同一分布를 가지는 無限行列에서의 待期時間의 分布

李　鍾　厚

Waiting Times in Infinite Queues with a Common Distribution

Lee Jong Hoo

Abstract

Donote by X_0 my waiting times belonging to waiting lines. We assume that X_1, $X_2, \cdots$ are mutually independent random variables with a common distribution, and that the X_j exponentially distributed in according with following function

(1) $\qquad f(x)=\alpha e^{-\alpha x}, \qquad F(x)=1-e^{-\alpha x} \qquad x\geqq 0.$

For simplicity of description we treat the sequence $\{X_j\}$ as infinite. Introducing

(2) $$P\{N=n\}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)},$$

where N is my waiting times, the $r.v.$ N has infinite expectation.

Theorem 1. It follows that whenever the variables X_j are independent and have a common continuous distribution function F, the first record value has the distribution (2).

Theorem 2. Generalization of the record value theorem 1. Instead of taking the single preliminary observation X_0 we start from a sample $(X_1, \cdots, X_m)$ with order statistics $(X_{(1)}, \cdots, X_{(m)})$.

(a) If N is the first index n such that $X_{m+n}\geqq X_{(m)}$ then $P\{N>n\}=m/(m+n)$.

(b) If N is the first index n such that $X_{m+n}\geqq X_{(m-r+1)}$ then $P\{N>n\}=\binom{m}{r}\Big/\binom{m+n}{r}$.

For $r\geqq 2$ we have $E(n)<\infty$ and $P\{N\leqq mx\}\to 1-\frac{1}{(1+x)^r}$, $m\to\infty$.

(c) If N is the first index such that X_{m+n} falls outside the interval between $X_{(1)}$ and $X_{(m)}$ then $P\{N>n\}=\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$, and $E(N)<\infty$.

하나의 待期行列에 속하는(또는 偶然事象에서) 한사람 A의 待期時間을 X_0로 表示하고 이와같은 共通의 分布를 가지며, 서로 獨立인 確率變數列을 X_1, X_2, …으로 表示한다. 指數分布가 任意性의 模型으로써 有用하므로 X_j는

$$f(x)=\alpha e^{-\alpha x},\qquad F(x)=1-e^{-\alpha x},\qquad x\geqq 0 \tag{1}$$

에 의하여 指數分布에 따르며, 系列 $\{X_j\}$는 無限系列이라 한다.

A의 待期時間을 求하기 위하여 딴 사람 B가 A보다 먼저 目的을 達成할 때까지의 待期時間을 求해보자. 形式的으로는 $X_n>X_0$가 되는 最初의 添數 n의 값으로서 待期時間 N을 導入한다.

이것을 最初의 最高記錄이라 부르자 事象 $\{N>n-1\}$이 일어나는 것은 n個의 組 X_0, X_1, …, X_{n-1}의 最大項이 그 最初의 位置에 나타나는 것과 同等하다. 對稱性에서 이 事象의 確率은 n^{-1}이다. 事象 $\{N=n\}$은 $\{N>n-1\}-\{N>n\}$과 같으므로

$$P\{N=n\}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)} \tag{2}$$

가 된다.[4] 따라서 確率變數 N의 期待값은 無限大이다.

〔定理 1〕 (a) 앞 待期行列에서 最初의 最高記錄이 n번째의 位置에서 일어나고, 그리고 $\leqq x$일 確率은

$$\frac{1}{n(n+1)}(1-e^{-\alpha x})^{n+1}$$

이며, 最初의 最高記錄의 確率分布는 $1-(1+\alpha x)e^{-\alpha x}$이다.

(b) 一般으로 X_j가 陽이고 任意의 連續分布 F를 따르면 最初의 最高記錄이 n번째의 位置에서 일어나며, $\leqq x$일 確率은 $[n(n+1)]^{-1}F^{n+1}(x)$이고, 分布는

$$F-(1-F)\log(1-F)^{-1}$$

이다.

