目 次

1. 序論

微分方程式의 解를 求할수 없을 境遇와 있다하여도 너무 複雜하여 実用價値가 없을때 有限要素法이나 境界要素法 等 数値解析의 正式化 過程에 加重 残餘法은 많이 利用된다. 그런데 이 解法은 加重函数를 어떻게 잡느냐에 따라 여러가지 方法이 있을수 있는데 어느 방법이나 項数를 無限히 增加시키면 正確한 解가 얻어진다. 그러나 項数가 많아지면 計算過程이 複雜할뿐 아니라 計算段階가 많아지므로 또 다른 誤差가 誘発될수 있다. 그러므로 되도록 적은 項数로 正確한 解에 빨리 收斂하는 解法을 찾는 것이 重要하다.

本研究에서는 加重 残餘法으로 모우멘트法, 点配列法, 副領域法, 갤러킨法의 4가지 解法에 대하여 이들을 各各 一次元 熱伝導 및 二次元 熱伝

導 問題에 適用시켜 近似解를 求하고 이들을 正確한 解와 比較하여 봄으로써 4가지 解法中 어느 解法이 誤差가 제일 작은지 알 수 있도록 하였다. 이들 方法을 比較하는데 있어서 項數와 座標函數를 모두 같게 取하여 比較의 公正을 기하였다. 또한 正確한 解와 各 解法에 의한 近似解를 電子計算機와 Plotter를 利用하여 計算結果를 그라프로 나타내어 判別이 쉽도록 하였다.

2. 加重殘餘法

주어진 領域(Domain) D 에서 풀어야 할 微分方程式이 다음과 같다고 한다.

$$\mathcal{L}(f) = p \qquad (1)$$

여기서 $\mathcal{L}$는 函數 f에 作用하는 線形 微分演算子(Linear differential operator)이다. 만약 $f = f_{ex}$ 가 式(1)의 正確한 解(Exact solution)이면

$$\mathcal{L}(f_{ex}) - p = 0 \qquad (2).$$

가 成立될 것이다 그러나 正確한 解가 있을 경우가 있다하여도 너무 複雜하여 實用的 價値가 없을 때에는 近似解를(Approximate Solution) 求하지 않을수 없게 된다. 만약 $f = f_{ap}$ 가 式(1)의 近似解이면 다음 式으로 表示되는 殘餘値가 있게 된다.

$$\varepsilon = \mathcal{L}(f_{ap}) - p \neq 0 \qquad (3)$$

이 殘餘値가 적을 수록 $f = f_{ap}$는 正確한 解에 가깝게 된다.

지금 式(1)의 近似解로서

$$f_{ap} = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3 + \cdots + a_n\phi_n \quad (4)$$

이라 하면 여기서 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ 는 앞으로 구할 係数들이고 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \cdots \phi_n$ 는 一次独立인 函数들로 이들 各各은 주어진 境界條件을 만족 한다고 한다. 이들 函数 $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \cdots \phi_n$ 을 座標函数 또는 試驗函数(Test function)이라 한다.

式(4)에서 項의 数 n가 크면 클수록 正確解에 가까와진다. 係数 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$를 求하는데 式(3)으로 表示되는 殘餘値가 加重函数(Weighting function) W_i 와의 内積(Inner product)이 0이 되도록 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$을 定한다.

$$\int_D \varepsilon W_i \, dD = 0, \qquad (5)$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots n$$

式(5)에서 n개의 式이 나오므로 이들을 聯立하여 풀면 n개의 係数 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$을 구할수 있는데 이때 加重函数 W_i를 어떻게 잡느냐에 따라 모멘트 法(Moment method), 点配列法(Point Collocation method), 副領域配列法(Subdomain collocation method), 갤러킨 法(~~Galerkin~~ method) 等이 있다.

2-2. 点配列法 (Point collocation method).

n개의 주어진 点에서 式(3)의 残餘値가 0이 되도록 式(4)의 係数 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$을 定한다. 주어진 各点의 座標를 式(4)에 代入하고 이들을 다시 式(3)에 代入하여 0으로 놓으면, 주어진 点의 数가 n개 이므로 n개의 式이 나오고 이들을 聯하여 풀면 n個의 係数를 구할수 있다.

따라서 点配列法에서는 加重函数 W_i를 Dirac의 델타 函数(Delt function)이라 할수 있다.

그러므로 一次元 問題의 境遇

$$W_i = \Delta(x_i) \qquad (8)$$

이 되고 二次元 問題의 境遇

$$W_i = \Delta(x_i, y_i) \qquad (9)$$

가 된다.

2-3. 副領域 配列法 (Subdomain Collocation method).

주어진 領域 D를 n 分하여 (等分이 아니라도 된다) 各領域을 $D_1, D_2, D_3 \cdots D_n$ 이라 하자 그러면 各副領域에서 殘餘値의 積分이 0이 되도록 係数 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$을 定한다.

$$\int_{D_i} \varepsilon \, dD_i = 0 \qquad (10)$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots n$$

式(10)에서 n개의 式이 나오므로 이들을 聯立하여 풀면 n 個의 係数는 구할수 있다.

副領域配列法에서는 加重函数 ω_i가 다음과 같다고 할수 있다.

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & (\text{副領域 } D_i \text{ 内와 그의 境界에서}) \\ 0 & (\text{副領域 } D_i \text{ 外에서}) \end{cases} \qquad (11)$$

2-4 갈러킨 法 (Galerkin 法).

갈러킨 法에서는 加重函数 ω_i를 座標函数 ϕ_i로 잡는다.

$$\psi_i = \phi_i \qquad (12)$$

따라서 式(4)를 式(3)에 代入하고 이를 式(12)와 함께 式(5)에 代入하여 整理하면

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_D \mathcal{L}(\phi_k)\, \phi_i \, dD = \int_D P \phi_i \, dD \qquad (13)$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ n.$$

式(13)에서 n個의 方程式이 나오므로 이들을 聯立해서 풀면 n個의 係數 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$을 구할수 있다.

갤러킨 法은 座標函數들이 直交函數系 (Orthogonal set of functions)이면 대단히 편리하다. 왜냐하면 이 境遇에서는 聯立方程式을 풀지 않아도 係數 a_i가 다음과 같이 求하여 진다.

$\phi_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots n)$가 直交函數系이므로

$$\int_D \mathcal{L}(\phi_k)\, \phi_i \, dD = \begin{cases} 0 & (k \neq i) \\ 1 & (k = i) \end{cases} \qquad (14)$$

가 되고 따라서 式(13)은 다음과 같이 된다.

$$a_i = \int_D P \phi_i \, dD \qquad (15)$$

3. 一次元 熱伝導 問題

前節에서 說明한 加重殘餘法들이 어떻게 計算이 되고 또한 그들의 精度(Precision)를 比較하기 위하여 Fig 1.에 보이는 바와 같이 斷面積 A, 길이 L인 막대의 兩端을 溫度 T = 0°C로 유지시키며 單位 길이 當, 單位 時間當 q cal/mm/sec 의 入熱量이 있을때를 考察하여 보자.

