형화된 상태와 관측 방정식은 각각 다음과 같다.

$$x_t \simeq A_{t-1}x_{t-1} + Bw_t + (a(x^*_{t-1}) - A_{t-1}x^*_{t-1})$$

$$y_t \simeq H_t x_t + v_t + (h(x^*_t) - H_t x^*_t) \qquad (3.5)$$

이 새로운 상태 공간 모형에 대한 선형 Kalman 필터를 확장 Kalman 필터라 한다. (3.5)는 결국 선형 상태공간 모형에 기지의 결정적 요소를 부가한 것이 된다. 이때, $u_t = a(x^*_{t-1}) - A_{t-1}x^*_{t-1}$, $z_t = h(x^*_t) - H_t x^*_t$ 라 하면, 선형화 상태 방정식은,

$x_t \simeq A_{t-1}x_{t-1} + Bw_t + u_t$ 이며 $E(x_{-1}) = 0$ 이라 가정하자. 그러면 $u_t = 0$ 이면 $E(x_t) = 0$ 이다. 따라서 결정적 요소의 효과는 $x_t = x'_t + E(x_t)$ 의 상태 벡터를 생성한다. 단, x'_t 는 $u_t = 0$ 일때 x_t 의 값이다. 그러므로 평균이 영인 상태 벡터 $x'_t = x_t - E(x_t)$ 에 대한 상태 방정식은,

$x'_t = Ax'_{t-1} + Bw_t$ 와 같이 표현 할수 있다. 그리고 $E(x_t) = AE(x_{t-1}) + u_t$ 이며,

$$E(x'_t | Y_{t-1}) = \hat{x}'_{t|t-1} = E(x_t | Y_{t-1}) - E(x_t) = \hat{x}_{t|t-1} - E(x_t)$$

$$E(x'_{t-1} | Y_{t-1}) = \hat{x}'_{t-1|t-1} = E(x_{t-1} | Y_{t-1}) - E(x_{t-1}) = \hat{x}_{t-1|t-1} - E(x_{t-1}) \qquad (3.6)$$

이들 관계식과 기지의 상수를 부가 함으로써 MMSE는 변동이 없다는 사실로 부터 Kalman 이득과 평균 자승 오차 행렬은 선형 모형에서와 변동이 없다. 따라서 확장 Kalman 필터의 반복식은 위의 관계와 $x^*_{t-1} = \hat{x}_{t-1|t-1}$, $x^*_t = \hat{x}_{t|t-1}$라 취하고 (3.5)에 Kalman 반복을 적용 하면 다음과 같다.

$$\hat{x}_{t-} = a(\hat{x}_{t-1+}),$$

$$P_{t-} = A_{t-1}P_{t-1+}A^T_{t-1} + BQB^T,$$

$$K_t = P_{t-1-}H^T_t(R_t + H_t P_{t-1-}H^T_t)^{-1},$$

$$\hat{x}_{t+} = \hat{x}_{t-} + K_t(x_t - h(\hat{x}_{t-})),$$

$$P_{t+} = P_{t-} - K_t H_t P_{t-}, \qquad (3.6)$$

단,

$$A_{t-1}=\left.\frac{\partial a}{\partial x_{t-1}}\right|_{x_{t-1}=\hat{x}_{t-1}}, \quad H_t=\left.\frac{\partial h}{\partial x_t}\right|_{x_t=\hat{x}_t}$$

4. 반복 필터(iteration filter)

