不規則海洋波에 對한 橫搖應答 및 極大値의 確率分布에 關한 研究

孫 景 浩

A Study on the Ship Roll Response and its Probability Distribution of Maxima in an Irregular Sea Wave

Son Kyoung-Ho

〈目 次〉

ABSTRACT

Many studies of ship motions in a regular sea wave had been investigated theoretically and experimentally, and examined closely since W. Froude at mid-19th century. But the real surface of the sea is extremely irregular, so that wave length, period and others are not uniform but obscure.

Thus in 1953 St. Denis and Pierson adopted Probability Theory and Fourier Transformation Theory of random process on the study of sea waves, which opened a new age of studying ship motions theory.

In this paper the author regarded sea wave as long crested irregular signal namely, normal distributional random variable and took 1400 samples of amplitudes.

The author investigated the following two points out of numerical analysis.

1) method of estimating the ship roll responses at a given sea state, using spectral analysis

2) probability distribution of maxima(peaks) of ship rolls which have directly an influence

on the ship's stability

For 1), the author showed that the roll spectrum could be evaluated by multiplying the sea wave spectrum by response amplitude operator (RAO) calculated by frequency response characteristics.

The theory and computation method developed in this case makes an efficient use for estimating the roll responses at a given sea state.

For 2), the author showed that the probability density function of maxima (peaks) of ship rolls could be calculated by spectral bandwidth parameter ε and the distribution of maxima followed almost Rayleigh distribution as $\varepsilon = 0.103$.

1. 緖 論

海洋을 航行하는 船舶은 風·波浪 때문에 생기는 船體運動에 基因하여 一般的으로 抵抗이 增加한다. 따라서 一定한 機關馬力으로서는 必然的으로 船速이 低減되지 않을 수 없게 된다.

더우기 海狀이 激甚하면 海水侵入, Slamming 衝擊 또는 큰 加速度 等 때문에 船體나 貨物이 損傷을 입게 되고 심지어는 復原力喪失로 因하여 전복·침몰에 이르는 일도 있다.

이와같은 事態가 豫測되면 乘務員의 安全을 圖謀하고 船體損傷의 危險을 回避하기 爲하여 故意로 進路를 變更하거나 機關出力을 減少하게 된다. 耐航性(Seakeeping or Seaworthiness)의 硏究는, 端的으로 말하면 風·波浪中에서의 船體運動에 基因하는 諸現象을 力學的으로 解明하고 주어진 海狀에서의 安全限界를 把握함과 同時에 最終目標로서 나쁜 海上狀態에서도 速度를 維持할 수 있는 優秀한 性能을 갖는 船型을 開發하는 데 意義가 있다고 할 수 있다.

耐航性의 올바른 推定을 爲해서는 船體運動論이 基礎가 된다. 環境條件으로서는 風·潮流·波浪 等이 있는데, 波浪中 特히 規則波中에서의 船體運動에 關해서는 19世紀 中葉 W. Froude 以來 A. N. Krilov, N. E. Joukowsky, M. D. Haskind 等 많은 學者들에 依해서 理論과 實驗으로 詳細히 糾明되어 왔으나 運動方程式의 强制項으로서 有義波的 平均値만이 導入될 수 밖에 없었다.

그러나 實際의 海面은 波長이 대단히 긴 Swell 等의 경우를 除外하면 極히 不規則하기 때문에 波長, 週期等도 一律的이지 않고 不明確하다. 따라서 應答의 周波數特性, 즉 여러 波長의 波에 對한 應答을 알고 있다 하더라도 그것만으로서는 實際의 海洋波에 對한 應答을 豫測할 수 없었다.

그러나 2차대전후 通信工學에서 發達한 理論과 統計學을 海洋波의 硏究에 應用함으로써 船體에 作用하는 流體力의 推定 및 海面의 統計的記述이 實際와 아주 가깝게 表現될 수 있었으며 運動性能도 어느정도 確實性을 가지고 論할 수 있었다.

그리하여 1953年 St. Denis와 Pierson[1]을 基點으로 하여 確率論과 確率過程의 Fourier 變換의 理論을 導入함으로써 現代的 船體運動論의 새로운 轉機를 이루게 되었다. 그후 Yamanouchi[2]는 確率過程의 解析에 있어서 Spectrum 뿐만 아니라 相關函數의 圖表(Correlogram)의 有用性도 提唱하였다.

그러나 船體運動論은 完成停止된 學問이 아니며 지금까지 糾明된 理論과 實驗에도 "信賴度" 等의 相當한 問題點을 內包하고 있고 最近 海難事故가 急增하여 船의 安定性의 見地로 부터 看過할 수 없는 새로운 問題가 惹起되고 있어 앞으로의 硏究課題가 많이 남아 있다고 말 할 수

있다.

本論에서는 自然現象의 一種인 海洋波를 波頂이 긴 不規則信號(Long crested irregular signal), 즉 正規分布(Normal distribution)를 하는 確率論的變數로 看做하고, 有限個數의 振幅標本으로부터 數值的 相關調整을 通해 주어진 海狀에서의 橫搖應答(Roll Responses)에 對한 스펙트럼(Spectrum)을 推定하는 方法과 安定性에 直接 影響을 미치는 橫搖의 極大値의 分布에 對해서 檢討한다.

2. 正規性定常不規則過程

2·1 定常不規則過程(Stationary random process)[3]

確率過程(Random process or Stochastic process)은 確率變數(Random variable)의 時系列的 集合($\{X(t);t\epsilon T\}$, 但 $X(t)$; 확률변수, T : 관측시간)으로서 크기가 不規則하게 變動하는 同時에 그 不規則變動에 注目한 時間에도 關係가 있다.

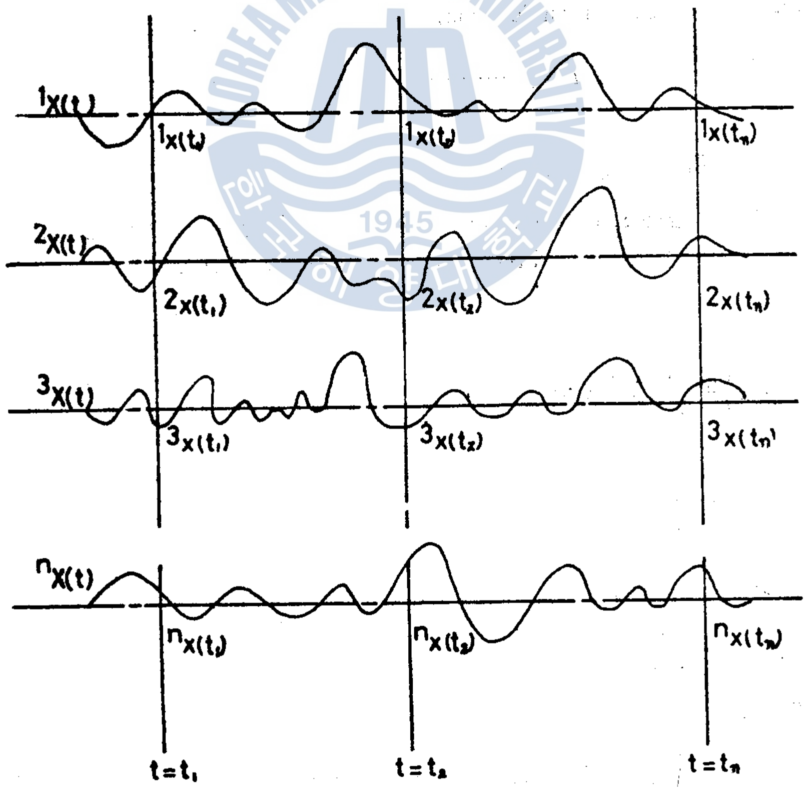


Fig. 2-1 Ensemble of random process X(t)

그러나 本論에서 取扱하는 海洋波 및 船體運動은 다음의 2가지 假說을 導入함으로써 斷片的인 記錄만을 分析하여도 全體를 代表하는 모든 統計的 知識을 얻을 수가 있다.