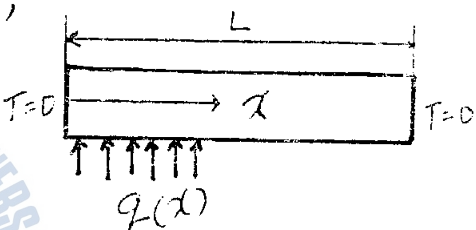

Fig 1 One-dimensional heat conduction

막대의 表面으로 부터 복사와 대류에 의하여 損失되는 熱量은 무視하고 熱伝導 方程式을 세우면

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{A\lambda} = \frac{\gamma c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (16)$$

과 같다. 여기서 T는 溫度(°C)이며 γ, c, λ는 各各 材料의 比重量과 比熱,

熱傳導 係數이고, x 및 t는 거리 및 時間을 나타내는 座標系이다.

定常狀態인 경우에는 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ 이므로 熱전도 方程式은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{A\lambda} = 0 \qquad (17)$$

境界條件은 $x=0$ 일때 $T=0$, $x=L$ 일때 $T=0$ 이다. 거리를 無次元化 하기 위하여 $\frac{x}{L} = X$, $\frac{T}{L^2} = \theta$, $\frac{q}{A\lambda} = Q$라 놓고 式(17)을 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} + Q = 0 \qquad (18)$$

境界條件은 $X=0$ 일때 $\theta=0$, $X=1$ 일때 $\theta=0$ 이다.

入熱量을 나타내는 Q의 分布가 Fig 2와 같이 一定길이 α $(0 \leq \alpha < 1)$ 까지만 一定하면 加熱하는 경우에

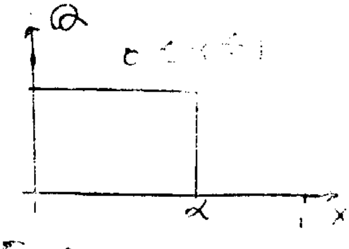

Fig 2. Distribution of Q

Q는 單位階段函數 (Unit step function) U를

使用하여 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$Q = U(X) - U(X-\alpha) \quad (19)$$

이것을 式 (18)에 代入하여 2번 積分하고 주어진 境界條件을 利用하면 正確한 解는 구할수 있으며 그 式은 다음과 같다.

$$\theta = -\frac{X^2}{2}U(X) + \frac{(X-\alpha)^2}{2}U(X-\alpha) + \alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)X \quad (20)$$

이 問題는 各 加重殘餘法으로 풀어서 比較해 보기 위하여 우선 座標函數는 다음과 같이 定한다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= X(X-1) \\ \phi_2 &= X^2(X-1) \\ \phi_3 &= X^3(X-1) \end{aligned} \quad (21)$$

이들은 各各 주어진 境界條件을 만족하므로 本問題에 適合한 座標函數가 된다.

우선 $n=2$ 일때 各方法에 의한 近似解를 求하여 보자 이 近似解를 θ_2라 하면

本問題의 殘餘値는 式 (18)로 부터 다음과 같이 되고

$$\varepsilon = \frac{d^2\theta_2}{dX^2} + Q \qquad (22)$$

θ_2는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\theta_2 &= a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \\ &= a_1X(X-1) + a_2X^2(X-1)\end{aligned} \qquad (23)$$

이를 式 (22)에 代入하여 殘餘値 ε를 구하면

$$\varepsilon = 6a_2X + 2(a_1 - a_2) + Q \qquad (24)$$

가 된다.

3-1. 모멘트 法

모우멘트 法에 의한 解法은 다음과 같다.

$$\int_0^1 \varepsilon X^0 dX = \int_0^1 \{6a_2X + 2(a_1 - a_2) + Q\} X^0 dX = 0$$

$$\int_0^1 \varepsilon X\, dX = \int_0^1 \{6a_2X + 2(a_1 - a_2) + Q\} X\, dX = 0 \qquad (25)$$

이 (25)式을 聯立하여 풀면 係數 a_1, a_2를 구 할수 있다.

$$a_1 = \alpha\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$
$$a_2 = \alpha(1 - \alpha) \qquad (26)$$

따라서 모우멘트 法에 의한 2次 近似式은 다음과 같다.

$$\theta_2 = \alpha\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)X(X-1) + \alpha(1-\alpha)X^2(X-1) \qquad (27)$$

3-2 選點法

2點 $X = \frac{1}{3}$, $X = \frac{2}{3}$에서 式(24)의 ε이 0이 되도록 a_1, a_2를 定한다.

$$(\varepsilon)_{X=\frac{1}{3}} = 2a_2 + 2(a_1 - a_2) + Q_{\frac{1}{3}} = 0$$
$$(\varepsilon)_{X=\frac{2}{3}} = 4a_2 + 2(a_1 - a_2) + Q_{\frac{2}{3}} = 0 \qquad (28)$$

여기서 $Q_{\frac{1}{3}}$과 $Q_{\frac{2}{3}}$는 各各 $X = \frac{1}{3}$, $X = \frac{2}{3}$에서의 Q 값을 말한다 이 2式을 聯立하여 풀면 a_1 a_2를 구하고 이들을 式(23)에 代入하면

다음과 같이 된다.

$$\theta_2 = -\frac{1}{2} Q_{\frac{1}{3}} X(X-1) + \frac{1}{2}\left(Q_{\frac{1}{3}} - Q_{\frac{2}{3}}\right) X^2 (X-1) \qquad (29)$$

3-3. 副領域配列法

주어진 領域을 2等分하고 各副領域에서 殘餘値 ε의 積分이 0이 되도록 a_1, a_2를 定한다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon \, dX = \int_0^{\frac{1}{2}} \{6a_2 X + 2(a_1 - a_2) + Q\} dX = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \varepsilon \, dX = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \{6a_2 X + 2(a_1 - a_2) + Q\} dX = 0 \qquad (30)$$

이 2式을 聯立해서 풀면 a_1, a_2가 구하여 지고 이들을 式(23)에 代入하면 된다.

$$\theta_2 = \left\{-\frac{1}{6}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) U\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{6} \mathrm{Min}\left(\frac{1}{2}, \alpha\right)\right\} X(X-1)$$
$$+ \frac{2}{3}\left\{\mathrm{Min}\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) U\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right\} X^2 (X-1) \qquad (31)$$

여기서 $\mathrm{Min}(\frac{1}{2}, \alpha)$는 $\frac{1}{2}$과 α의 2數中에서 작은 것을 取한다는 뜻이다.