확장 Kalman 필터는 식(3.2)를 명목궤도(nominal trajectory) $x^*_{t-1}=\hat{x}_{t-1+}$, $x^*_t=\hat{x}_{t-}$ 에 관해 선형화 한 것 이었다. 만일 명목 궤도와 추정된 상태가 진정한 궤도와 가까운 값이 아니면 절사된 전개식 (3.5)는 나쁜 결과의 근사값을 나타낼 것이며 결과적으로 계산에 이용된 가우지안 가정은 별로 좋지 못한 근사값이 될 것이다. 따라서 반복필터 방법은 식 (3.2)를 $x^*_{t-1}=\hat{x}_{t-1+}$, $x^*_t=\hat{x}_{t-}$ 을 이용해서 선형화 하고 시점 t 와 t-1 에 대한 추정치를 구하고 이를 $\hat{x}_{t+}{}^{(2)}$, $\hat{x}_{t-1|t}{}^{(2)}$ 라 하자. 이는 확장 Kalman 반복과 같은 방법이다. 이때 $\hat{x}_{t+}{}^{(2)}$ 와 $\hat{x}_{t-1|t}{}^{(2)}$ 는 $\hat{x}_{t-1+}$, $\hat{x}_{t-}$ 보다 진정한 상태에 더욱 근접한 값이 된다. 따라서 $\hat{x}_{t+}{}^{(2)}$, $\hat{x}_{t-1|t}{}^{(2)}$ 를 이용해서 식 (3.2)를 다시 선형화하면 절사 오차를 줄일 수 있으며 새로운 추정치 $\hat{x}_{t+}{}^{(3)}$, $\hat{x}_{t-1|t}{}^{(3)}$ 가 식(3.6)으로 부터 얻어진다. 이러한 반복식은 $i=1,2,\cdots$ 에 대해 다음과 같이 얻어 진다.

$$\hat{x}_{t+}{}^{(i+1)}=\hat{x}_{t-}{}^{(i)}+P^{(i)}{}_{t+}H_t^T(\hat{x}_{t+}{}^{(i)})R_t^{-1}[y_t-h_t(\hat{x}_{t+}{}^{(i)})$$
$$-H_t(\hat{x}_{t+}{}^{(i)})(\hat{x}_{t-}{}^{(i)}-\hat{x}_{t+}{}^{(i)})]$$

$$\hat{x}_{t-1|t}{}^{(i+1)}=\hat{x}_{t-1+}+P_{t-1+}A_{t-1}^T(\hat{x}_{t-1|t}{}^{(i)})$$
$$\times P^{-1}{}_{t-}{}^{(i)}(\hat{x}_{t+}{}^{(i)}-\hat{x}_{t-}{}^{(i)})$$

$$P^{(i)}{}_{t-}=A_{t-1}(\hat{x}_{t-1|t}{}^{(i)})P_{t-1+}A_{t-1}^T(\hat{x}_{t-1|t}{}^{(i)})+BQB^T$$

$$P_{t+}^{(i)}=$$

$$\hat{x}_{t-}{}^{(i)}=a(\hat{x}_{t-1|t}{}^{(i)})+A_{t-1}(\hat{x}_{t-1|t}{}^{(i)})(\hat{x}_{t-1+}-\hat{x}_{t-1|t}{}^{(i)}) \quad (3.7)$$

이때 초기 조건으로 $\hat{x}_{t-1|t}^{(1)} = \hat{x}_{t-1+}$, $\hat{x}_{t+}^{(1)} = \hat{x}_{t-}$ 이며 $\hat{x}_{t+}^{(i)}$, $\hat{x}_{t-1|t}^{(i)}$ 와 $P_{t+}^{(i)}$ 의 수렴 값들이 $\hat{x}_{t+}$, $\hat{x}_{t-1|t}$, 와 공분산 행렬 P_{t+} 의 추정치로 취해진다.

5. 적응적 필터(adaptive filter)

상태 공간 모형에서 Kalman 반복법을 사용해서 상태를 추정할때 자주 발생하는 문제는 발산(divergence) 문제 이다. 이는 잔차들의 크기가 커지는 것을 말하며 상태 추정치가 발산 하는 것이다. 이 문제는 주로 필터에서 사용된 동적성을 모형화 하는데 불충분한 정확성에 기인 하는 것이다. 정확한 모형이 분명한 해결 방법이나 그것은 주로 비 실제적이고 때로는 불가능한 경우가 많다. 여기서는 발산 문제의 해결 방법으로 잡음에 의해 모형 오차를 근사화 해서 처리 하고 그 잡음 공분산 행렬(Q)는 잔차들과 그 통계량간의 일치성을 갖도록 결정하는, 적응적으로 추정하는 방법을 논의하기로 한다. 필터 수행성(performance)을 판단하기 위해 우리는 잔차들이 충분히 작으며 그 예측 통계량들과 일치하면 필터는 만족할만 하게 운용되었다고 한다. 적응적 필터는 필터 수행성을 결정 하기 위해 잔차 분석을 한다기 보다는 시스템 잡음의 견지에서 잔차들로 부터의 피이드 백을 제공 하며 이는 추정 오차 공분산 행렬을 퇴화(degrade)하고 필터 이득을 증가 시키며 결과적으로 다음 시점의 자료로 부터 유용한 정보를 얻도록 한다.