(1) 定常性假說(Stationary hypothesis)

確率變數를 $X(t)$로 定하고 數集合 $\{X(t)\}$를 생각 하였을 때 $t=t_1$에서의 $\{X(t_1)\}$과 $t=t_2(t_2=t_1+\tau)$에서의 $\{X(t_2)\}$의 統計的性質은 變하지 않는다고 假定하면 1次元 確率密度函數 $p_1(x_1, t_1)=p_1(x)$로 되고 2次元 確率密度函數 $p_2(x_1, t_1 : x_2, t_2)=p_2(x_1, x_2 : \tau)$로 되어 單純히 時間間隔 τ에만 依存하게 된다. 이것을 定常性假說이라 하고 이를 導入하면 다음과 같은 式들이 成立한다.

i) 平均 (mean)

$$m_x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^kX(t) \quad \cdots\cdots (1\cdot1)$$

ii) 제곱평균 (mean square)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{{}^kX(t)\}^2 \quad \cdots\cdots (2\cdot2)$$

iii) 自己相關函數(auto-correlation function)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^kX(t)\,{}^kX(t+\tau) \quad \cdots\cdots (2\cdot3)$$

iv) 相互相關函數(cross-correlation function)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^kX(t)\,{}^kY(t+\tau) \quad \cdots\cdots (2\cdot4)$$

(2) Ergode 假說(Ergodic hypothesis)

Ensemble의 個個의 記錄으로부터 求한 統計的性質은 모두 같다고 假定하면 $\{X(t)\}$의 集合平均이 時間平均과 같게 된다. 이것을 Ergode 假說이라 하고 이를 導入하면 다음과 같은 式들이 成立한다.

i) 平 均

$$m_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,dt \quad \cdots\cdots (2\cdot5)$$

ii) 제곱평균

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\{X(t)\}^2dt \quad \cdots\cdots (2\cdot6)$$

iii) 自己相關函數

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\,dt \quad \cdots\cdots (2\cdot7)$$

iv) 相互相關函數

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,Y(t+\tau)\,dt \quad \cdots\cdots (2\cdot8)$$

上述한 바와 같이 確率過程에 關하여는 단 한개의 記錄만을 數學的 Model로 想定하고 이를 分析하여도 各種의 統計的 Parameter에 對한 平均的 見解를 代表할 수 있으며 이들의 가정에 따

르는 것을 定常不規則過程이라고 한다.

2·2 正規性過程(Normal random process)[4]

모든 定數 n 및 時間集合$\{t_1, t_2, \cdots\cdots, tn\}$에 對하여 確率變數 $X(t_1)$, $X(t_2)$, ……, $X(t_n)$가 다음의 (2·9)式으로 주어지는 正規性確率密度函數(Normal probability density function)로서 同時에 (Jointly) 分布한다고 假定하면 이 過程을 正規性過程이라고 한다.

$$f(X)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{n/2}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(X-m)'\Sigma^{-1}(X-m)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot 9)$$

여기에서

$X=(X(t_1),\ X(t_2)\cdots\cdots\cdots\cdots X(t_n))'$

$m=(m_1,\ m_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, m_n)'$

$m_i=E[X(t_i)]$

$|\Sigma|=$determinant of Σ

$\Sigma=$Covariance matrix of $X(t_1), X(t_2), \cdots\cdots, X(t_n)$

$$=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{ij}=\mathrm{cov}[X(t_i)\ X(t_j)] \qquad i, j=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$

그런데 우리가 取扱하는 確率過程 $X(t)$는 定常性 및 Ergode 假說을 滿足하므로

$$\left.\begin{aligned} &m_1=m_2=\cdots\cdots\cdots=m_n=m\,(\text{Constant}) \\ &\sigma_{ij}=E[X(t_i)X(t_j)]-m^2=R_{xx}(\tau)-m^2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot 10)$$

여기에서

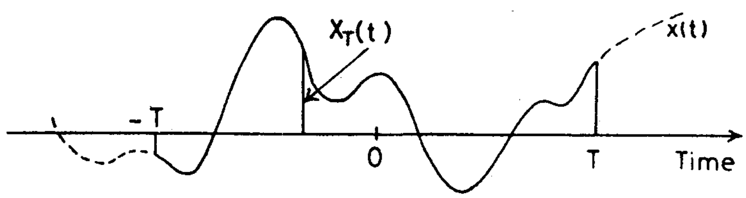
$R_{xx}(\tau)$는 $X(\tau)$의 自己相關函數

$\tau=t_j-t_i$

또 正規性過程의 重要한 性質의 하나는 正規性過程으로부터 線型演算(Linear operation)에 依해서 誘導된 確率過程도 역시 正規性을 갖는다. 즉, 本論에서 取扱하는 海洋波(入力)는 正規分布를 하며 船體運動(應答)도 역시 正規分布를 한다는 것을 알 수 있다.

3. 確率過程式의 Fourier 解析

3·1 Spectrum 解析[4,5]



Fiq3−1 Definition of $\{X_T(t): -T\leqq t\leqq T\}$

確率過程 $X(t)$를 생각하고 (3·1)式과 같이 $X_T(t)$*를 定義한다. (Fig 3·1 參照)

$$X_T(t)=\begin{cases} X(t) & : -T\leqq t\leqq T \\ o & : T<|t| \end{cases} \quad \cdots\cdots(3\cdot1)$$

式 (3·1)의 $X_T(t)$를 Fourier 變換하면

$$X_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt \cdots\cdots(3\cdot2)$$

그 逆變換은

$$X_T(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_T(\omega)e^{i\omega t}d\omega \cdots\cdots(3\cdot3)$$

$X_T(t)$의 제곱평균치(Mean sguare value)를 $\overline{P}_x$라 하면

$$\overline{P}_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\{X_T(t)\}^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\{X(t)\}^2dt \cdots\cdots(3\cdot4)$$

Parseval의 定理에 依해서

$$\overline{P}_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(\omega)|^2d\omega\right\} \cdots\cdots(3\cdot5)$$

한편 $X_T(t)$의 스펙트럼밀도 함수(Spectral density function) $Sxx(\omega)$는 다음과 같이 定義한다.

$$Sxx(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}|X_T(\omega)|^2 \cdots\cdots(3\cdot6)$$

$X_T(t)$가 실수이면 $Sxx(\omega)$는 양(+)의 값이고 원점에 대해서 대칭이므로

式 (3·5) 및 (3·6)으로 부터

$$\overline{P}_x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}Sxx(\omega)\,d\omega=\int_{0}^{\infty}Sxx(\omega)\,d\omega \cdots\cdots(3\cdot7)$$

즉 제곱평균의 값은 스펙트럼下의 面積과 같다. 그리고 $X(t)$가 定常性과 *Ergode* 性을 갖게 되므로 自己相關函數는

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau)&=E[X(t)\cdot X(t+\tau)] \\ &=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)\cdot X_T(t+\tau)dt \cdots\cdots(3\cdot8) \end{aligned}$$

式 (3·2), (3·6) 및 (3·8)로 부터

$$\begin{aligned} Sxx(\omega)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}|X_T(\omega)|^2 \\ &=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)\cdot X_T(t_1)e^{i\omega t}e^{-i\omega t_1}dt_1\cdot dt \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)\ X_T(t+\tau)dt\right\}e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}Rxx(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \cdots\cdots(3\cdot9) \end{aligned}$$

여기에서 $t_1=t+\tau$

式 (3·9)를 逆變換하여

* 註 $\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|X(t)|dt\right.$의 값이 반드시 有限確定値에 收斂한다고는 할 수 없으므로 $X(t)$의 Fourier 變換이 存在하기 爲해서 $X_T(t)$를 定義한 것임.

$$Rxx(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}Sxx(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \cdots\cdots(3\cdot10)$$

즉 스펙트럼밀도 함수는 自己相關函數의 Fourier 變換이다. (但, 式 (3·2), (3·3)의 定義와는 조금 다른 變型式임).

여기서 自己相關函數의 性質을 記述해 두기로 한다.

i) $Rxx(o)=E[X^2(t)]=\int_{o}^{\infty}Sxx(\omega)d\omega=\overline{P}_x$(평균 power) $\cdots\cdots(3\cdot11)$

만약 $E[X(t)]=0$ 이면 $Rxx(o)=E[X^2(t)]=\mathrm{Var}[X(t)]$

ii) $Rxx(-\tau)=Rxx(\tau)\cdots\cdots(3\cdot12)$

iii) $Rxx(o)\geqq Rxx(\tau)\cdots\cdots(3\cdot13)$

iV) $Rxx(\pm\infty)=0\cdots\cdots(3\cdot14)$

3·2 數值計算法

(1) Correlogram 및 Spectrum의 數値計算法[5]

$\triangle t$ 間隔으로 計測한 不規則信號 $X(t)$의 時系列을 $X_1, X_2, X_3\cdots\cdots, X_N$라 할 때 標本相關函數, 즉 $\tau=P\triangle t$ 에서의 $Rxx(\tau)$의 값은

$$(Q_x)_P=\frac{\triangle t}{(N-P)\triangle t}\sum_{i=1}^{N-P}\left[\left\{X_{i+P}-\frac{1}{N-P}\sum_{i=1}^{N-P}X_{i+P}\right\}\left\{X_i-\frac{1}{N-P}\sum_{i=1}^{N-P}X_i\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{N-P}\left[\sum_{i=1}^{N-P}X_{i+P}X_i-\frac{1}{N-P}\sum_{i=1}^{N-P}X_{i+P}\sum_{i=1}^{N-P}X_i\right]\cdots\cdots(3\cdot15)$$