3-4. 갤러킨 法

갤러킨 法에서는 加重函数와 座標函数가 같으므로 다음 2式을 聯立하여 풀면 a_1, a_2가 구하여 진다.

$$\int_0^1 \varepsilon \phi_1 \, dX = \int_0^1 \{6a_2 X + 2(a_1 - a_2) + Q\} X(X-1)\, dX = 0 \qquad (32)$$

$$\int_0^1 \varepsilon \phi_2 \, dX = \int_0^1 \{6a_2 X + 2(a_1 - a_2) + Q\} X^2(X-1)\, dX = 0$$

따라서 近似解 θ_2는 다음과 같이 된다.

$$\theta_2 = \alpha^2\left(-\frac{5}{2}\alpha^2 + 6\alpha - 4\right)X(X-1) + \alpha^2(5\alpha^2 - 10\alpha + 5)X^2(X-1) \qquad (33)$$

以上은 $n=2$ 일때의 近似解는 各方法에 의하여 구하였는데 $n=3$ 일때의 近似解 θ_3도 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

1) 모우멘트 法.

$$\theta_3 = \alpha\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)X(X-1) + (5\alpha^3 - 8.5\alpha^2 + 3.5\alpha)X^2(X-1) - (5\alpha^3 - 7.5\alpha^2 + 2.5\alpha)X^3(X-1) \qquad (34)$$

2) 點配列法

$$Q_3 = \left(\frac{1}{6}Q_{\frac{2}{4}} - \frac{1}{6}Q_{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}Q_{\frac{1}{4}}\right)X(X-1)$$
$$+\left(\frac{1}{3}Q_{\frac{3}{4}} + Q_{\frac{1}{4}} - \frac{4}{3}Q_{\frac{2}{4}}\right)X^2(X-1)$$
$$+\left(\frac{4}{3}Q_{\frac{2}{4}} - \frac{2}{3}Q_{\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}Q_{\frac{1}{4}}\right)X^3(X-1) \qquad (35)$$

여기서 $Q_{\frac{1}{4}}$, $Q_{\frac{2}{4}}$, $Q_{\frac{3}{4}}$은 各各 $X=\frac{1}{4}$, $X=\frac{2}{4}$, $X=\frac{3}{4}$ 에서의 Q 값들이다.

3) 副領域 配列法.

$$Q_3 = \left(-\frac{2}{8}P_1 - \frac{4}{8}P_2 - \frac{1}{8}P_3\right)X(X-1)$$
$$+\left(\frac{15}{8}P_1 + \frac{3}{8}P_3 - \frac{9}{4}P_2\right)X^2(X-1)$$
$$+\left(\frac{18}{8}P_2 - \frac{9}{8}P_1 - \frac{9}{8}P_3\right)X^3(X-1) \qquad (36)$$

단, $P_1 = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{3}, \alpha\right)$, $P_2 = \mathrm{Min}\left\{\frac{1}{3}, \left(\alpha-\frac{1}{3}\right)U\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\right\}$

$P_3 = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)U\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)$

4) 갤러킨 法.

$$Q_3 = \alpha^2(7\alpha^3 - 20\alpha^2 + 20\alpha - 7.5)X(X-1)$$
$$+\alpha^2(-35\alpha^3 + 82.5\alpha^2 - 80\alpha + 22.5)X^2(X-1)$$
$$+\alpha^2(35\alpha^3 - 87.5\alpha^2 + 70\alpha - 17.5)X^3(X-1)$$

(37)

4. 二次元 熱伝導 問題

Fig 3 에 보인 바와 같이 가로의 길이가 L_1, 세로의 길이가 L_2, 두께가 δ인 直四角形 平板의 境界 溫度를 $T=0$°C로 유지하고 單位面積當, 單位時間當 q cal/mm²/sec의 入熱量으로 加熱할때, 表面에서 대류와 복사로 損失되는 熱量을 無視하고 熱전도 方程式을 세우면 다음과 같다.

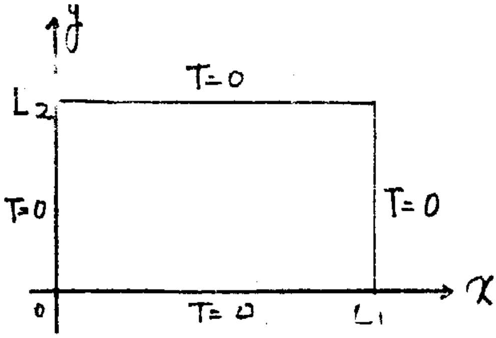

Fig 3. Two-dimensional heat conduction

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q}{\lambda\delta}=\frac{\gamma c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (34)$$

定常 狀態의 熱伝導인 境遇에는 $\frac{\partial T}{\partial t}=0$ 되고 또한 無次元化하기 위하여 $\frac{x}{L_1}=X$, $\frac{y}{L_1}=Y$, $\frac{T}{L_1^2}=\theta$, $\frac{q}{\lambda\delta}=Q$ 라 놓으면 式(34)은

다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} + Q = 0 \qquad (3p)$$

境界 條件은 $X=0$, $X=1$, $Y=0$, $Y=\frac{L_2}{L_1}$ 에서 $\theta=0$ 이다.

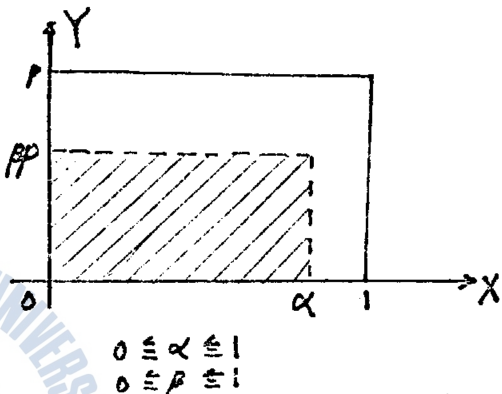

Fig 4. Distribution of Q

지금 入熱量을 나타내는 量Q가 Fig 4에 보이는 바와 같이 빗금친 부분에서는 $Q=1$로 一定하고 그 外에서는 $Q=0$인 境遇를 생각하자 (여기서 p는 $\frac{L_2}{L_1}$ 이다).

즉 $0 \leqq X \leqq \alpha$, $0 \leqq Y \leqq \beta p$ 인 部分만 一定 入熱量으로 加熱하는 問題를 考察하여 보자.

이 問題의 正確한 解는 正弦函數의 直交性을 利用함으로써 쉽게 求하여 진다.

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl} \sin k\pi X \sin \frac{l\pi}{p} Y \qquad (40)$$

단. $$\alpha_{kl} = \frac{4p(1-\cos k\pi\alpha)(1-\cos l\pi\beta)}{\pi^4 kl(k^2 + l^2/p^2)}$$

이 問題를 加重殘餘法으로 풀기 위하여 座標函數는 다음과 같이 定한다.

$$\phi_1 = X(X-1)Y(Y-p)$$
$$\phi_2 = X^2(X-1)Y^2(Y-p) \qquad (41)$$

이들은 各各 주어진 境界條件을 만족 하므로 本問題에 適合한 座標函數가 된다.

