部分母集團의 選別에 관한 決定方式

李　　鍾　　厚

On a Decision Procedure for a Selection of a Subpopulation

Jong hoo Lee

〈目　　次〉

1. 序　　論
2. Raj 의 基準에 있어서의 最適選別
参考文獻

Abstract

Selection of a subpopulation is meant to select under some criterion a subset of the given population on the information of a variable X, because realized values of an another variable Y which chracterizes members of the population cannot be directly measured at the time of selection. Since optimum selection $\phi_\theta^*(x)$ depends on unknown parameter θ.

Optimum selection $\phi_\theta^*(x)$ is to find the maximum or minimum of the objective function with respect to the selection of a subpopulation under some appropriate conditions.

In this note we find the range of parameters $\theta[=(\theta_0,\theta_1)]$ for the existence of the selection of a subpopulation under the Raj criterion in the case random variable X, Y have a joint $p.d.f.\ f(x, y,\theta)$, the conditional $p.d.f.$ $\bar{f}(y,\theta \mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\theta_0-\theta_1 x)^2\right]$ for given $X=x$, and the marginal $p,d,f.$ of X, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$. And we derive the necessary and sufficent condition of $\phi_\theta(x)$ to be an optimum selection in the above case.

1. 序　　論

部分母集團의 選別이라함은 入學試驗에 의한 選拔 또는 農蓄產의 育種에 있어서 良質部分의 選別等에서 보는것과 같이 어떤 母集團의 部分集團을 一定한 基準에 의하여 選出하는 問題이다.

이 때 成員의 性格을 量的으로 特徵짓는 變量 Y 의 實現値(例컨데 入學試驗의 境遇는 入學後의 成績等)는 現時點에서는 觀測되지 못하고 將來에 가서 비로서 얻어지는 값이다. 그러므로 成員의 性格을 特徵지우는 딴 變量 X 의 實現値(例컨데 入學試驗成績)가 x 의 어떤 一定한 領域 R(이것을 選

別領域)에 속하는 것을 봄으로써 이에 對應하는 成員을 選別하는 集團의 一員으로 한다. 即 選別領域 R에 속하는 x에 對應하는 成員의 集合이 選別되는 部分集合이 되는 것이다. 또 이와 같은 集團의 選別은 一定한 基準에 의하여 이루어진다. 一定한 制約條件下에서 어떤 目的函數의 最大値 또는 最小値를 갖는 集團의 選別을 最適選別(optimum selection)이라 한다. 大表的인 基準은 Cochran[1]의 基準과 Raj[2]의 基準을 들 수가 있다.

지금 X, Y의 同時確率密度를 $f(x, y, \theta)$로 表示한다. 여기서 θ는 未知의 Parameter를 나타낸다. X의 確率密度 g는 既知라 하고 x가 주어졌을 때의 Y의 回歸函數, 條件附分散을 各各 $\eta(x, \theta)$, $v(x, \theta)$, $\mathbb{R}$을 實數空間이라 한다. 이 때 選別되는 集團을 (x, y)平面위에 表示하면 選別領域 R에 對해서 二次元의 直積集合 $R\times\mathbb{R}=\{(x, y): x\epsilon R, y\epsilon\mathbb{R}\}$을 定義한다. 지금

$$\iint_{R\times\mathbb{R}} f(x, y, \theta)dxdy=\alpha$$

로 두면 選別後의 母集團의 密度는 $\phi_R f(x, y, \theta)/\alpha$에 의하여 表示된다. 단 ϕ_R은 R의 定義函數이다. 그리하여 選別領域 R에 對應하는 定義函數 ϕ_R이 一般化되고 各 x에 관해서 $0\leqq\phi(x)\leqq1$인 x의 函數를 選別(selection)이라 한다.