N가 크고, 平均値의 變動도 작고, 移動平均을 使用할 必要가 없는 경우에는

$$(Q_x)_P=\frac{1}{N-P}\sum_{i=1}^{N-P}X_{i+P}X_i-m_x^2\cdots\cdots(3\cdot16)$$

즉 式 (3·15) 또는 式 (3·16)에 依해서 $X(t)$의 Correlogram 이 그려진다. 한편 Spectrum의 값은 相關函數의 Fourier 變換으로서 쉽게 計算되므로, ω의 어떠한 값에 對해서도 計算할 수 있지만 Spectrum window의 형태로 부터 Spectrum의 分解能은 거의 $\omega T=\frac{2\pi}{T_m}$ 이라 생각되어 지므로 一般的으로 $T_m=m\cdot\triangle t$ 라 하면 (m는 最大 Lag의 數) $\omega=0,\ \frac{2\pi}{2T_m},\ 2\frac{2\pi}{2T_m}\cdots\cdots,\ r\frac{2\pi}{2T_m}\cdots\cdots,\ m\frac{2\pi}{2T_m}$, 즉 $\frac{2\pi}{2\triangle t}=\omega_N$(Nyguist fregueny)라 놓으면 $\omega=0, \frac{1}{m}\omega_N,\ \frac{2}{m}\omega_N,\cdots\cdots,\ \frac{r}{m}\omega_N,\cdots\cdots,\ \omega_N$의 $m+1$개의 點에 대해서 計算하면 充分하고, 또 Spectrum 平滑의 計算도 簡單하게 된다. 즉 $\omega=\frac{r}{m}\omega_N=\frac{r}{m}\ \frac{\pi}{\triangle t}$ 에서의 Spectrum은

$$(Lx)_r=S_x\left(\frac{r}{m}\frac{\pi}{\triangle t}\right)=\frac{\triangle t}{2\pi}\left[(Q_x)_o+2\sum_{P=1}^{m-1}(Q_x)_P\cos\frac{Pr\pi}{m}+(Q_x)m\ \cos r\pi\right]$$

$$\cdots\cdots(3\cdot17)$$

이와같이 式 (3·17)에 依해 計算된 것은 Raw spectrum 이라고 하고, 여기에Hanning, Hamming, W_2와 같은 Window에 依해서 平滑化한 Smooth Spectrum은

$$U_r = a_{-n}L_{r-n} + a_{-n+1}L_{r-n+1} + \cdots\cdots a_{-2}L_{r-2} + a_{-1}L_{r-1} + a_0L_r + a_1L_{r+1} + a_2L_{r+2} + \cdots\cdots + a_{n-1}L_{r+n-1} + a_nL_{r+n} = \sum_{j=-n}^{n} a_j L_{r+j} \quad (3\cdot18)$$

에 依해서 計算된다. Q Window에서는

$$U_r = 0.64L_r + 0.24(L_{r-1} + L_{r+1}) - 0.06(L_{r-2} + L_{r+2}) \quad (3\cdot19)$$

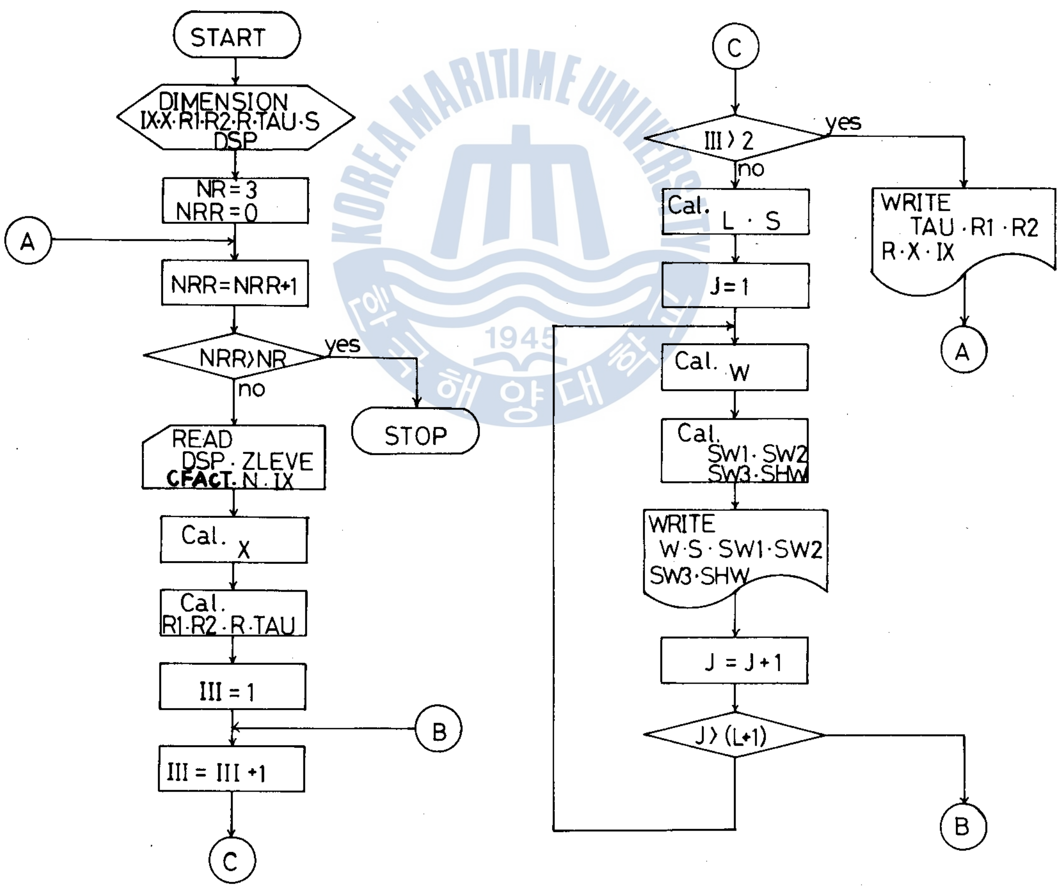


Fig3-2 Flow chart

(2) Programming

i) 入出力 用語의 說明

DSP : Coefficient of non-linear term

ZLEVE: Zero level

CFACT: Factor of variable ampltude

N : Sampling numbers

IX : Digitalized analog data

W : Frequency of wave

S(w) : Raw Spectrum

*SW*1 : Window 1

*SW*2 : Window 2

*SW*3 : Window 3

SHW : Hamming

TAU : Time interval

*R*1 : Auto-correlation

*R*2 : Auto-correlation of mean value

R ; R_1-R_2

ii) 흐름도(flow Chart)

Fig 3-2參照

iii) 푸로그램(Program)

附錄 參照

4. 周波數應答特性[4,6]

線型系(Linear system)의 應答特性은 다음의 두 條件을 滿足한다.

즉 $L[X_1(t)+X_2(t)]=L[X_1(t)]+L[X_2(t)]=Y_1(t)+Y_2(t)$ ……(4·1)

$L[aX(t)]=aL[X(t)]=aY(t)$ ……(4·2)

여기에서 a는 Constant, L는 $X(t)$를 $Y(t)$로 변환하는 전달함수(Transfer function)

式(4·1), (4·2)를 결합하면

$$L[a_1X_1(t)+a_2X_2(t)]=a_1L[X_1(t)+a_2L[X_2(t)]$$
$$=a_1Y_1(t)+a_2Y_2(t) \quad \cdots\cdots(4\cdot3)$$

時間 $t=t_0$때 線型系의 入力으로 單位衝擊(Unit impulse) 이 加해 졌을 때의 應答을 무게함수(Weighting function) 또는 衝擊應答函數(Impulse response function)라고 한다.

즉 $L[\delta(t-t_0)]=h(t,t_0)$ ……(4·4)

여기에서 $h(t,t_0)$는 무게함수

$\delta(t-t_0)$는 Fig4-1과 같이 定義되는 Dirac delta function 또는 단위 충격함수

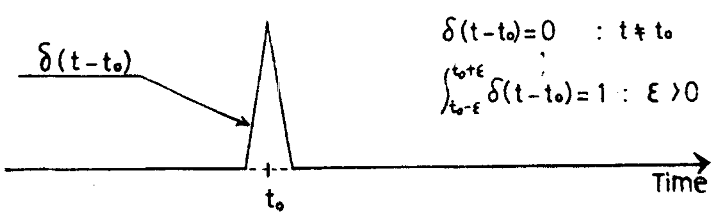


Fig 4-1 Unit impulse function

任意의 入力 $X(t)$는 충격(Impulse)의 總合으로 表示할 수 있으므로 $X(t)$에 對한 應答 $Y(t)$는

$h(t, t_0)$에 依해서 얻어진다.