$n=2$ 일때의 近似解를 θ_2라 하면 殘餘值는 式(39)로 부터

$$\varepsilon = \frac{\partial^2\theta_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial Y^2} + Q \qquad (42)$$

가 되고 θ_2는 다음과 같이 된다.

$$\theta_2 = a_1\phi_1 + a_2\phi_2$$
$$= a_1 X(X-1)Y(Y-p) + a_2 X^2(X-1)Y^2(Y-p) \qquad (43)$$

이를 式(42)에 代入하여 殘餘値를 구하면

$$\varepsilon = 2a_1(X^2 - X + Y^2 - Yp) + 2a_2\{(3X-1)(Y^3 - Y^2p) + (X^3 - X^2)(3Y - p)\} + Q \qquad (44)$$

가 된다. 各方法에 의하여 係數 $a_1 a_2$를 구하고

이를 式(43)에 代入하면 된다.

4-1. 모우멘트法.

$$\int_0^p\int_0^1 \varepsilon\, dX\, dY = \int_0^p\int_0^1 [2a_1(X^2 - X + Y^2 - Yp) + 2a_2\{(3X-1)(Y^3 - Y^2p) + (X^3 - X^2)(3Y - p)\} + Q]\, dX\, dY = 0$$

$$\int_0^p\int_0^1 \varepsilon XY\, dX\, dY = \int_0^p\int_0^1 [2a_1(X^3Y - X^2Y + XY^3) + 2a_2\{(3X^2 - X)(Y^4 - Y^3p) + (X^4 - X^3)(3Y^2 - Yp)\} + QXY]\, dX\, dY = 0 \qquad (45)$$

이 두式을 聯立하여 풀면 a_1, a_2를 구할수 있다.

$$a_1 = \frac{\alpha\beta(36 - 15\alpha\beta)}{9(1+p^2)}, \quad a_2 = \frac{60\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}{9p(1+p^2)} \qquad (46)$$

4-2 点配列法

2 点 $(\frac{1}{3}, \frac{p}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{2p}{3})$ 에서 式 (44)로 表示되는 殘餘値 ε이 0이 된다는 것을 利用하면 2個의 式이 나오게 되고 이들을 聯立하여 풀면 a_1, a_2가 구하여 진다.

$$a_1 = \frac{9Q_1}{4(1+p^2)}, \quad a_2 = \frac{27(Q_2 - Q_1)}{8p(1+p^2)} \qquad (42)$$

여기서 Q_1, Q_2는 各各 点$(\frac{1}{3}, \frac{p}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{2p}{3})$에서의 Q 값이다.

4-3. 副領域 配列法.

주어진 領域을 Fig 5에 보인 바와 같이 2個의 副領域으로 나뉘 各 領域에서 式(44)로 表示되는 殘餘値의 積分이 0이 되도록 하면

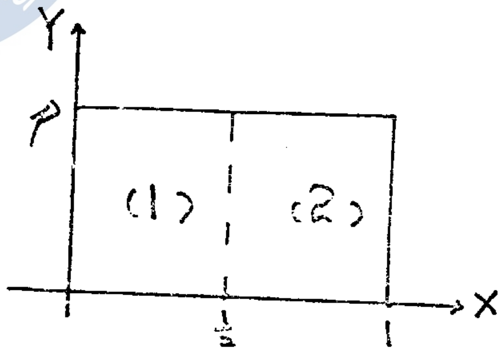

Fig 5. Subdomain

2個의 式이 나온다.

$$\int_0^p\int_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon\, dx\, dY = 0, \quad \int_0^p\int_{\frac{1}{2}}^1 \varepsilon\, dx\, dY = 0 \qquad (48)$$

式(44)를 위式에 代入하고 2個의 式을 聯立하여 풀면 a_1, a_2 가 구해진다.

$$a_1 = \frac{P_1(11+20p^3) - P_2(5-4p^3)}{(1+p^2)(1+4p^3)}$$

$$a_2 = \frac{32(P_2 - P_1)}{(1+4p^3)} \qquad (49)$$

단, $P_1 = \beta\, \mathrm{Min}(\frac{1}{2}, \alpha)$, $P_2 = \beta(\alpha - \frac{1}{2})u(\alpha - \frac{1}{2})$

4-4. 갤러킨 法

$$\int_0^p\int_0^1 \varepsilon \phi_1\, dx\, dY = 0, \quad \int_0^p\int_0^1 \varepsilon \phi_2\, dx\, dY = 0 \qquad (50)$$

式(41)과 式(44)를 위式에 代入하고 이 2式을 聯立하여 풀면 된다.

$$a_1 = \frac{160\alpha^2\beta^2(2\alpha-3)(2\beta-3) - 87.5\alpha^3\beta^3(3\alpha-4)(3\beta-4)}{2p(1+p^2)}$$

$$a_2 = \frac{350\alpha^3\beta^3(3\alpha-4)(3\beta-4) - 350\alpha^2\beta^2(2\alpha-3)(2\beta-3)}{2p(1+p^2)} \qquad (51)$$

6. 各解法의 比較 및 考察

一次元 熱伝導 問題와 二次元 熱伝導 問題의 正確한 各解法에 의한 近似解들 比較해 보기 위하여 구체적인 例를 들어 그의 解를 提示하고자 한다

Fig6은 一次元 熱伝導 問題에서 $\alpha = 0.35$일때 즉 全길이의 35%만을 一定入熱量으로 加熱할때 温度分布曲線의 正確한 解와 各解法에 의한 近似解 θ_2 $(n=2)$를 나타낸다

그림에서 보는 바와 같이 갤러킨 法에 의한 解가 全区間에 걸쳐서 正確한 解에 가깝고 그 다음이 副領域法 및 모우멘트 法으로 이 두 解法은 거의 겹치고 있음을 볼수 있다

点配列法이 가장 誤差가 큼을 알 수 있고 갤러킨 法을 除外한 解法들에 의한 近似解들은 全区間에 걸쳐서 正確한 解보다 높게 計算되고 있음을 알 수 있다

Fig 7은 $\alpha=65$일때 즉 全길이의 65%를 一定入熱量으로 加熱할 때 温度分布의 正確한 解와 各解法에 의한 近似解 θ_2 $(n=2)$를 나타낸 것이다. 여기서도 갤러킨法에 의한 近似解가 全区間에 걸쳐서 가장 잘 맞고 다른 解法들에 의한 近似解는 Fig 6의 境遇와는 反対로 正確한 解보다 크게 計算되고 있다 또한 副領域法에 의한 解와 모우멘트法에 의한 解는 여기서도 거의 겹치고 選點列法에 의한 解가 가장 誤差가 크다 Fig 8과 Fig 9는 各各 $\alpha=0.35$일때와 $\alpha=0.65$일때 正確한 解와 $n=3$일때의 加重殘餘法에 의한 近似解 θ_3를 나타낸다. 4가지 解法 다 共히, $n=2$일 때의 近似解 θ_2 (Fig 6, Fig 7)에 比하여 誤差가 훨씬 줄어 들어 있음을 알 수 있고 여기서도 갤러킨法에 의한 近似解가 가장 誤差가 작고 그 다음이 모우멘트法, 副領域法, 選點列法 順이다