Cochran의 基準은 α를 $0<\alpha<1$인 주어진 定數라 하고

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\phi(x)f(x, y, \theta)/\alpha]dxdy=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)g(x)dx=1 \tag{1-1}$$

인 條件下에서 ϕ의 目的函數

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y[\phi(x)f(x, y, \theta)/\alpha]dxdy=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(x, \theta)\phi(x)g(x)dx \tag{1-2}$$

의 最大化(maximization)을 생각한다. 即 容量을 一定値 α에 制限하고 選別後의 母集團(그 密度는 $\phi(x)f(x, y, \theta)/\alpha$)의 平均値를 最大로 하는 最適選別 ϕ_θ^*를 求하는 것이 要求된다.

다음에 Raj의 選別基準은 $\alpha_1, \alpha_2 (0<\alpha_1<1)$을 주어진 定數라 하고

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)g(x)dx=\alpha_1 \tag{1-3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y[\phi(x)f(x, y, \theta)/\alpha_1]dxdy=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(x, \theta)\phi(x)g(x)dx=\alpha_2 \tag{1-4}$$

되는 制限條件下에서 ϕ의 目的函數

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\alpha_2)^2[\phi(x)f(x, y, \theta)/\alpha_1]dxdy$$

$$=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}[v(x, \theta)+(\eta(x, \theta)-\alpha_2)^2]\phi(x)g(x)dx \tag{1-5}$$

의 最小化(minimization)를 생각하는 것이다. 이 基準의 뜻은 容量, 選別後의 母集團의 平均을 各各 一定値 α_1, α_2로 制限하고 選別後의 母集團의 分散을 最小로 하는 最適選別 ϕ_θ^*를 要求하는 것이다. 即 容量이 一定하고 一定의 平均値 둘레에 密集하는 集團을 選別하는 것이다. 이들 最適選別 ϕ_θ^*는 Parameter θ에 의존한다.

2. Raj의 基準에 있어서의 最適選別

函數 g 와 函數族 $\{f(x,y,\theta):\theta\epsilon\Theta\}$를 具體化한다. $\bar{f}$를 x가 주어졌을 때 Y의 條件附確率密度라 하고 다음과 같은 密度를 가지는 正規分布의 函數族을 생각한다.

$$\bar{f}(x,y,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\theta_0-\theta_1 x)^2\right] \quad (\sigma^2 \text{ 은 旣知}) \tag{2-1}$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \tag{2-2}$$

으로 둔다. 이 때 Raj의 基準은 앞에서 이야기 한것과 같이 $\eta(x,\theta)=\theta_0+\theta_1 x$, $v(x,\theta)=\sigma^2$이므로 모든 $\theta\epsilon\Theta$에 관하여

$$\tau_1(\theta,\phi)=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)g(x)d(x)dx=1 \tag{2-3}$$

$$\tau_2(\theta,\phi)=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}(\theta_0+\theta_1 x)\phi(x)g(x)dx=\alpha_2 \tag{2-4}$$

인 制限條件下에서 ϕ의 目的函數

$$\tau_3(\theta,\phi)=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma^2+(\theta_0+\theta_1 x-\alpha_2)^2]\phi(x)g(x)dx \tag{2-5}$$

를 最小化하는 것이다.

$\theta=(\theta_0,\theta_1)$은 다음과 같은 空間 Θ의 點이라 한다.

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1>0\\&\theta_1>\frac{\alpha_1}{\phi(\Psi^{-1}(\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)\\&\theta_1>\frac{-\alpha_1}{\phi(\Psi^{-1}(1-\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)\end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

를 만족하는 θ의 集合을 Θ^+

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1<0\\&\theta_1<\frac{\alpha_1}{\phi(\Psi^{-1}(\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)\\&\theta_1<\frac{-\alpha_1}{\phi(\Psi^{-1}(1-\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)\end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

를 만족하는 θ의 集合을 Θ^-라 하고 $\Theta=\Theta^+\cup\Theta^-$로 둔다. ϕ,Ψ는 各各 標準正規分布의 密度函數 및 分布函數라 하고 Ψ^{-1}는 Ψ의 逆函數를 나타낸다.