證明 (a)

$$\begin{aligned}
P\{N=n\mid X_0<x\}&=\int_0^x\int_0^{x_0}\cdots\int_0^{x_0}\int_{x_0}^x\alpha^{n+1}e^{-\alpha(x_0+x_1+\cdots+x_n)}dx_n\cdots dx_0\\
&=\int_0^x\alpha e^{-\alpha x_0}(e^{-\alpha x_0}-e^{-\alpha x})dx_0\int_0^{x_0}\cdots\int_0^{x_0}\alpha^{n-1}e^{-\alpha(x_1+\cdots+x_{n-1})}dx_{n-1}\cdots dx_1\\
&=\int_0^x\alpha e^{-\alpha x_0}(1-e^{-\alpha x_0})^{n-1}(e^{-\alpha x_0}-e^{-\alpha x})dx_0\\
&=\int_0^{1-e^{-\alpha x}}p^{n-1}(1-p-e^{-\alpha x})dp\qquad(\because\ p=1-e^{-\alpha x_0})\\
&=\frac{1}{n}(1-e^{-\alpha x})^n-\frac{1}{n+1}(1-e^{-\alpha x})^{n+1}-\frac{1}{n}e^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})^n\\
&=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}(1-e^{-\alpha x})-\frac{1}{n}e^{-\alpha x}\right](1-e^{-\alpha x})^n\\
&=\frac{1}{n(n+1)}(1-e^{-\alpha x})^{n+1}.
\end{aligned}$$

따라서 最初의 最高記錄의 確率分布 $\Phi(x)$는

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N=n|X_0\le x\}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)r^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)r^3+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)r^4+\cdots \qquad (\because\ 1-e^{-\alpha x}=r)$$

$$=r[r+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{3}r^3+\cdots]+r-[r+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{3}r^3+\cdots]$$

$$=-r\log(1-r)+r+\log(1-r)$$

$$=r+(1-r)\log(1-r)$$

$$=1-e^{-\alpha x}-\alpha xe^{-\alpha x}$$

$$=1-(1+\alpha x)e^{-\alpha x}.$$

(b) X_j가 陽이고 任意의 連續分布 F에 따르면

$$P\{N=n|\ X_0\le x\}=\int_0^x\int_0^{x_0}\cdots\int_0^{x_0}\int_{x_0}^{x}f(x_0)f(x_1)\cdots f(x_n)dx_n\cdots dx_0$$

$$=\int_0^x f(x_0)\ [F(x)-F(x_0)]dx_0\int_0^{x_0}\cdots\int_0^{x_0}f(x_1)\cdots f(x_{n-2})\ \Big[F(x_{n-1})\Big]_0^{x_0}dx_{n-2}\cdots dx_1$$

$$=\int_0^x f(x_0)\ [F(x)-F(x_0)][F(x_0)]^{n-1}dx_0 \qquad (\because\ F(0)=0)$$

$$=\Big[\frac{1}{n}F(x)\ (F(x_0))^n-\frac{1}{n+1}(F(x_0))^{n+1}\Big]_0^x$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\Big(F(x)\Big)^{n+1}.$$

그러므로 分布에 關係없이 $x\to\infty$이면 $P\{N=n\}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$이다.

N의 分布函數를 $\Phi(x)$라 하면

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N=n|x_0\le x\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(F(x))^{n+1}$$

$$=\frac{1}{1\cdot2}F^2+\frac{1}{2\cdot3}F^3+\frac{1}{3\cdot4}F^4+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)F^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)F^3+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)F^4+\cdots$$

$$=F\{F+\frac{1}{2}F^2+\frac{1}{3}F^3+\cdots\}+F-\{F+\frac{1}{2}F^2+\frac{1}{3}F^3+\cdots\}$$

$$=-F\log(1-F)+F+\log(1-F)$$

$$=F+(1-F)\log(1-F).$$

〔系〕 道路交通에서 車가 차례 차례로 原點을 出發하여, x軸의 陽의 方向으로 追越하지 않고 進行하는 것을 생각한다. 各車는 一定速度를 維持하지만, 이 速度 v_1, v_2, …는 共通의 連續分布函數 F를 가지는 獨立確率變數列로 부터 取한 標本이라 생각한다. 어떤 車가 自己보다 느린차에 따라가면 그

앞車와 같은 速度로 뒤에 따라가야 한다. 이와 같이 하면 車의 列이 생길 것이다.

어느 指定한 車 뒤에 꼭 n臺의 車가 行列을 이룰 確率은, 分布 F와 出發時間에는 關係없이 $[(n+1)(n+2)]^{-1}$에 漸近한다. 이 列中의 車의 期待數는 無限大이다.