Fig 10 에 보이는 바와 같이 正四角形(P=1) 平板을 빗금친 部分 ($\alpha=0.35$, $\beta=0.85$)만 一定入熱量으로 加熱할 때 Y=0.5 되는 線上의 溫度分布 曲線을 Fig 11에 나타낸다

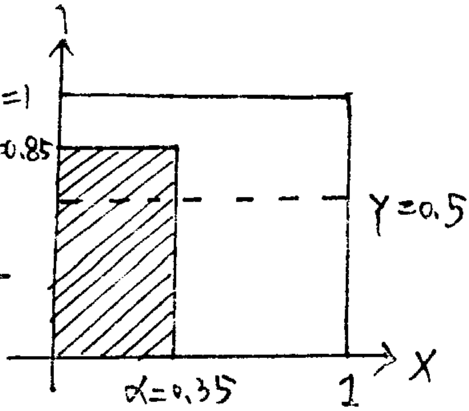

Fig 10 A example of two-dimensional heat conduction

여기서 各 解法에 의한 近似解들은 2 項까지만 取한 解 즉 n=2일때의 解이다 그림에서 보는 바와 같이 여기서도 갤러킨 法에 의한 解가 全体的으로 가장 誤差가 작고 그 다음이 모우멘트法, 副領域法, 点配列法의 順이다.

Fig 12 에 보이는 바와 같이 正四角形(P=1) 平板을 빗금친 部分($\alpha=0.85$, $\beta=0.35$)만을 一定入熱量으로 加熱할 때 Y=0.5 되는 線上의 溫度分布 曲線을 Fig 13에 보인다

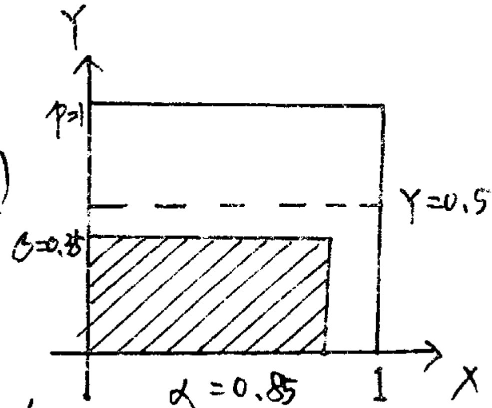

Fig 12 A example of two-dimensional heat conduction

여기서도 各解法에 의한 近似解는 $n=2$일때의 解이다. 갤러킨法이 全般的으로 가장 잘 맞는다는 것을 알 수 있고 近似解들은 正確한 解보다 높게 計算이 되는 것도 알 수 있다.

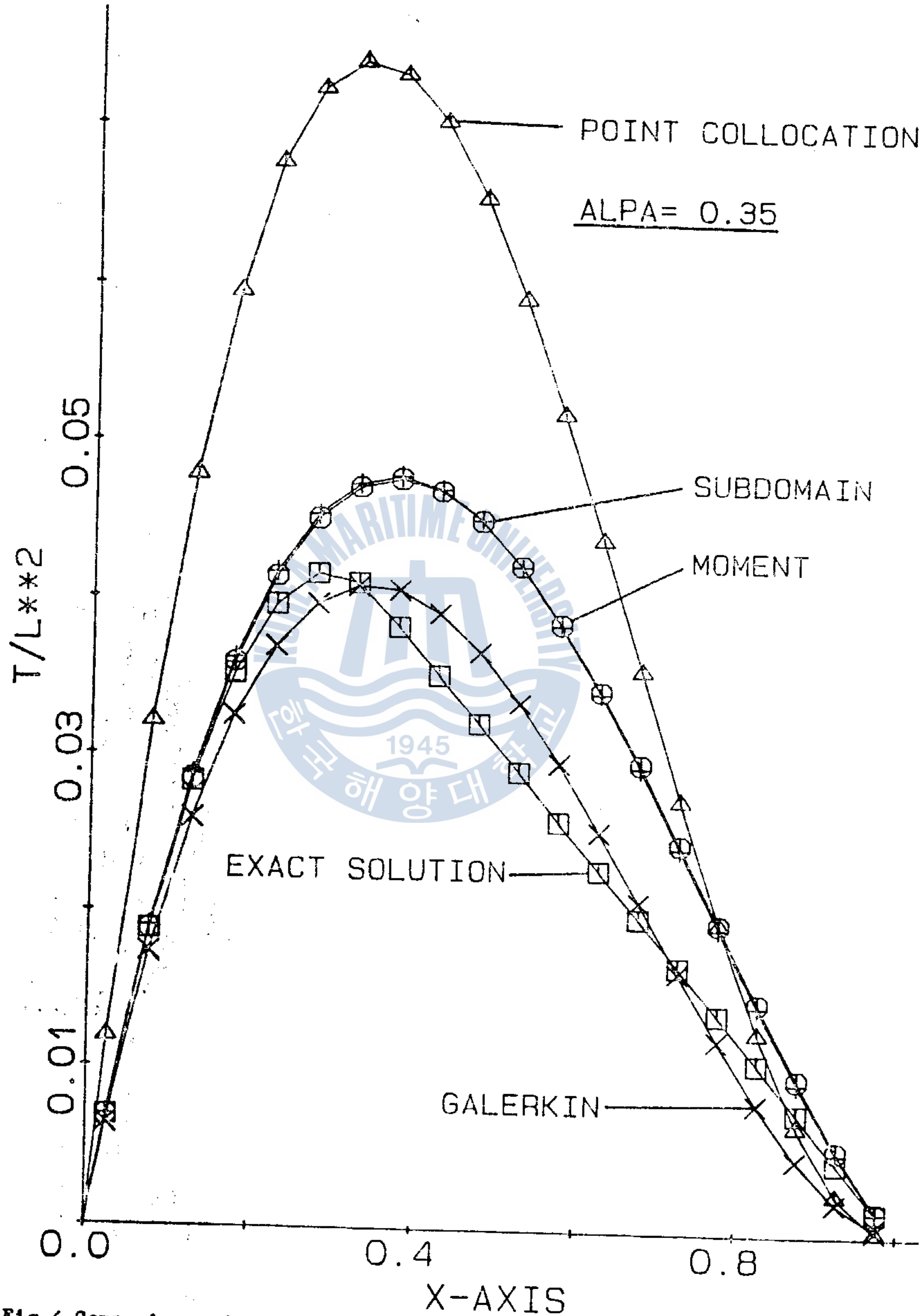

Fig.6 Comparison of the solutions for one-dimensional heat conduction problem (α=0.35, n=2)