【補助定理 1】 ϕ,Ψ를 各各 標準正規分布의 確率密度函數, 分布函數라 하고

$$\Psi(x_2)-\Psi(x_1)=\alpha \qquad (-\infty\leqq x_1<x_2\leqq\infty,\quad 0<\alpha<1) \tag{2-8}$$

인 條件下에서

$$v=\phi(x_2)-\phi(x_1) \qquad (-\infty\leqq x_1<x_2\leqq\infty) \tag{2-9}$$

는 單調減少函數이다.

【證 明】 $F(x_1, x_2) = \Psi(x_2) - \Psi(x_1) - \alpha = 0$ 으로 두면

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Psi(x_2)\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Psi(x_1) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial \Psi(x_1)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial \Psi(x_2)}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \Psi(x_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_1^2}{2}} = \phi(x_1)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \Psi(x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \phi(x_2)$$

$$\therefore \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\phi(x_1)}{\phi(x_2)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx_1} = \frac{d\phi(x_2)}{dx_2}\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{d\phi(x_1)}{dx_1} = -x_2\phi(x_2)\frac{\phi(x_1)}{\phi(x_2)} + x_1\phi(x_1)$$

$$= -(x_2 - x_1)\phi(x_1) < 0 \quad (x_2 > x_1)$$

이므로 $y = \phi(x_2) - \phi(x_1)$은 $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$에서 單調減少函數이다.

다음에 아래의 假定을 두어 補助定理 2를 紹介한다.

確率分布族 $P = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$는 可測인 σ-algebra 族 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 위의 確率分布族이며 $\mathcal{A}$ 위의 周邊分布 P^x는 θ에 無關하며 $X \times Y$는 標本空間이다.

(A 1) σ-algebra $\mathcal{A}$는 可算個의 生成元을 갖는다.

(A 2) $\theta \in \Theta$인 모든 θ와 x가 주어졌을 때 $\mathcal{B}$에서 正則인 條件附確率 $P_\theta^{y|x}$가 存在하고, 領域 $X \times Y$에서 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-可測이고, 實數値函數인 f가

$$\int_{x \times y} f(x, y) P_\theta(d(x, y)) = \int_x \int_y f(x, y) P_\theta^{y|x}(dy|x) P^x(dx)$$

를 만족한다.

(A 2)에 의하여 모든 $(x, \theta) \in X \times \Theta$에 關한

$$\bar{\psi}_i(x, \theta) = \int_y \phi_i(y, \theta) P_\theta^{y|x}(dy|x) \quad (i = 0, 1, \cdots, m)$$

으로 둔다. 그리고 이 때

$$\tau_i(\theta, \phi) = \int_x \bar{\psi}_i(x, \theta)\phi(x) P^x(dx) \quad (i = 0, 1, \cdots, m)$$

이다.

X를 定義域, $\mathcal{A}$-可測인 實數値函數 $\phi(0 \leq \phi(x) \leq 1)$를 생각하여 모든 ϕ의 集合을 Φ로 表示하고 이를 選別空間이라 한다. 그리고 $\Phi(C_\theta)$는 制限條件 C_θ를 만족하는 ϕ의 集合이다.

【補助定理 2】 假定 (A 1)과 (A 2)下에서 最適選別 ϕ_θ^*가 存在한다.