즉 $X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t_0)\delta(t-t_0)dt_0$ ……(4·5)

式 (4·4), (4·5)로부터 應答 $Y(t)$는

$$Y(t)=L[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}X(t_0)\cdot L[\delta(t-t_0)]dt_0$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}X(t_0)\cdot h(t, t_0)dt_0 \quad\cdots\cdots(4\cdot6)$$

한편 課型系의 應答特性이 時間에 無關하다(time invariant)고 가정하면,

$$L[X(t-t_0)]=Y(t-t_0) \quad\cdots\cdots(4\cdot7)$$

式 (4·4),(4·7)로 부터

$$L[\delta(t-t_0)]=h(t-t_0) \quad\cdots\cdots(4\cdot8)$$

또 式 (4·6),(4·8)로 부터

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t_0)\cdot h(t-t_0)dt_0=\int_{-\infty}^{\infty}X(t-\tau)\cdot h(\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(4\cdot9)$$

여기에서 $\tau=t-t_0$

式 (4·9)를 Fourier變換하기 위해서 $X(t), Y(t)$ 대신에 3·1 節에서 定義한 $X_T(t)$, $Y_T(t)$로 바꾸어 다시쓰면

$$Y_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t-\tau)\cdot h(\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(4\cdot10)$$

式 (4·10)을 Fourier 變換하면

$$Y_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it}X_T(t-\tau)dt\right]d\tau \quad\cdots\cdots(4\cdot11)$$

여기에서 $Y_T(\omega)$는 $Y_T(t)$의 Fourier 변환

$U=t-\tau$로 놓고 式(4·11)의 우변의 〔 〕항을 變數 變換하면

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}X_T(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}X_T(u)e^{i\omega(u+\tau)}du$$

$$=X_T(\omega)\cdot e^{-i\omega\tau} \quad\cdots\cdots(4\cdot12)$$

여기에서 $X_T(\omega)$는 $X_T(t)$의 Fourier 변환

式 (4·12)를 (4·11)에 代入하면

$$Y_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot X_T(\omega)e^{-i\omega\tau}d\tau=X_T(\omega)\cdot H(\omega) \quad\cdots\cdots(4\cdot13)$$

여기에서 $H(\omega)$는 $h(t)$의 Fourier변환

式 (3·6)과 마 찬가지로 應答 $Y_T(t)$의 스펙트럼밀도함수(Spectral density function) $Syy(\omega)$는

$$Syy(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}|Y_T(\omega)|^2 \quad\cdots\cdots(4\cdot14)$$

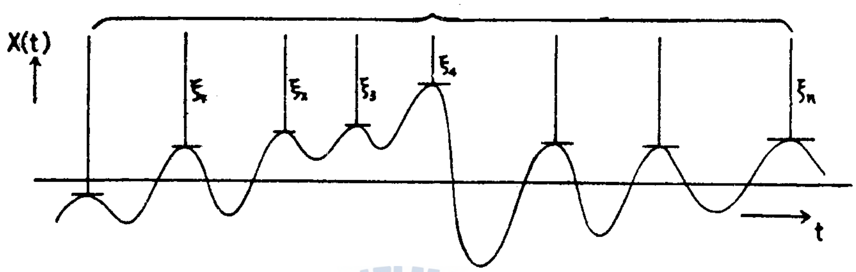
式 (3·6),(4·13) 및 (4·14)로 부터

$$Syy(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}|X_T(\omega)|^2\cdot|H(\omega)|^2$$

$$=Sxx(\omega)\cdot|H(\omega)|^2 \quad\cdots\cdots(4\cdot15)$$

즉, 式 (4·15)에서 $|H(\omega)|^2$을 Response Amplitude Operator (RAO)라고 하며 應答의 Spectrum은 入力의 Spectrum과 RAO의 곱(乘)이라고 할 수 있다.

5. 極大值의 確率分布



Fiq 5-1 Maxima of random process X(t)

確率過程 $X(t)$의 極大值는 $\dot{X}(t)=0$ 및 $\ddot{X}(t)<0$인 경우에 나타남으로 $X(t)$의 極大值의 分布를 알기 爲해서는 $X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t)$의 同時確率密度函數(Jointly probability density function) $f\{X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t)\}$를 생각해야 한다.

$X(t)=\xi$ 上方에서 단위시간에 나타나는 極大值의 期待數를 表現한 Rice의 式은[7]

$$\bar{M}_\xi=\int_\xi^\infty\int_{-\infty}^0|\ddot{X}(t)|f\{X(t),0,\ddot{X}(t)\}d\ddot{X}dX \quad \cdots\cdots(5\cdot1)$$

式 (5·1)에서 $\xi=-\infty$로 놓으면 크기에 關係없이 단위시간에 나타나는 極大值의 總期待數 M가 된다.

$$\bar{M}=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^0|\ddot{X}(t)|f\{X(t),0,\ddot{X}(t)\}d\ddot{X}dX \quad \cdots\cdots(5\cdot2)$$

따라서 $\dfrac{(\bar{M}-\bar{M}_\xi)}{\bar{M}}$는 임의시간 t에서 극대치가 ξ보다 작아질 확률이 된다. 즉 극대치의 확률분포 함수가 된다.

$\dot{X}(t)=0$ 및 $\ddot{X}(t)<0$의 條件을 滿足하는 極大值를 確率變數 Ξ로 表示하면

$$P_r\{\Xi\leqq\xi\}=F(\xi)=1-\frac{\bar{M}_\xi}{\bar{M}} \quad \cdots\cdots(5\cdot3)$$

式 (5·1), (5·2), (5·3)으로 부터 任意時間 t에서의 極大值의 確率密度函數는

$$f(\xi)=\frac{d}{dt}P_r\{\Xi\leqq\xi\}=\frac{d}{dt}\left\{1-\frac{\bar{M}_\xi}{\bar{M}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\bar{M}}\int_{-\infty}^0|\ddot{X}(t)|f\{\xi,0,\ddot{X}(t)\}d\ddot{X} \quad \cdots\cdots(5\cdot4)$$

한편 $X(t)$는 平均이 0인 正規性定常不規則過程이므로 $\dot{X}(t), \ddot{X}(t)$도 역시 正規性定常不規則過程이다. (∴ 2·2 節 參照) 또 $E[X(t)\dot{X}(t)]=0$이므로 $X(t)$와 $\dot{X}(t)$, $\dot{X}(t)$와 $\ddot{X}(t)$는 각각 서로 獨立이지만 $X(t)$와 $\ddot{X}(t)$는 陰의 符號를 取하는 速度 Spectrum 下의 面積과 같은 共分散을 取한다.

따라서 共分散行列 Σ는

$$\Sigma=\begin{pmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(5\cdot5)$$

여기에서 $m_n=\int_0^\infty \omega^n Sxx(\omega)d\omega$ $\cdots\cdots(5\cdot6)$

즉 $m_0=\int_0^\infty Sxx(\omega)d\omega=\delta_x^2$이고 m_2는 $\dot{X}(t)$의, m_4는 $\ddot{X}(t)$의 Spectrum 下의 面積이다.

그러므로 式 (2·9)에 $n=3$, $X_1=X, X_2=\dot{X}, X_3=\ddot{X}$ 및 式 (5·5)를 代入하여 동시확률밀도함수 $f(X,\dot{X},\ddot{X})$를 求하면

$$f(X,\dot{X},\ddot{X})=\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{\triangle m_2}}exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\dot{X}^2}{m_2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\triangle}(m_4X^2+2m_2X\ddot{X}+m_0\ddot{X}^2)\right\} \qquad \cdots\cdots(5\cdot7)$$

여기에서 $\triangle=m_0m_4-m^2{}_2$

式 (5·2), (5·7)로부터

$$M=\int_{-\infty}^0|\ddot{X}|\left[\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\triangle m_2}}exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\dot{X}^2}{m_2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2\triangle}(m_4X^2+2m_2X\ddot{X}+m_0\ddot{X}^2)\right\}dX\right]d\ddot{X}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{m_4/m_2}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\int_0^\infty\omega^4S(\omega)d\omega}{\int_0^\infty\omega^2S(\omega)d\omega}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(5\cdot8)$$

式 (5·4), (5·7), (5·8)로 부터 극대치의 확률밀도 함수 $f(\xi)$는

$$f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m_0}}\left[\varepsilon\cdot exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\frac{\xi^2}{m_0}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2\pi(1-\varepsilon^2)}}{\sqrt{m_0}}\cdot\xi e^{-\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{m_0}}\phi\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\cdot\frac{\xi}{m_0}\right)\right] \qquad \cdots\cdots(5\cdot9)$$

여기에서 $-\infty<\xi<\infty$

$$\varepsilon^2=\frac{\triangle}{m_0m_4}=1-\frac{m_2{}^2}{m_0m_4} \qquad \cdots\cdots(5\cdot10)$$

$$\phi(u)=\int_{-\infty}^u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dZ \qquad \cdots\cdots(5\cdot11)$$

式 (5·10)의 ε는 Spectrum의 帶域幅을 나타내는 Parameteter이다.

한편 $\frac{\xi}{\sqrt{m_0}}=\eta$로 놓고 η의 確率密度函數를 求하면[8)9)]

$$f(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varepsilon\, exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\varepsilon^2}\right\}\right.$$
$$\left.+\eta\sqrt{2\pi(1-\varepsilon^2)}\,e^{-\frac{1}{2}\eta^2}\phi\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\eta\right)\right] \qquad \cdots\cdots(5\cdot12)$$

특히

i) Spectrum이 $\omega=\omega_o$ 근방에 Power를 集中하고 Spectrum의 有効幅이 中心周波數 ω_o에 比하여 充分히 좁은 경우에는 $\varepsilon=0$가 되며 확률밀도 함수는

$$f(\eta)=\begin{cases}\eta e^{-\eta^2/2} & :\eta\geq 0\\ 0 & :\eta<0\end{cases} \qquad \cdots\cdots(5\cdot13)$$

이 된다.