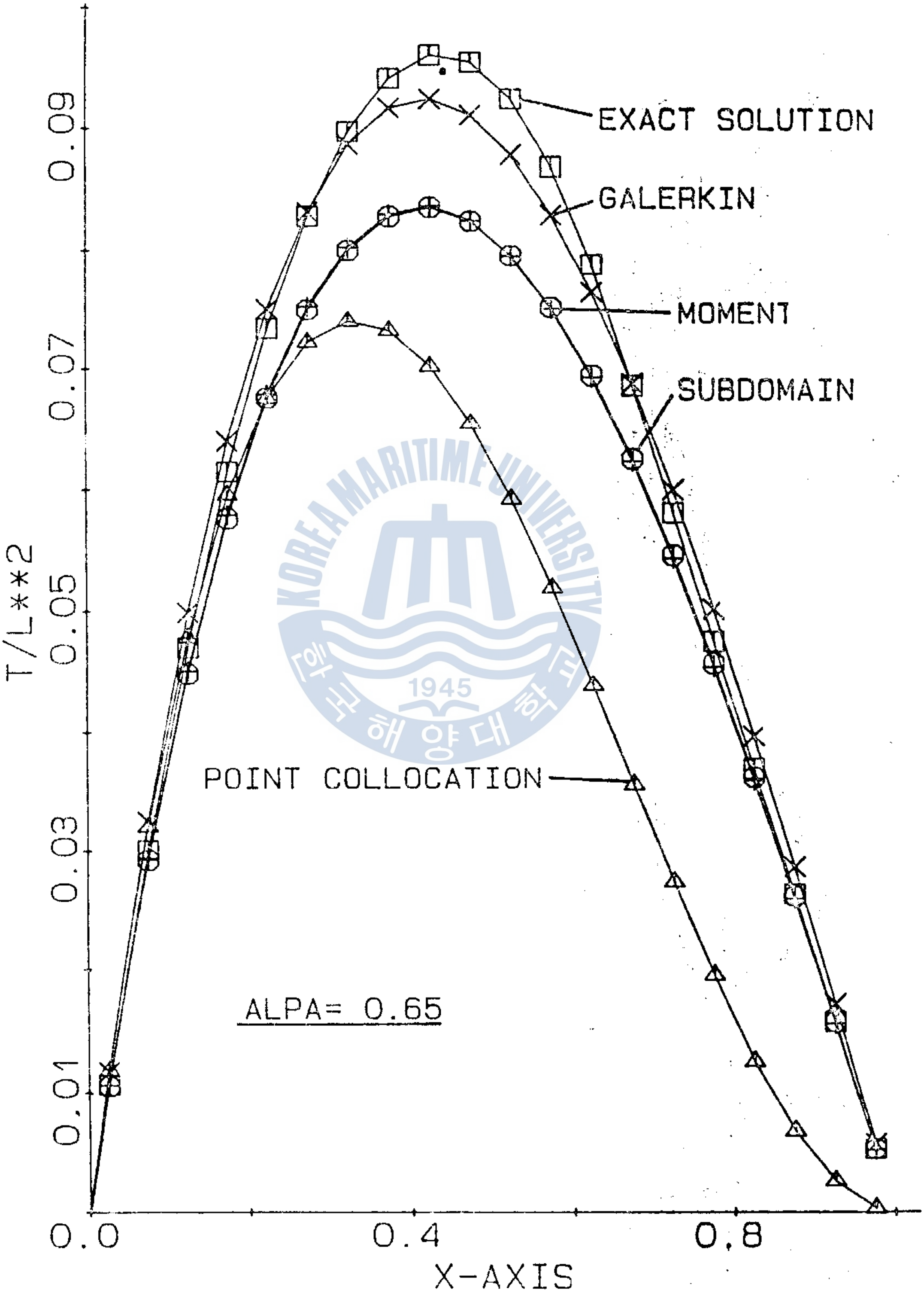

Fig.7 Comparison of the solutions for one-dimensional heat conduction problem (α=0.65 , n=2)

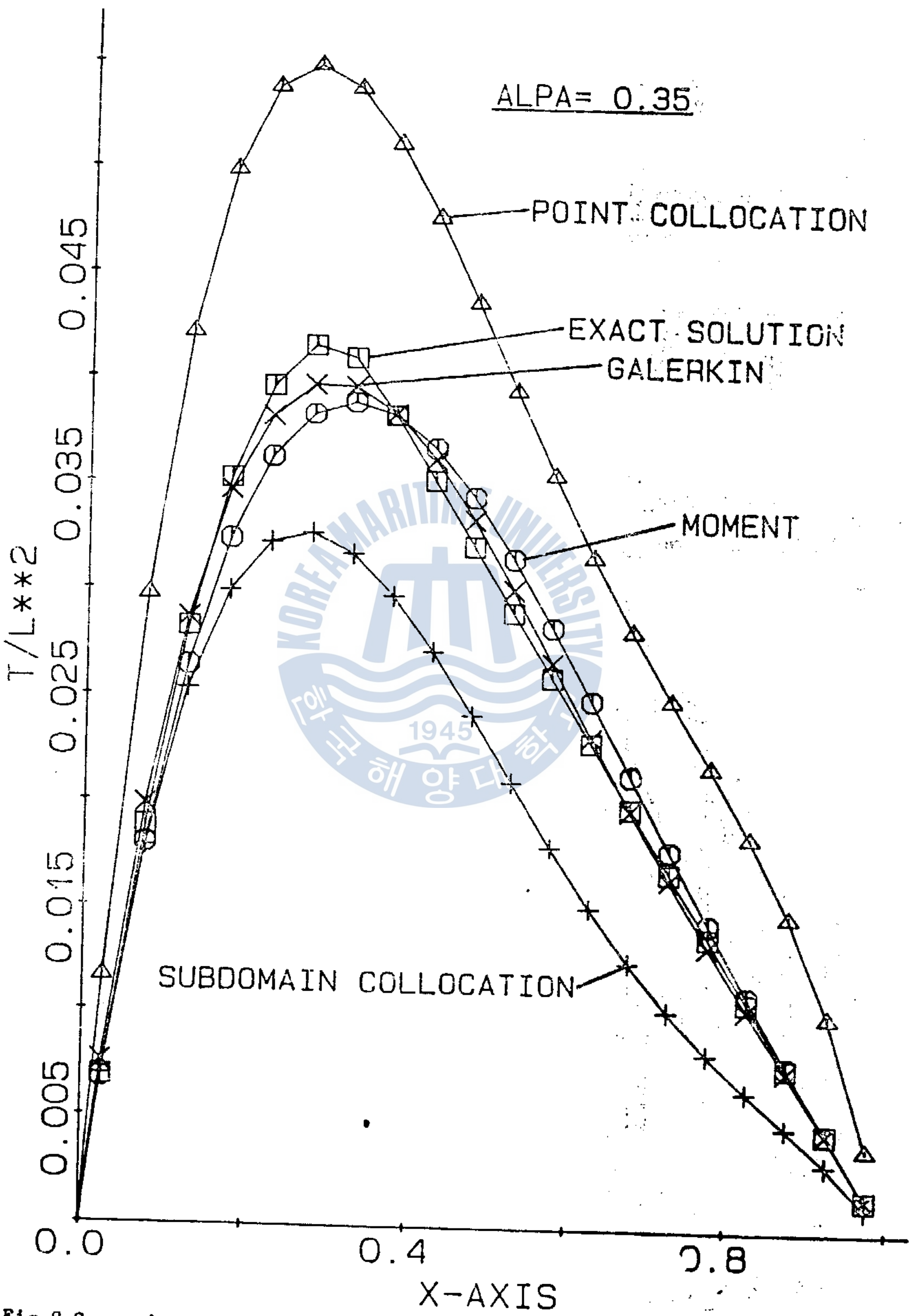

Fig.8 Comparison of the solutions for one-dimensional heat conduction problem (α=0.35, n=3)