【證 明】 W_1을 領域 X에서 定義된 本質的으로 有界이고 可測인 實數値函數 P^x 全體의 實線型空間이라 한다. 이 때 (A 1)에서 P^x 位相 $T_1(W_1)$에 關해서 Φ는(結果的으로) W_1의 compact 볼록集合(convex set)이다.[6)]

θ를 Θ의 任意의 固定元이라 하면 (A 2)에 의하여 各 $\tau_i(\theta, \cdot)(i = 1, \cdots, m)$은 Φ에서 $\mathbb{R}$으로 가는

連續(線型)函數이다. 그리고 또 $\Phi(C_\theta)$는 $\tau_i(\theta,\cdot)\,(i=1,\cdots,m)$에 의한 閉集合 $\{a: a\epsilon\mathbb{R},\ a\leqq\alpha\}$의 逆寫像의 元의 共通部分이다. 그러므로 $\Phi(C_\theta)$는 compact이다. 따라서 $\tau_o(\theta,\cdot)$은 ϕ에 關해서 連續(그리고 線型)이고 하나의 元 $\phi_\theta{}^*\epsilon\Phi(C_\theta)$가 存在하여

$$\tau_o(\theta,\phi_\theta{}^*)=\inf\{\tau_o(\theta,\phi):\phi\epsilon\Phi(C_\theta)\}$$

가 成立한다.[5]

【定理 1】 制限條件 (2-3), (2-4)를 滿足하는(Parameter θ에 의존하는) 選別이 存在하기 위한 必要充分한 條件은 θ가 Θ에 속하는 것이다.

【證　明】 選別領域을 $R_\theta=\{x: x_1(\theta)\leqq x\leqq x_2(\theta),\ \theta\epsilon\Theta\}$이라 하면 條件 (2-3), (2-4)에서

$$\left.\begin{aligned}&\Psi(x_2(\theta))-\Psi(x_1(\theta))=\alpha_1\\&\theta_o+\theta_1[\psi(x_1,\theta)-\psi(x_2,\theta]/\alpha_1=\alpha_2\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}10)$$

를 滿足하여야 한다. 지금

$$E(X)=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}x\phi(x)g(x)dx=\frac{1}{\alpha_1}[\psi(x_1)-\psi(x_2)]\qquad(2\text{-}11)$$

로 두면

$$\theta_1=\frac{1}{E(X)}(\alpha_2-\theta_0)=\frac{-1}{E(X)}(\theta_0-\alpha_2)\qquad(2\text{-}12)$$

를 얻는다.

$R_\theta=\{x: x_1(\theta)\leqq x\leqq x_2(\theta),\theta\epsilon\Theta\}$의 x_1, x_2는 $\Psi(x_2)-\Psi(x_1)=\alpha_1$을 滿足하는 條件下에서 $-\infty=x_1<x\leqq x_2$인 區間에서 $x_1\leqq x<x_2=\infty$인 區間까지 變한다. 지금 區間 $R_\theta=\{x: -\infty=x_1<x\leqq x_2\}$에서는

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{x_2}xg(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_1}\Big[-e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_{-\infty}^{x_2}\\&=-\frac{1}{\alpha_1}\psi(x_2)=-\frac{1}{\alpha_1}\psi(\Psi^{-1}(\alpha_1))\end{aligned}\qquad(2\text{-}13)$$

이므로 이 값을 (2-12)에 代入하면 直線

$$\theta_1=\frac{\alpha_1}{\psi(\Psi^{-1}(\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)\qquad(2\text{-}14)$$

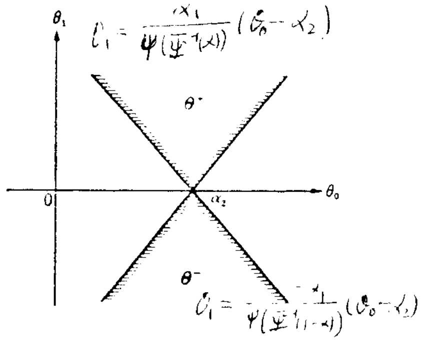
를 얻는다. 여기서 $R_\theta=\{x: -\infty\leqq x_1\leqq x\leqq x_2\}$의 x_1, x_2를 $\Psi(x_1)=\psi(x_2)$될 때까지 오른쪽으로 移動하는 경우를 생각하면 (2-11)식 $-E(\mathrm{x})=\frac{1}{\alpha_1}(\psi(x_2)-\psi(x_1))$은 陽의 값이고 單調히 減少한다. 그러므로 $-E(\mathrm{x})<\frac{1}{\alpha_1}\psi(\Psi^{-1}(\alpha_1))\,(\because(2\text{-}13))$이고 $0<\frac{\alpha_1}{\psi(\Psi^{-1}(\alpha_1))}<\frac{-1}{E(\mathrm{x})}$ 이다. 따라서 (2-12), (2-14)에서 $\theta_1>0$일 때는