證明 v_j의 $p{\cdot}d{\cdot}f.$를 $f(x_j)$, $c{\cdot}d{\cdot}f.$를 $F(x_j)$, $j=0, 1, \cdots, n$이라 하면 定理 1과 꼭 같이

$$P\{N=n\mid x_0<x\}=\int_0^x\int_0^{x_0}\cdots\int_0^{x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)f(x_1)\cdots f(x_{n+1})dx_{n+1}\cdots dx_0$$

$$=\int_0^x f(x_0)\ [F(x)-F(x_0)](F(x_0))^n dx_0$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\left(F(x)\right)^{n+2}.$$

여기서 $x\to\infty$이면 $F(\infty)=1$ 이 되므로

$$P\{N=n\}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

을 얻는다.

(補助定理 1). 無限積 $P=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(n-a_1)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots(n-b_k)}\right\}$에 대해서 다음이 成立한다.

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n-a_1)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots(n-b_k)}\right\}=\prod_{m=1}^{k}\frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}\qquad(1)$$

단 左邊의 分母의 因數中에는 0이 없다.

證明. 一般項은

$$\left(1-\frac{a_1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)\left(1-\frac{b_1}{n}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)^{-1}$$

$$=1-\frac{a_1+\cdots+a_k-b_1-\cdots-b_k}{n}+A_n$$

이며 充分히 큰 n에 대해서 $A_n=O(n^{-2})$이다.

$a_1+a_2+\cdots+a_k-b_1-\cdots-b_k=0$일 때 (1)의 左邊은 絶對收斂하고 또

$$1=\exp\{n^{-1}(a_1+\cdots+a_k-b_1-\cdots-b_k)\}=\frac{e^{a_1/n}\cdots e^{a_k/n}}{e^{b_1/n}\cdots e^{b_k/n}}$$

이므로

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\left(1-\frac{a_1}{n}\right)e^{\frac{a_1}{n}}\cdots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)e^{\frac{a_k}{n}}}{\left(1-\frac{b_1}{n}\right)e^{\frac{b_1}{n}}\cdots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)e^{\frac{b_k}{n}}}\right\}$$

으로 表示되고 Weiestrass의 公式

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\}=\frac{1}{-z\Gamma(-z)e^{-\nu z}}\qquad 단\ \nu=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right\}^{(3)}$$

에 의하여

$$P=\frac{b_1\Gamma(-b_1)\cdots b_k\Gamma(-b_k)}{a_1\Gamma(-a_1)\cdots a_k\Gamma(-a_k)}=\prod_{m=1}^{k}\frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}$$

을 얻는다.

超幾何級數

$$F(a,\ b;\ c;\ x)=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots \quad (2)$$

의 合을 생각해 보자. 一般項 $u_n=\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{1\cdots n\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n$ (단 $u_0=1$)에 대해서

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-1)}x\right|\to|x| \qquad (n\to\infty)$$

$|x|=1$이면 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|1+\dfrac{a+b-c-1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right|$ 이므로 $a+b-c<0$이면 F는 絶對 收斂한다.[1]

(補助定理 2)

$$c\{c-1-(2c-a-b-1)x\}F(a,b;\ c;\ x)+(c-a)(c-b)xF(a,b;\ c+1;\ x)$$
$$=c(c-1)(1-x)F(a,\ b;\ c-1;\ x) \qquad (3)$$

複雜한 셈을 하여 위의 結果를 얻을 수 있음.

(補助定理 3)

$$F(a,\ b;\ c;\ 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \qquad (4)$$

證明 補助定理 2에서 다음 式을 얻는다.

$$[c(c-1)-c(2c-a-b-1)x]F(a,\ b;\ c;\ x)+(c-a)(c-b)xF(a,\ b;\ c+1;\ x)$$
$$=c(c-1)(1-x)F(a,\ b;\ c-1;\ x)$$
$$=c(c-1)\ \{1+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})x^n\} \qquad (5)$$

단 u_n은 $F(a,\ b;\ c-1;\ x)$의 x^n의 係數이다.

$F(a,\ b;\ c;\ 1)$은 收斂하므로 $n\to\infty$이면 $u_n\to 0$이다. 그러므로 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$은 零에 收斂한다.