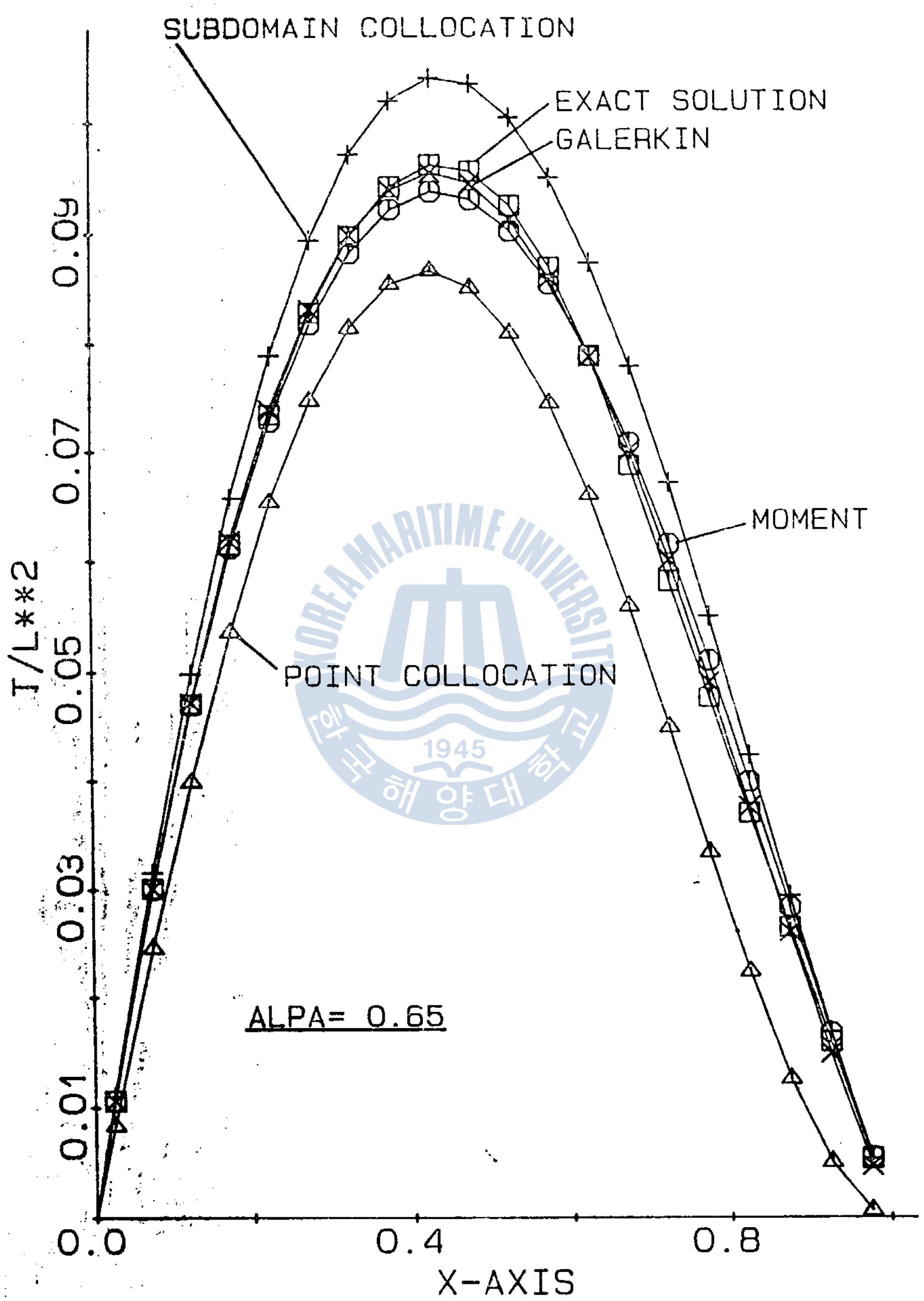

Fig.9 Comparison of the solutions for one-dimensional heat conduction **problem**(α=0.65, n=3)