$$\theta_1\Big(=\frac{-1}{E(\mathrm{x})}(\theta_0-\alpha_2)\Big)>\frac{\alpha_1}{\psi(\Psi^{-1}(\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)$$

이고 또 $\theta_1<0$일 때는

$$\theta_1\Big(=\frac{-1}{E(\mathrm{x})}(\theta_0-\alpha_2)\Big)<\frac{\alpha_1}{\psi(\Psi^{-1}(\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)$$

이다.



다음에 區間 $R_\theta=\{x: x_1 \leqq x \leqq x_2=\infty\}$에서 생각하자.

$$E(\mathrm{x})=\frac{1}{\alpha_1}\int_{x_1}^{\infty} xg(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_1}\Big[-e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{x_1}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha_1}\phi(x_1)=\frac{1}{\alpha_1}\phi[\Psi^{-1}(1-\alpha_1)] \tag{2-15}$$

이므로 直線

$$\theta_1=\frac{-\alpha_1}{\phi(\Psi(1-\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2) \tag{2-16}$$

를 얻는다.

여기서 $R_\theta=\{x: x_1 \leqq x \leqq x_2 \leqq \infty\}$에서 x_1, x_2가 $\phi(x_1)=\phi(x_2)$될 때까지 왼쪽으로 移動하는 경우를 생각하면 $-E(\mathrm{x})=\frac{1}{\alpha_1}(\phi(x_2)-\phi(x_1))<0$이고 $|\phi(x_2)-\phi(x_1)|$이 單調히 작아지므로 $\frac{-1}{E(\mathrm{x})}<\frac{-\alpha_1}{\phi(\Psi^{-1}(1-\alpha_1))}<0$이다. 따라서 (2-12), (2-16)에서 $\theta_1>0$이면

$$\theta_1\left(=\frac{-1}{E(\mathrm{x})}(\theta_0-\alpha_2)\right)>\frac{-\alpha_1}{\phi(\Psi^{-1}(1-\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)$$

이고 $\theta_1<0$이면

$$\theta_1\left(=\frac{-1}{E(\mathrm{x})}(\theta_0-\alpha_2)\right)<\frac{-\alpha_1}{\phi(\Psi^{-1}(1-\alpha_1))}(\theta_0-\alpha_2)$$

이다. 以上으로 式 (2-6), (2-7)을 얻고 選別이 存在하기 위한 必要充分한 條件은 θ가 Θ에 속하는 것이다.

【定理 2】 制限條件 (2-3), (2-4)를 滿足하고 目的函數 (2-5)를 最小로 하는 最適選別 ϕ_θ^*가 存在한다. 더욱이 (2-3), (2-4)를 滿足하는 選別 ϕ_θ가 最適이기 위한 必要充分條件은 Θ의 어떤 函數 h_1^*, h_2^*가 있어서 다음 式을 滿起하는 것이다.

$$\phi_\theta(x)=\begin{cases}1 & (x_1(\theta)<x<x_2(\theta)) \\ 0 & (x<x_1(\theta) \text{ 또는 } x_2(\theta)<x)\end{cases} \tag{2-17}$$

단 $x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$는 二次方程式

$$\zeta(x,\theta)\rightleftarrows\sigma^2+(\theta_0+\theta_1x-\alpha_2)^2-h_1^*(\theta)-h_2^*(\theta)(\theta_0+\theta_1x)=0 \tag{2-18}$$

의 二實根이고 h_1^*, h_2^*는 式 (2-10)

$$\left.\begin{aligned}&\Psi(x_2(\theta))-\Psi(x_1(\theta))=\alpha_1\\&\theta_0+\theta_1[\phi(x_1(\theta))-\phi(x_2(\theta))]/\alpha_1=\alpha_2\end{aligned}\right\}$$

를 滿足하는 값이다.