적응적 필터 방법은 잔차들이 그 통계량과 일치싱을 갖는다는 조건을 부여 하는 것인데 이는 시스템 잡음 공분산 행렬 Q 의 추정치를 계산하게 하는 알고리즘을 산출 한다.

일단계 예측 잔차를 다음과 같이 정의 하자.

$$r_{t+1} = y_{t+1} - E[y_{t+1}|Y_t], t = 0, 1, \cdots \tag{3.8}$$

이 잔차는 평균이 영 이고 Gaussian 분포를 따른다. (3.5)로 부터,

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= y_{t+1} - E[y_{t+1}|Y_t] \\ &= H_{t+1}A_t(x_t - \hat{x}_{t|t}) + H_{t+1}Bw_{t+1} + v_{t+1}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$r_{t+1}r'_{t+1} = (H_{t+1}A_t(x_t - \hat{x}_{t|t}) + H_{t+1}Bw_{t+1} + v_{t+1})$$

$$\times(H_{t+1}A_t(x_t - \hat{x}_{t|t}) + H_{t+1}Bw_{t+1} + v_{t+1})' \qquad (3.10)$$

시점 t 에서 $\hat{x}_{t+}$ 와 P_{t+} 가 계산 될 수 있으며 $P_{t+1|t}$ 가 반복법에 의해 계산 될 것이다. Q를 결정하기 위해 다음과 같이 조건을 부여 하자.

$$r^2_{t+1} = E[r^2_{t+1}] \qquad (3.11)$$

이는 잔차와 그 통계량간의 일치성에 대한 조건을 부여 하는 것 이다. 잡음이 무상관의 동일 분포(uncorrelated and identically distributed)를 따른다고 가정 하자.

$Q = qI$ 라 하자. I 는 항등행렬 이다. 그러면,

$$E[r_{t+1}r'_{t+1}] = H_{t+1}A_tP_{t|t}A_t'H_{t+1}' + qH_{t+1}BB'H_{t+1}' + R_{t+1} \qquad (3.12)$$

$$r_{t+1}r_{t+1}' - E[r_{t+1}r_{t+1}'|q\equiv 0] = qH_{t+1}BB'H_{t+1}' \qquad (3.13)$$

이때 $E(r^2_{t+1}|q\equiv=0) = H_{t+1}A_tP_{t|t}A_t'H_{t+1}' + R_{t+1}$ 이며, 잡음이 없는 가정하의 잔차 자승의 기대값이다. 이때 $r^2_{t+1} < (r^2_{t+1}|q\equiv 0)$ 이면 잡음 입력이 필요치 않다는 것이 된다.

따라서,

$$\hat{q}_t = \begin{cases} [r^2_{t+1} - E(r^2_{t+1}|q\equiv 0)][H_{t+1}BB'H_{t+1}]^{-1} & , \; r^2_{t+1} - E(r^2_{t+1}|q\equiv 0) > 0 \\ 0 & , \; o.w. \end{cases}$$

이때의 $\hat{q}_t$ 은 잡음이 없을때의 잔차 자승의 기대치에 대한 잔차 자승의 초과분(excess)이다.

$\hat{q}_tI$ 를 Q 와 대체한 필터는 다음과 같은 이유에서 적응적이다. 즉, 잔차들이 그 1σ 범위 내에 있다면 잡음 입력은 영 이며 잔차들이 1σ 값 보다 상대적으로 크게 되면 필터는 발산 하고 필터 오차 공분산 행렬, $P_{t+1|t}$ 가 증가 한다. 필터 이득은 따라서 증가 하며 새로운 관측치로 부터의 정보는 유용한 것이 될 것이다

6. 예 제

확장 Kalman 필터와 반복 필터에 대한 발산 문제를 고려한 적응적 필터를 적용하여 비교 하기 위해 다음의 단순한 가정하의 이동하는 차량의 위치와 속도를 추적 하는 예제를 고려 하자.