즉 Rayleigh 分布를 한다.

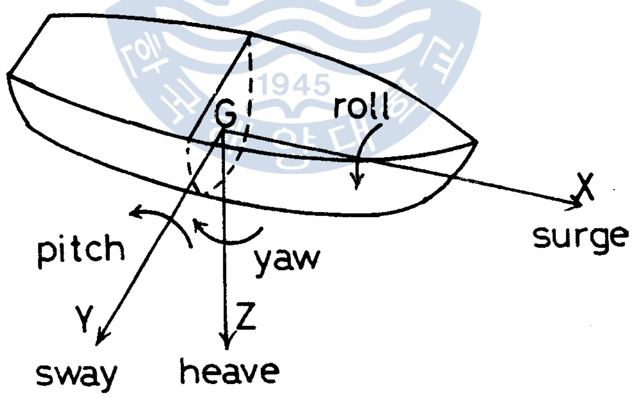
ii) Spectrum에 두개의 中心周波數 ω_1, ω_2가 있고 Power의 大部分이 ω_1周圍에 存在하며 $\omega_2\gg\omega_1$인 경우에는 $\varepsilon=1$ 이되며 확률밀도함수는 $f(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\eta^2/2}$ $\cdots\cdots(5\cdot14)$

즉 原波型 $X(t)$와 같은 正規分布를 한다.

6. 橫搖運動 方程式

一般的으로 波浪中에서의 船의 運動方程式은 Fig 6－1과 같이 船의 重心을 原點으로 하고 絶對空間에 對해 進行方向으로 平行하게 움직이는 座標軸에 關하여 表示된다. 이미 아는 바와 같이 橫搖에 對한 線型運動方程式을 쓰면 다음과 같다.[10]

$$J_s\ddot{\theta}+B_s\dot{\theta}+K_s\theta=M_w \qquad \cdots\cdots(6\cdot1)$$



Fiq 6-1 Coordinate system

(6·1)式中 damping 項을 非線型要素까지 고려하여 다시 쓰면

$$J_s\ddot{\theta}+B_s\dot{\theta}+\beta f(\dot{\theta})+K_s\theta=M_w \qquad \cdots\cdots(6\cdot2)$$

式 (6·2)에서 $f(\dot{\theta})$는 $\dot{\theta}^2$ 項까지만 取하여 正規化하면

$$\ddot{\theta}+b_{so}\dot{\theta}+\beta\dot{\theta}^2+\omega_s^2\theta=\omega_s^2 r\Theta_w \qquad \cdots\cdots(6\cdot3)$$

여기에서 r = 유효파경사경수

ω_s = 船의 固有주파수

Θ_w = 波面의 기울기

7. 考察 및 檢討

式 (6·3)에서 파도의 모양을 Sine wave라 생각하고 유효파경사계수를 1로 가정하여 橫搖方程式을 다시 고쳐 쓰면

$$\ddot{\theta}+b_{s}\dot{\theta}+\beta\dot{\theta}^2+\omega_s^2\theta=\omega_s^2\alpha_M\sin\omega t \quad \cdots\cdots (7·1)$$

여기에서 α_M : 波面의 최대기울기

ω : 파도의 주파수

실제 β의 값으로서 0.0, 0.05, 0.10, 0.15인 非線型을 取하여 橫搖方程式을 "*IBM* 1130 전자계산조직"으로 풀어서 그 應答을 조사해 보았다.

數値計算方法은[11)12)] Runge-Kutta Method를 利用하여 初期條件으로서 $t=0$일 때 $\theta=\dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$로 놓고 0.5초 간격으로 解를 얻어 어느정도 정상상태 (약 100초 정도 지났을 때)에 達했을 때의 θ의 값을 平均하여 取하였다.

Fig 7-1은 非線型項이 없는 $\beta=0·0$인 경우이고 Fig 7-2는 $\beta=0.05$, Fig 7-3은 $\beta=0.10$. Fig 7-4는 $\beta=0.15$인 경우를 파경사각(α_M) 1°, 2°, 3°, 를 Parameter로 하고 ω를 base로 한 周波數應答曲線들이다.

또 Fig 7-5, Fig 7-6, Fig 7-7는 β를 Parameter로 하여 그린 것인데 비선형 영향이 共振周波數에서만 조금 나타날 뿐이다. 이는 山内保文의 實驗[13)]에서 前進速度를 갖는 船은 Damping 項의 非線型影響이 거의 없다는 事實 (Froude No. 0.1이면 $\beta=0.1$정도) 과도 잘 一致한다.

Fig 7-8은 規則波의 特性에 對한 古典的 關係式[14)]

즉
$$L=\frac{gT^2}{2\pi} \quad \cdots\cdots (7·2)$$

$$K=\frac{2\pi}{L} \quad \cdots\cdots (7·3)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \quad \cdots\cdots (7·4)$$

$$k\zeta_a=2\pi\frac{\zeta_a}{L}=\alpha_M \quad \cdots\cdots (7·5)$$

여기에서 L : 波長

g : 重力加速度

T : 週期

k : 波數

ζ_a : 波의 振幅

와 앞에서 求한 周波數應答曲線 ($\beta=0.0$, $\alpha_M=1°$인 경우)으로 부터 計算으로 求한 Roll response curve이다.

그림에서도 알 수 있듯이, 海洋波의 週期와 船의 固有週期가 一致하는 共振狀態에서 橫搖應答(Roll responses) 이 가장 크게 나타났다.

Fig 7-9 및 Fig 7-10은 실제의 해양파에 해당하는 정규분포를 하는 불규칙신호를 전기적장치에 의해서 발생시켜서 0.1初 間隔으로 振幅에 對한 1400個의 標本을 取해 3·2節에서 叙述한 數値計算法에 따라 Programming하여 "*IBM* 1130 전자계산조직"으로 계산하여 求한 Spectrum 및

Correlogram인데 $\omega=1.8$ 정도에서 Power가 集中해 있음을 알 수 있다.

Fig 7-11은 式 (4·15)의 관계로부터 Fig 7-9의 海洋波의 Spectrum과 Fig 7-8로부터 계산한 Response Amplitude Operator를 서로 곱(乘)하여서 얻은 橫搖應答에 對한 Power spectrum인데, Power가 中心周波數에 集中해 있음을 알 수 있다.

Fig 7-12 및 Fig 7-13은 式 (7·1)의 橫搖運動方程式에 對한 海洋波와 橫搖應答 사이의 位相差 및 增幅係數를 나타내는 그림인데 다음식으로부터 求한 것이다.

$$\tan\delta=\frac{2b_{so}\Lambda}{1-\Lambda^2} \tag{7·6}$$

$$\mu=1/\{(1-\Lambda^2)^2+4b_{so}^2\Lambda^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{7·7}$$

여기에서 δ : 位相差

Λ : tuning factor

μ : magnification factor

Fig 7-14는 橫搖應答의 極大値의 確率分布를 나타내는 그림인데 Fig 7-11의 Roll spectrum으로부터 式 (5·6)에서 定義한 m_n의 값을 計算해 보니 $m_0=116.61$, $m_2=411.54$, $m_4=1467.85$이었다.

이 값을 式 (5·10)에 代入하여 Spectral bandwidth parameter ε를 計算해 보니 $\varepsilon=0.103$이 되었다. 式 (5·12)로부터 $\varepsilon=0.103$에 對한 極大値의 確率分布를 求한 것이 Fig 7-14이다. 즉, 正規分布를 하는 海洋波에 對한 橫搖應答을 推定하여 그의 極大値의 分布를 檢討한 즉, 거의 式 (5·13)에 가까운 Ragleigh 分布를 한다는 것을 確認할 수 있었다. 또 단위시간에 나타나는 極大値의 數는 式 (5·8)로부터 計算해 본 結果 $N_{max}=0.3$이었다.