【證 明】 $\phi_\theta^*(x)$의 存在는 [補助定理 1] 위에서 [補助定理 2]에 의하여 明白하다. 그리고 式 (2-17)은 制限條件 (2-3), (2-4)에서

$$\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}[h_1^*(\theta)+h_2^*(\theta)(\theta_0+\theta_1x)-\{h_1^*(\theta)+h_2^*(\theta)\alpha_2\}]\phi(x)g(x)dx=0$$

이다. 그러므로

$$\tau_0(\theta,\phi)=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma^2+(\theta_0+\theta_1x-\alpha_0)^2]\phi(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma^2+(\theta_0+\theta_1x-\alpha_0)^2]\phi(x)g(x)dx$$

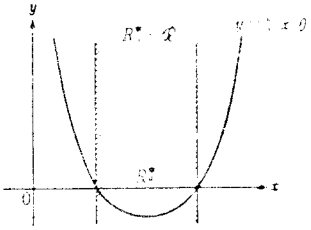
$$-\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}[h_1^*(\theta)+h_2^*(\theta)(\theta_0+\theta_1x)-\{h_1^*(\theta)+h_2^*(\theta)\alpha_2\}]\phi(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma^2+(\theta_0+\theta_1x-\alpha_0)^2-h_1^*(\theta)-h_2^*(\theta)(\theta_0+\theta_1x)$$

$$+\{h_1^*(\theta)+h_2^*(\theta)\alpha_2\}]\phi(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x,\theta)\phi(x)g(x)dx+h_1^*(\theta)+h_2^*(\theta)\alpha_2$$

이므로 $\zeta(x,\theta)=0$의 二實根 $x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$ 사이의 積分이



$\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x,\theta)\phi(x)g(x)dx$를 最小로 하고 따라서

$$\tau_0(\theta,\phi)=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x,\theta)\phi(x)g(x)dx+h_1^*(\theta)+h_2^*(\theta)\alpha_2$$

를 最小로 한다. 그러므로 ϕ_0는

$$\phi_0(x)=\begin{cases}1 & \zeta(x,\theta)<0\text{인 } x\\ 0 & \zeta(x,\theta)>0\text{인 } x\end{cases} \tag{2-19}$$

으로 두면 (2-17)을 얻는다. (2-19)

$$R^*_0=\{x\,|\,x_1(\theta)\leq x\leq x_2(\theta),\ \theta\in\Theta\} \tag{2-20}$$

으로 두면 R_0^*는 最適인 選別領域이 되고 R_0^*의 定義函數 ϕ_0^*는 最適選別이다.

參 考 文 獻

1. Cochran, W.G. (1951) Improvement by means of selection proc. Second Berkeley symp. Math. Statist. Prob., 449—470.
2. Raj, D. (1954) On optimum selections from multivariate populations. Sankhyā. Ser. A, 14, 363—366.
3. 宮澤光一(1971) 情報・決定理論序說, 岩波書店.
4. Noda, K. (1979) 部分母集團の選別に關するベイズ決定關數, 統計數理硏究所彙報, 第26卷第2號, pp. 125～132.
5. Noda, K. (1980). Optimal construction of a subpopulation. Ann. Inst. Math (Research Memo. 165. The Institute of Statistical Mathematics)
6. Lehmann, E.L. (1959) Testing statistical hypotheses, John Wiley and Sons. New York.