관측치는 잡음이 존재하며 거리와 방위각으로 구성되며 차량의 동적성을 모형화 하는데 속도는 일정 하고 풍향과 속도 수정등에 의해 간섭이 있다 가정하자. 시점 t 에서의 x 와 y 방향의 속도 구성요소는,

$$v_{x,t}=v_{x,t-1}+u_{x,t} \qquad v_{y,t}=v_{y,t-1}+u_{y,t}$$

운동 방정식으로 부터 시점 t 에서의 위치는,

$$r_{x,t}=r_{x,t-1}+v_{x,t-1}l \qquad r_{y,t}=r_{y,t-1}+v_{y,t-1}l$$

이때의 l 은 표본간의 시간 구간이다. 실제 연속 운동에 대한 근사 모형으로 운동 방정식의 이산화 모형에서 차량은 이전 시점의 속도로 이동 하고 다음 시점에서 갑자기 변화 하는것으로 모형화 되었다.
상태 벡터를 위치와 속도 원소로 구성된 행렬 형태로 표현 하면,

$x_t=(r_{x,t} \;\; r_{y,t} \;\; v_{x,t} \;\; v_{y,t})'$ 이며 상태 방정식은,

$$x_t=\begin{bmatrix}1 & 0 & l & 0\\ 0 & 1 & 0 & l\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x_{t-1}+w_t \tag{e. 1}$$

, 단 $w_t=(0 \;\; 0 \;\; u_{x,t} \;\; u_{y,t})'$이다. 거리와 방위각으로 구성된 관측방정식은, 그 거리는,

$R_t=\sqrt{r^2_{x,t}+r^2_{y,t}}$, 방위각, $\beta_t=\arctan\dfrac{r_{y,t}}{r_{x,t}}$ 이며 잡음이 존재 할때,

$R'_t=R_t+v_{R,t}$, $\beta'_t=\beta_t+v_{\beta,t}$ 와 같이 표현 할수 있다. 이는 다시 일반적으로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$y_t=h(x_t)+v_t. \tag{e. 2}$$

단, $h(x_t)=\begin{bmatrix}\sqrt{r_{x,t}^2+r_{y,t}^2}\\ \arctan\frac{r_{y,t}}{r_{x,t}}\end{bmatrix}$. 이때의 상태 공간 모형은 상태 방정식은 선형이며 관측 방정식은 비선형인 비선형 상태 공간 모형이다. 이 모형의 Jacobian은,

$$H_t=\frac{\partial h}{\partial x_t}\bigg|_{x_t=\widehat{x}_{t|t-1}},\quad \frac{\partial h}{\partial x_t}=\begin{bmatrix}\frac{r_{x,t}}{R_t} & \frac{r_{y,t}}{R_t} & 0 & 0\\ -\frac{r_{y,t}}{R_t^2} & \frac{r_{x,t}}{R_t^2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

이다. 예제를 쉽게 하기 위해서 풍향, 속도 조정등은 임의 방향의 같은 크기로 발생 한다고 가정 하자. 그러면 $u_{x,t}$, $u_{y,t}$의 분산이 같고(σ_u^2) 서로 독립이라 가정 하는것은 타당하다. 이 가정 하에서 상태 잡음 공분산 행렬은,

$$Q=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\sigma_u^2&0\\0&0&0&\sigma_u^2\end{bmatrix}$$

이며, 관측 잡음 공분산 행렬은 $R=\begin{bmatrix}\sigma_R^2 & 0\\ 0 & \sigma_\beta^2\end{bmatrix}$ 이다.

그 위치 좌표는,

$r_{x,t}=10-0.1t$, $r_{y,t}=-5+0.2t$, $t=0,1,\cdots,100$ 이며 상태 잡음 분산 $\sigma_u^2=0.0001$ 이라 하자. 그리고 시간 구간 $l=1$, $v_x=-0.2$, $v_y=0.2$, 초기 상태 벡터는,

$$S(-1)=\begin{bmatrix}10\\-5\\-0.2\\0.2\end{bmatrix}$$

이며 이는 직선 궤적의 초기 상태의 값이다.