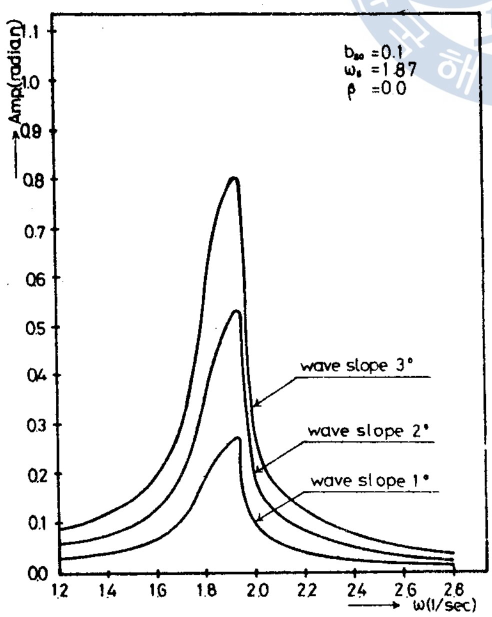


Fig 7-1 Frequency response curve
$b_{so}=0.1$ $\omega s=1.87$ $\beta=0.0$

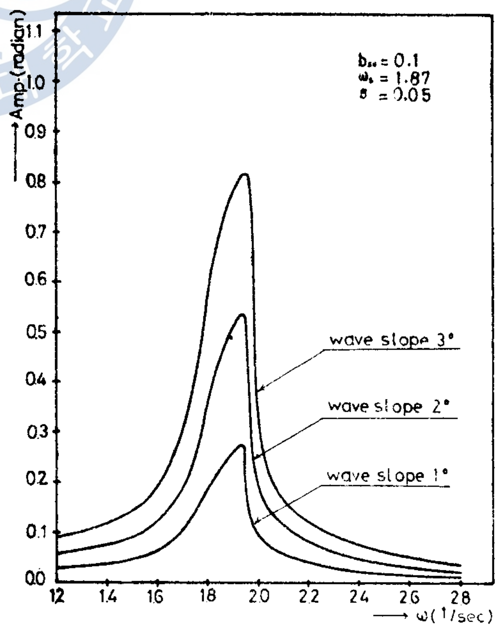


Fig 7-2 Frequency response curve
$b_{so}=0.1$ $\omega s=1.87$ $\beta=0.05$

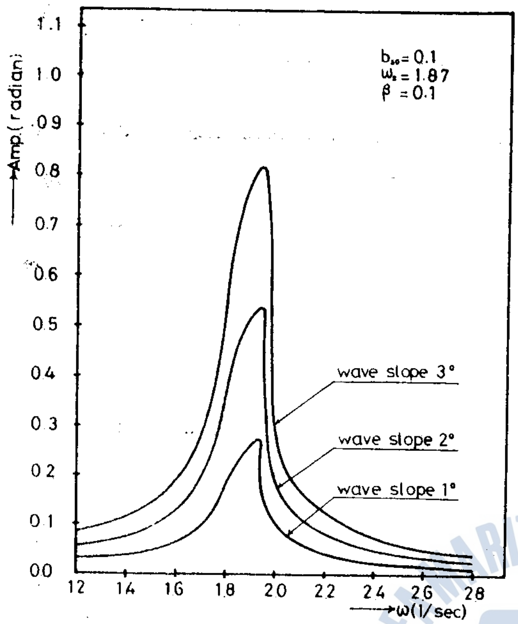


Fig 7-3 Frequency response curve
$b_{so}=0.1$ $\omega_s=1.87$ $\beta=0.1$

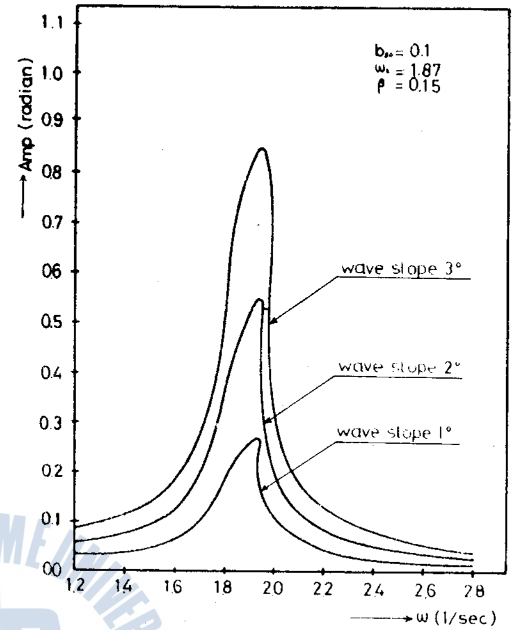


Fig 7-4 Frequency response curve
$b_{so}=0.1$ $\omega_s=1.87$ $\beta=0.15$

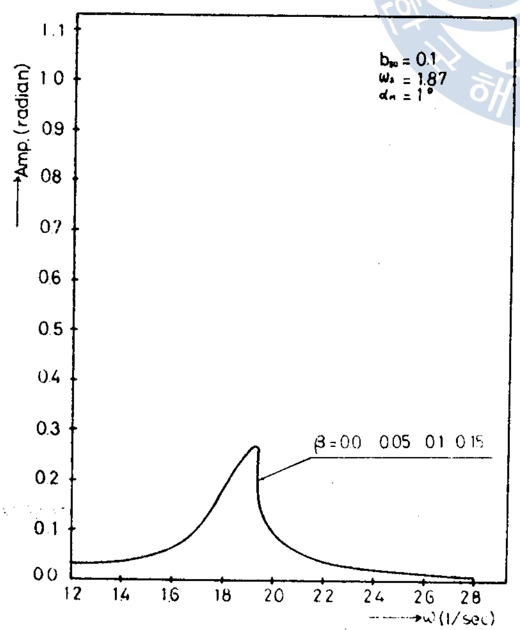


Fig 7-5 Frequency response curve
$b_{so}=0.1$ $\omega_s=1.87$ $\alpha_M=1.0$

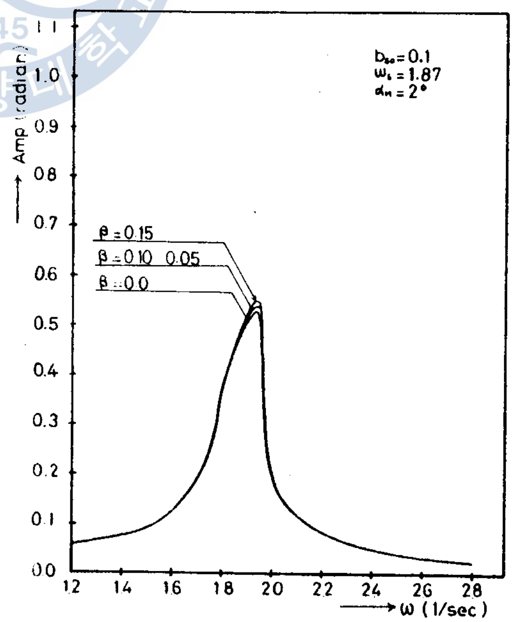


Fig 7-6 Frequency response curve.
$b_{so}=0.1$ $\omega_s=1.87$ $\alpha_M=2.0$

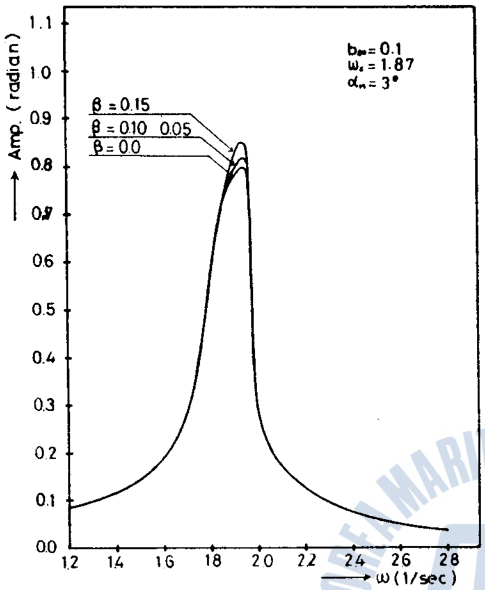


Fig 7-7 Frequency response curve
$b_{so}=0.1$ $\omega_S=1.87$ $\alpha_M=3.0$

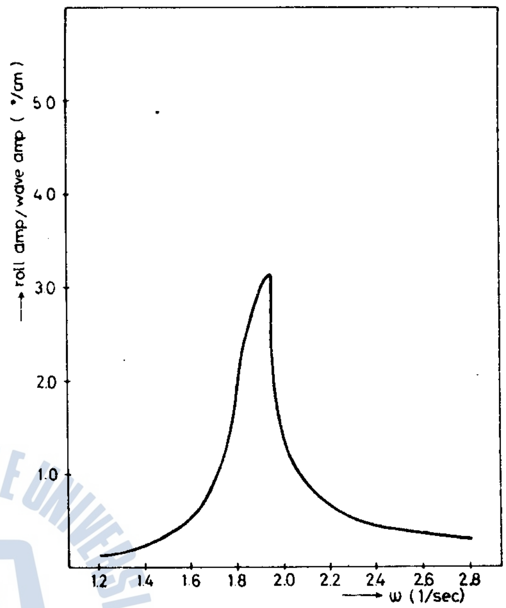


Fig 7-8 Roll Response curve

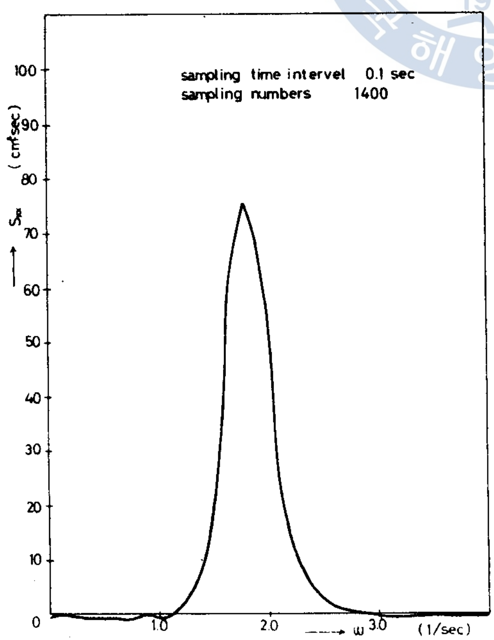


Fig 7-9 Power spectrum of sea wave

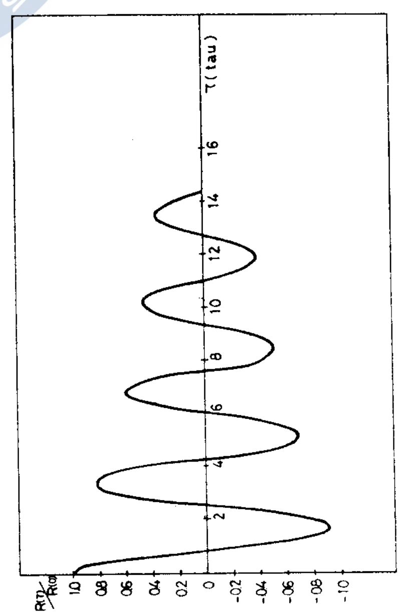


Fig 7-10 Correlogram of sea wave

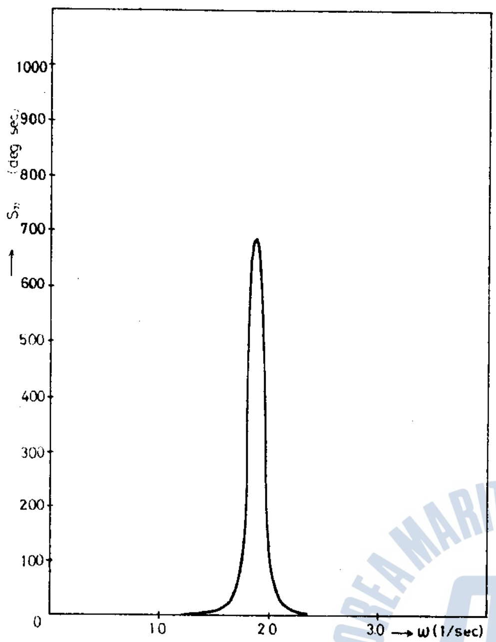


Fig 7-11 Power spectrum of roll responses

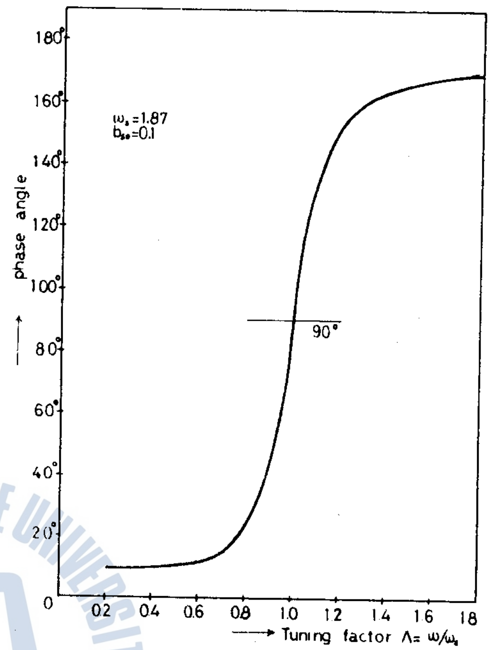


Fig 7-12 Phase angle

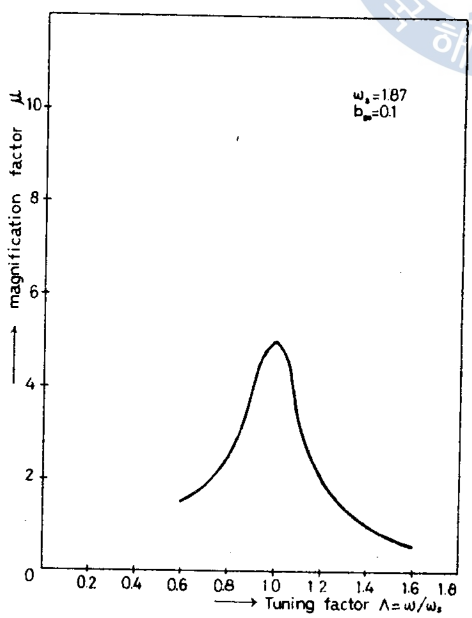


Fig 7-13 Magnificatioh factor

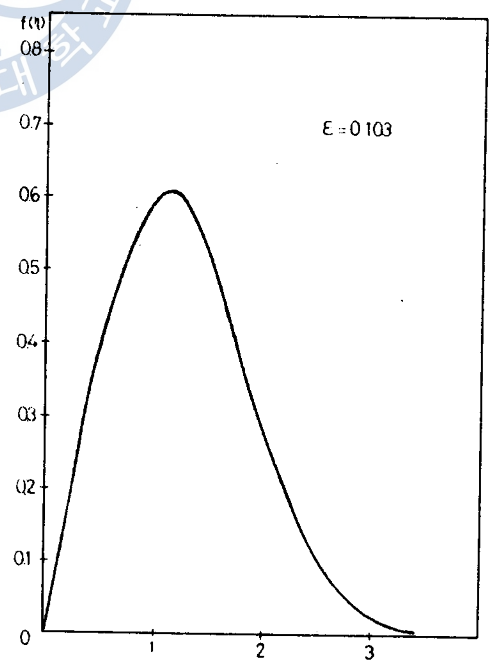


Fig 7-14 Probability density function.

8. 結　論

前述한 理論解析 및 數値計算結果를 다음과 같이 要約整理한다.

1) 正規分布를 하는 不規則海洋波의 標本記錄으로부터 數値的相關調整을 通해 Power spectrum을 求해 본 즉 $\omega \fallingdotseq 1.8$ 정도에서 Power가 集中해 있었다.