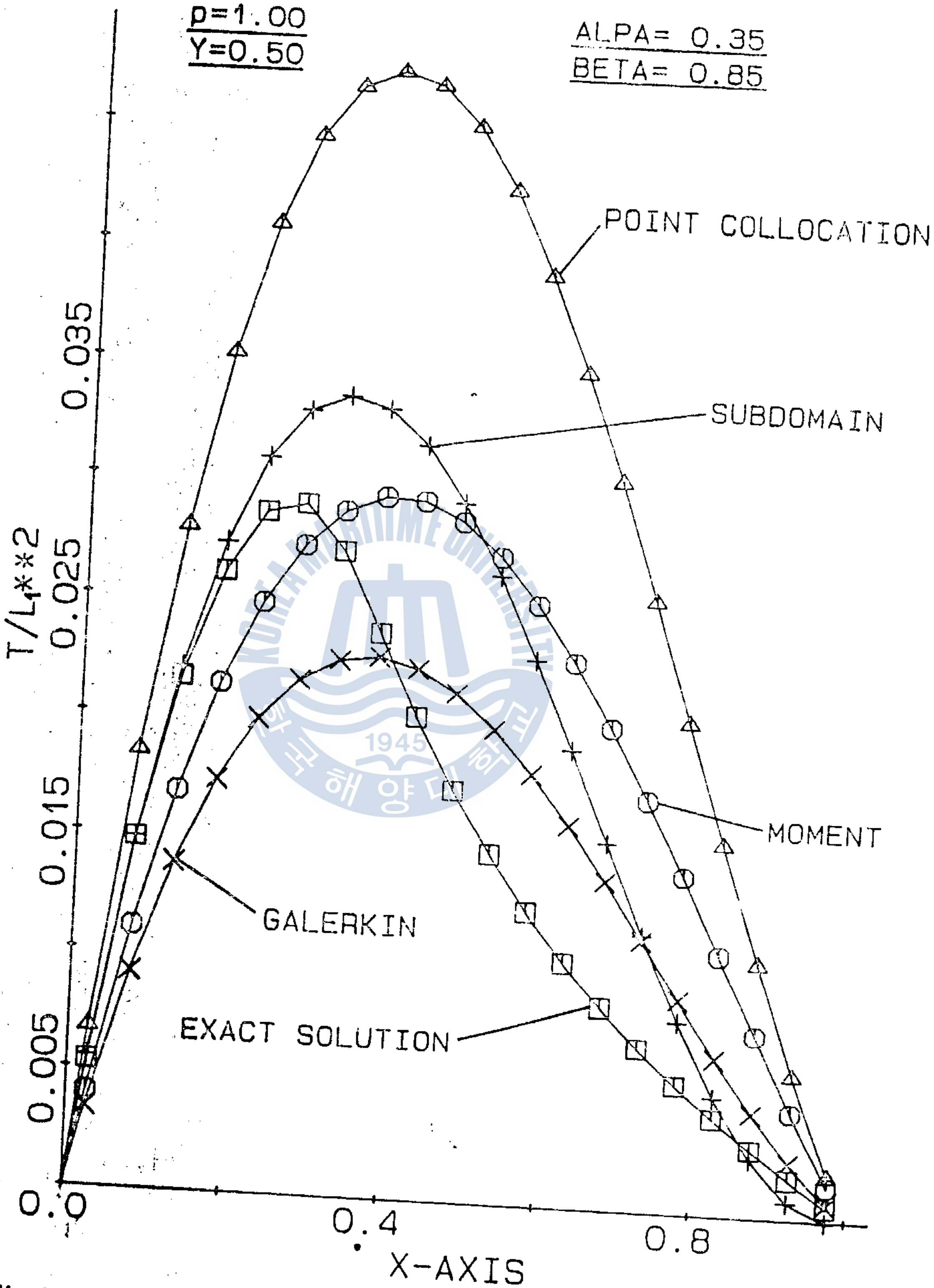

Fig.11 Comparison of the solutions for two-dimensional heat conduction problem (α=0.35, β=0.85, p=1, Y=0.5)

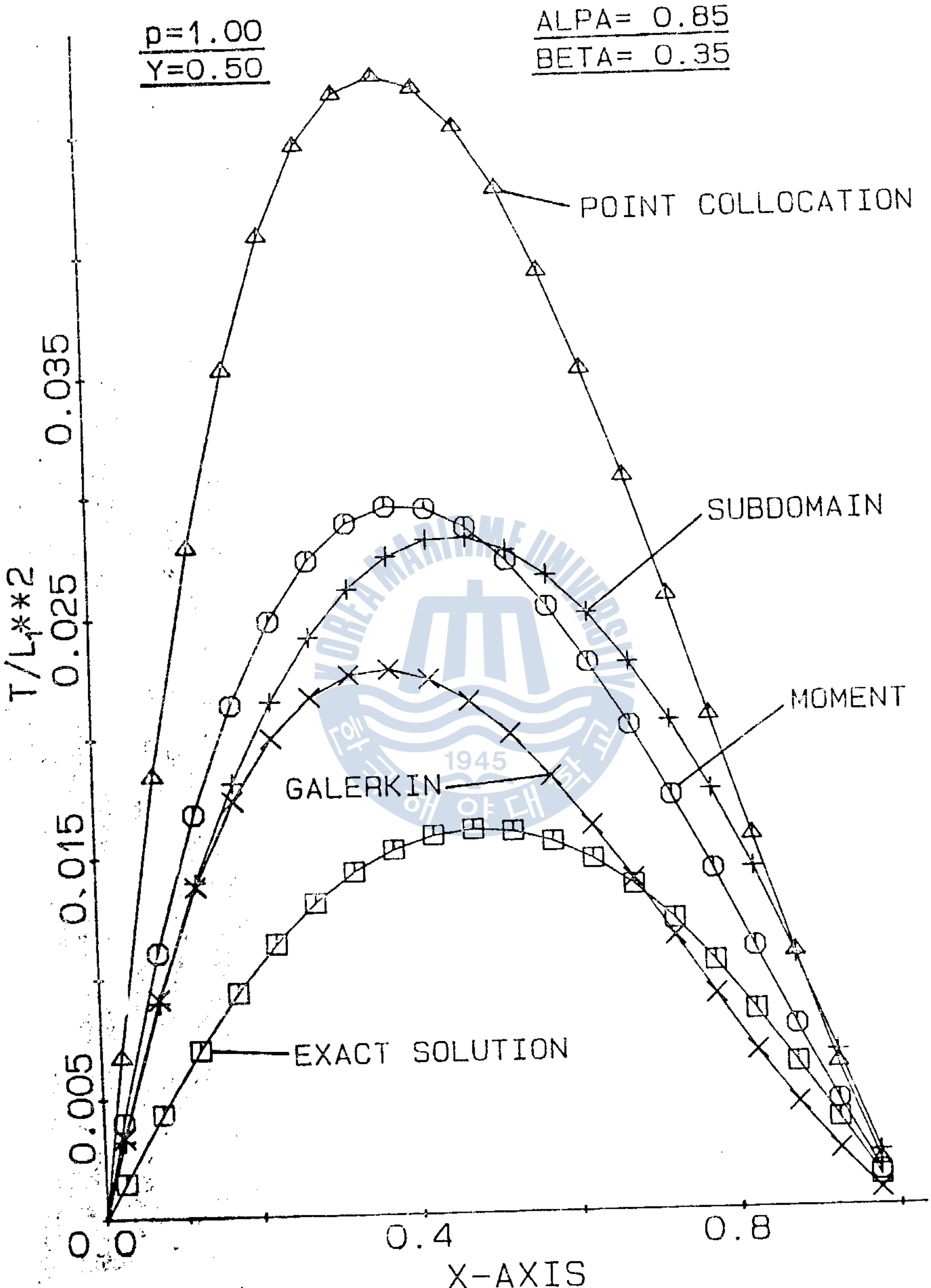

Fig. 13 Comparison of the solutions for two-dimensional heat conduction problem (α=0.85, β=0.35, p=1, Y=0.5)

6. 結 論

加重殘餘法에 의한 여러가지 解法들을 一次元 및 二次元 熱伝導 問題에 適用시켜 본 結果 다음과 같은 結論을 얻었다

1 加重殘餘法을 利用하므로서 比較的 적은 項만으로도 近似解를 얻을수 있다

2 加重殘餘法의 項數를 增加시키면 精度높은 近似解가 된다

3 加重殘餘法中 갤러킨 法이 全区间에 걸쳐서 誤差가 제일 작고 그 다음이 모우멘트 法이며 点配列法이 가장 誤差가 크다

本研究에서 取扱한 問題들은 正確한 解가 있는 問題들이라 정작 加重殘餘法이 必要한 境遇는 正確한 解가 없을 때이므로, 그 때에도 갤러킨 法이 가장 잘 맞는지도 알 수가 없다 따라서 이 部分에 대하여 좀 더 研究되어야 할 것이고 座標函數를 어떻게 잡느냐에

따라서 解가 달라질수 있으므로 이것에 관하여도 더 研究되어야 할 것이다

參考文獻

1) C.A. Brebia, "The boundary element method for engineers", Pentech Press, 1978

2) Kenneth H. Huebner, "The finite element method for engineers", John Wiley and Sons, 1975

3) O.C. Zienkiewicz, "The finite element method", McGraw-Hill, 1977

4) 仕滿金典, 郭柄晩, 李桂成, "有限要素法入門", 東明社, 1985

5) Erwin Kreyszig, "Advanced engineering Mathematics", John Wiley and Sons, 1972