이때 (e.1) 와 (e.2) 의 방정식으로 구성된 비선형 상태 공간 모형에 대한 확장 Kalman 필터 반복 알고리즘은 다음과 같이 된다.

$$\hat{x}_{t-}=A\ \hat{x}_{t-1+}$$

$$P_{t-}=AP_{t-1+}A'+R$$

$$K_t=P_{t-}H'_t(R+H_tP_{t-}H'_t)^{-1}$$

$$\hat{x}_{t+} = \hat{x}_{t-} + K_t(y_t - h(\hat{x}_{t-}))$$

$$P_{t+} = (I - K_t H_t) P_{t-}$$

단, A 는 상태 추이 행렬 이며, $H_t = \left.\frac{\partial h}{\partial x_t}\right|_{x_t = \hat{x}_{t|t-1}}$ 이다. (e. 3)

그리고 이 예제의 비선형 상태 공간 모형에 수렴성을 향상 하기 위해 반복 필터를 적용하면 다음과 같은 알고리즘이 된다. 즉,

$$\hat{x}_{t-} = A\hat{x}_{t-1+}$$

$$P_{t-} = AP_{t-1+}A' + R$$

$$K_t = P_{t-}H'(\hat{x}_{t+}^{(i)})(R + H(\hat{x}_{t+}^{(i)})P_{t-}H'(\hat{x}_{t+}^{(i)}))^{-1}$$

$$\hat{x}_{t+}^{(i+1)} = \hat{x}_{t-} + K_t[y_t - h(\hat{x}_{t+}^{(i)} - H(\hat{x}_{t+}^{(i)})(\hat{x}_{t-} \quad \hat{x}_{t+}^{(i)})]$$

$$P_{t+} = (I - K_t H(\hat{x}_{t+}^{(i)}))P_{t-} \qquad \text{(e. 4)}$$

단, 초기값 $\hat{x}_{t+}^{(1)} = \hat{x}_{t-}$, $i = 1, 2, \cdots$ 이다

위 알고리즘에 대해서 Kalman 추정치의 발산문제를 해결 하기위해 적응적 필터링을 이용하려면 (3. 13) 의 $\hat{q}_t$ 를 계산하고 (e. 3), (e. 4) 의 R 과 대체 하면 된다.

7. 결 론

본 논문에서는 비선형 상태공간 모형에서의 추정 문제에서 선형 Kalman 필터의 확장으로의 확장 Kalman 필터의 알고리즘을 검토 했으며, 상태 추이 함수와 관측 방정식의 변환의 비선형성을 선형화함에 따라서 수반되는 절사 오차를 줄이기 위해서 반복 필터링 알고리즘을 논의 하였고 예제에서는 상태 방정식은 선형이고 관측 방정식이 비선형인 경우에 적용해 보았다. 반복 횟수는 상태 추정치와 상태 공분산 행렬이 수렴되는 횟수가 될 것이다. 또한 상태 공간 모형에서 자주 발새하는 문제로서, 그 초기값은 주로 알려져 있지 않으므로 초기값의 부 정확성과 모형의 오차로 인해 수렴하지 않고 발산 하는 경우가 발생한다. 이에 관측치에 대한 잔차로부터 잡음 입력을 결정하는 적응적 필터링을 확장

Kalman 필터에 적용함으로써 이를 보안 하는 문제에 대해 논의 하였다. 본 논문에서는 상태 잡음이 무상관이며 동일 분포일 때 만을 고려했으나 종속적일 때의 경우와 적응적 필터링에서 사용되는 최적의 잔차 수 등의 연구가 앞으로 남아 있다.

참 고 문 헌

〔1〕 C. F. Ansley, R. Kohn (1985). Estimation, Filtering, and Smoothing in state space models with incompletely specified initial conditions. The Ann. of Stat., vol 13, no 4, 1286-1316.

〔2〕 Box, G. E. P. & Phillips, G. D. A. (1979). Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco.

〔3〕 R. E. Kalman & R. S. Bucy (1961). A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. ASME, J Basic Eng. 82, 35-44.

〔4〕 A. H. Jazwinski (1969). Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press, New York.

〔5〕 D. G. Lainiotis (1968). A non-linear adaptive estimation recursive algorithm. IEEE Trans. Aut. Control AC-13, 197-198

〔6〕 M. Athans, R. P. Wishner, A. Bertolini (1968). Suboptimal state estimation for continuous time non-linear system from discrete noisy measurements. IEEE Trans. Aut. Control AC-13, 504-514.

〔7〕 H. W. Sorenson & A. R. Stubberud (1968). Nonlinear filtering by approximation of the a posteriori density. Int. J. Control 18, 33-51.