2) 橫搖運動方程式에서 Damping 項이 非線型이고 波傾斜角이 작은 경우 Runge-Kutta Method를 써서 解를 求하여 周波數應答曲線을 그려 본 즉 非線型影響이 거의 없었다.

3) $S_{yy}(\omega)=S_{xx}(\omega)|H(\omega)|^2$의 關係式으로부터 橫搖應答의 Power spectrum을 推定計算한 즉 Power가 거의 中心周波數에 集中해 있었다.

4) 推定計算된 橫搖應答의 Power Spectrum으로부터 Spectral bandwidth parameter ε을 計算하여 極大値의 分布를 檢討한 즉 $\varepsilon=0.103$으로서 거의 Rayleigh 分布를 함을 確認했다.

參 考 文 獻

1) St. Denis, M and Pierson, W. J. Jr., "On the Motions of Ships in Confused Seas", Trans. SNAME, Vol. 61, 1953.
2) 山内保文, "船の波浪中動搖應答の解析法について(その2)", 日本造船協會論文集, 第110號, 昭和 36年 (1961)
3) 椹木義一, 砂原善文, "統計學的手法による自動制御理論" 株式會社 オーム社, 昭和 42年.
4) Dr. M. K. Ochi and Miss W. E. Bolton, "Statistics for Prediction of Ship Performance in a Seaway", ISP, No. 222, 1973.
5) 山内保文, "海洋波中の應答" 耐航性に關するシンポジウム, 日本造船學會, 昭和 44年 7月.
6) K. J. Rawson and E. C. Tupper, "Basic Ship Theory" p. 424-p. 446, Longmans, Green and Co., Ltd, 1968.
7) Rice, O., "Mathematical Analysis of Random Noise", Bell System Technical Journal, Vol. 23, 1944.
8) Dr. M. K. Ochi and Miss W. E. Bolton, "Statistids for Prediction of Ship Performance in a Seaway", ISP, No. 224, 1973.
9) 磯部孝 編, "相關函數 および スペクトル" p. 49〜p. 89. 東京大學出版部, 1968.
10) 禹奉九, "不規則海洋波에 對한 船體運動의 等價線型化方法에 關하여" 大韓造船學會誌, 第8卷 第2號, 1971.
11) 森口繁一, "FORTRAN Ⅳ入門—HARP 5020 について—" p. 291〜p. 292 東京大學出版部, 1966.
12) 宇野利雄, "計算機の ための數値計算", p. 137〜p. 152, 朝倉書店, 昭和 45年.
13) 山内保文. "船の波浪中動搖應答の解析法について(その1)", 日本造船協會論文集, 第 109號 昭和 36年.
14) Edward, V. Lewis, "The Motion of Ships in Waves", Principle of Naval Architecture, Chapter 9, SNAME 1967.

附 錄

Power spectrum program list

```
// FOR
* IOCS(DISK, 2501 READER, 1403 PRINTER)
* ONE WORD INTEGERS
* LIST ALL
* EXTENDED PRECISION
C         POWER SPECTRUM
          DIMENSION IX(1400), X(1400), RI(401), R2(401), R(401), TAU(401)
          DIMENSION S(100), DSP(4)
          NR=3
          NRR=0
      1   NRR=NRR+1
          IF(NRR-NR)2, 2, 55
      2   READ(8, 1000) (DSP(I), I=1, 4)
   1000   FORMAT(4A4)
          READ(8, 1001) ZLEVE, CFACT
   1001   FORMAT(F5. 1, 7X, F4. 2)
          READ(8, 1002) N
   1002   FORMAT(I4)
          READ(8, 1003)(IX(I), I=1, N)
   1003   FORMAT(1O(4X, 13))
          H=0. 10
          WMAX=16. 0
          DO 100 I=1, N
    100   X(I)=(FLOAT(IX(I))-ZLEVE)*CFACT
          MM=N/10+1
          KKK=MM+1
          DO 200 J=1, KKK
          SUM1=0. 0
          SUM2=0. 0
          M=N-J+1
          DO201 I=1, M
          K=I+J-1
          SUM1=SUM1+X(I)*X(K)
          SUM2=SUM2+X(I)
    201   CONTINUE
          T=M
          R1(J)=SUM1/T
          SR=0. 0
          DO 202 I=1, M
```

```
      K=I+J-1
      SR=SR+X(K)*SUM2
202   CONTINUE
      R2(J)=SR/T**2
      R(J)=R1(J)-R2(J)
      TAU(J)=FLOAT(J-1)*H
200   CONTINUE
      III=1
      PAI=3.14159265
 20   III=III+1
      IF(III-2) 33,33,50
 33   GO TO (11,12),III
 12   MM=N/10+1
 11   DW=PAI/(FLOAT(MM)*H)
      L=WMAX/DW
      KK=(-1)**MM
      IF(KK)13,13,14
 13   KKK=L+1
      DO 300 J=1,KKK
      OM=FLOAT(J-1)*DW
      SR4=0.0
      SR2=0.0
      LLL=MM-1
      DO 301 I=2,LLL,2
301   SR4=SR4+R(I)*COS(OM*TAU(I))
      NNN=MM-2
      DO 302 I=3,NNN,2
302   SR2=SR2+R(I)*COS(OM*TAU(I))
      ZODD=R(MM)*COS(OM*TAU(MM))
      SRZ=(-R(MM-1)*COS(OM*TAU(MM-1))+8.0*R(MM)*COS(OM*TAU(MM))+
     15.0*R(MM+1)*COS(OM*TAU(MM+1)))*H/12.0
      S(J)=((R(I)+4.0*SR4+2.0*SR2+ZODD)*H/3.0+SRZ)/PAI
300   CONTINUE
      GO TO 15
 14   KKK=L+1
      DO 400 J=1,KKK
      OM=FLOAT(J-1)*DW
      SR4=0.0
```

```
      SR2=0.0
      DO 401 I=2,MM,2
401   SR4=SR4+R(I)*COS(OM*TAU(I))
      LLL=MM-1
      DO 402 I=3,LLL,2
402   SR2=SR2+R(I)*COS(OM*TAU(I))
      ZEVEN=R(MM+1)*COS(OM*TAU(MM+1))
      S(J)=(R(I)+4.0*SR4+2.0*SR2+ZEVEN)*H/(3.0*PAI)
400   CONTINUE
      PAUSE 5555
15    IF(III-2) 44,30,44
44    WRITE(5,2001) (DSP(I),I=1,4)
2001  FORMAT(1H1,27H***** POWER SPECTRUM***** ,4A4//
     11H,34HMAXIMUM LAG, TAU=(NUMBER OB DATA)/6,//,1H,
     29X,1HW,11X,4HS(W),3X,12HS(W)-WINDOW1,3X,12HS(W)-WINDOW2,
     33X,12HS(W)-WINDOW3,2X,15HS(W)-HAMMING.W.)
      GO TO40
30    WRITE(5,2002) (DSP(I),I=1,4)
2002  FORMAT(1H1,27H***** POWER SPECTRUM***** ,4A4//1H,
     135HMAXIMUM LAG,TAU=(NUMBER OF DATA)/10//1H,9X, 1HW,
     211X,4HS(W),3X,12HS(W)-WINDOW1,3X,12HS(W)-WINDOW2,3X
     3,12HS(W)W-WINDOW3,2X, 15HS(W)-HAMMING.W.)
40    J=1
80    W=FLOAT(J-1)*DW
      IF(J-3) 77,77,99
77    GO TO(91,92,93),J
99    IF(J-(L-2)) 79,79,94
79    SW1=0.5132*S(J)+0.243*(S(J-1)+S(J+1))
      SW2=0.6398*S(J)+0.2401*(S(J-1)+S(J+1))-0.06*(S(J-2)+S(J+2))
      SW3=0.7029*S(J)+0.2228*(S(J-1)+S(J+1))-0.0891*(S(J-2)+S(J+2))
     1+0.0149*(S(J-3)+S(J+3))
      SHW=0.54*S(J)+0.23*(S(J-1)+S(J+1))
      GO TO 90
91    SW1=0.5132*S(J)+0.4368*S(J+1)
      SW2=0.6398*S(J)+0.4802*S(J+1)-0.12*S(J+2)
      SW3=0.7029*S(J)+0.4456*S(J+1)-0.1782*S(J+2)+0.0298*S(J+3)
      SHW=0.54*S(J)+0.46*S(J+1)
      GO TO 90
92    SW1=0.5132*S(J)+0.2434*(S (J-1)+S(J+1))
      SW2=0.6398*S(J)+0.2401*(S (J-1) +S(J+1))-0.12*S(J+2)
      SW3=0.7029*S(J)+0.2228*(S(J-1)+S(J+1))-0.1782*S(J+2)+0.0298*S(J+3)
```

```
      SHW=0.54*S(J)+0.23*(S(J-1)+S(J+1))
      GO TO 90
   93 SW1=0.5132*S(J)+0.2434*(S(J-1)+S(J+1))
      SW2=0·6398*S(J)+0.2401*(S(J-1)+S(J+1))-0.06*(S(J-2)+S(J+2))
      SW3=0.7029*S(J)+0.2228*(S(J-1)+S(J+1))-0.0891*(S(J-2)+S(J+2))+
     10.0298*S(J+3)
      SHW=0.54*S(J)+0.23*(S(J-1)+S(J+1)
      GO TO 90
   94 LL=L-J+2
      GO TO (97,96,95),LL
   95 SW1=0.5132*S(J)+0.2434*(S(J-1)+S(J+1))
      SW2=0.6398*S(J)+0.2401*(S(J-1)+S(J+1))-0.06*(S(J-2)+S(J+2))
      SW3 || 0.7029*S(J)+0.2228*(S(J-1)+S(J+1))-0.089*(S(J-2)+S(J+2))-
     10.0298*S(J-3)
      SHW=0.54*S(J)+0.23*(S(J-1)+S(J+1))
      GO TO 90
   96 SW1=0.5132*5(J)+0.2434*(S(J-1)+S(J+1))
      SW2=0.6398*S(J)+0.2401*(S(J-1)+S(J+1))-0.12*S(J-2)
      SW3=0.7029*S(J)+0.2228*(S(J-1)+S(J+1))-0.1782*S(J-2)+
     10.0298*S(J-3)
      SHW=0.54*S(J)+0.23*(S(J-1)+S(J+1))
      GO To 90
   97 SW1=0.5132*S(J)+0.4868*S(J-1)
      SW2=0.6398*S(J)+0.4802*S(J-1)-0.12*S(J-2)
      SW3=0.7029*S(J)+0.4456*S(J-1)-0.1782*S(I-2)+0.0298*S(J-3)
      SHW-0.54*S(J)+0.46*S(J-1)
   90 WRITE(5,2003)W,S(J),SW1,SW2,SW3,SHW
 2003 FORMAT(1H,F10.3,5E15.7)
      J=J+1
      IF(J-(L+1)) 88,88,20
   88 GO TO 80
   50 WRITE(5,2004) (DSP(I),I=I,4)
 2004 FORMAT(1HI, 37H***** AUTO-CORRELATION FUNCTION***** ,4A4//1H,
     18X,3HTAU,4X,7HRI(TAU),8X,7HR2(TAU),8X,6HR(TAU))
      MM=N/10+1
      DO 60 J=1,MM
      WRITE(5,2005)TAU(J),R1(J),R2(J),R(J)
 2005 FORMAT(1H , F10.2,3E15.7)
   90 CONTINUE
 2006 FORMAT(1H1,49***** TIME SERIES OF THE IRREGULAR SIGNAL*****,
     13A5//1H, IOX,22HSAMPLING TIME,0.10 SEC//)
      WRITE(5,2006) DSP
```

```
      WRITE(5,2007) (X(I),I=1,N)
2007  FORMAT(1H ,IOF10.2)
      WRITE(5,200S) DSP
2008  FORMAT(1H1,36H***** DIGITALIZED ANALOG DATA*****,3A5//)
      WRITE(5,2009)(IX(I),I=1,N)
2009  FORMAT(1H , 10I7)
      GO TO 1
  55  CALL EXI
      END
```