$x\to 1$이면 (5)의 右邊은 零이 되므로

$$c(a+b-c)F(a,\ b;\ c;\ 1)+(c-a)(c-b)\ F(a,\ b;\ c+1;\ 1)=0 \qquad (6)$$

$$\therefore\ \ F(a,\ b;\ c;\ 1)=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}F(a,\ b;\ c+1;\ 1).$$

이것을 反復하면

$$F(a,\ b;\ c;\ 1)=\left\{\prod_{n=0}^{m}\frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(c-a-b+n)}\right\}F(a,\ b;\ c+m;\ 1)$$

$$=\left\{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(-a-b+n)}\right\}\lim_{m\to\infty}F(a,\ b;c+m;\ 1)$$

$u_n(a,\ b,\ c)$를 $F(a,\ b;\ c;\ x)$의 x^n의 係數라 하고, $m>|c|$라 하면

$$|F(a,\ b;\ c+m;\ 1)-1|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(a,\ b;\ c+m)|$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}u_n(|a|,\ |b|,\ m-|c|)$$

$$<\frac{|ab|}{m-|c|}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(|a|+1,\ |b+1,\ m+1-|c|)$$

끝의 級數는 $m>|c|+|a|+|b|-1$ 일 때 m에 대한 單調 減少하는 陽項級數이므로 收斂하고 $(m-|c|)^{-1}\to 0$ $(m\to\infty)$이므로

$$\lim_{m\to\infty}F(a,\ b;\ c+m;\ 1)=1$$

이다. 따라서 補助定理 1에서 $\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(-a-b+n)}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$(단 c는 陰의 整數 아니다)이므로

$$F(a,\ b;\ c;\ 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

이다.

待期時間의 確率 (2) 卽 $P\{N=n\}=\frac{1}{n(n+1)}$ 의 一般化를 생각해 보자. 지금 單하나만의 豫備的 觀測值 X_0에 대해서 順序統計量 $(X_{(1)},\ \cdots,\ X_{(m)})$을 가지는 標本$(X_1,\ \cdots,\ X_m)$에서 出發하여 다음의 結果를 얻는다. 단 共通의 分布 F는 連續만을 假定한다.

〔定理 2〕 (a) N이 $X_{m+n}\geq X_{(m)}$이 되는 最初의 指標 n일 때 $P\{N>n\}=m/(m+n)$이며, (2)는 $m=1$일 때이다.

(b) N이 $X_{m+n}\geq X_{(m-r+1)}$이 되는 最初의 指標 n일 때

$$P\{N>n\}=\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}}$$

이며 $r\geq 2$에 대해서는 $E(N)=\frac{m}{r-1}$이고

$$P\{N\leq mx\}\to 1-\frac{1}{(1+x)^r}\qquad m\to\infty$$

이다.

(c) N을 X_{m+n}이 $X_{(1)}$과 $X_{(m)}$ 사이의 區間밖에 떨어지는 最初의 指標라 하면

$$P\{N>n\}=\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)},\qquad E(N)<\infty$$

이다.

證明 X_j는 서로 獨立이고 同一分布를 가지며 $p \cdot d \cdot f.$를 $f(x_j)$, 分布函數를 $F(x_j)$라 한다.

(a) $P\{N=n+1\}=P\{N>n\}-P\{N>n+1\}$이므로

$$P\{N>n\}=P\{N=n+1\}+P\{N>n+1\}$$
$$=P\{N=n+1\}+P\{N=n+2\}+\cdots$$

이다. $X_{(m)}$의 $p \cdot d \cdot f.$는 $f_{(m)}=mf(x)(F(x))^{m-1}$이므로 定理 1과 같이하여

$$P\{N=n+1\}=\int_0^\infty mf(x_m)(F(x_m))^{m-1}dx_{(m)}\int_0^{x(m)}\cdots\int_0^{x(m)}\int_{x(m)}^\infty f(x_1)\cdots f(x_{n+1})dx_{n+1}\cdots dx_1$$

$$=m\int_0^\infty f(x_{(m)})(F(x_{(m)}))^{m-1}(1-F(x_{(m)}))(F(x_{(m)}))^n\, dx_{(m)}$$

$$=m\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m+n+1}\right),$$

$$\therefore\ P\{N>n\}=\frac{m}{m+n}$$

여기서 f는 任意의 $p \cdot d \cdot f.$이다.

(b) $X_{(m-r+1)}$의 $p \cdot d \cdot f \cdot$ $f_{(m-r+1)}(x)$는

$$f_{(m-r+1)}(x)=\frac{1}{B(m-r+1,\ r)}f(x)(F(x))^{m-r}(1-F(x))^{r-1}$$

이므로

$$P\{N=n+1\}=\frac{1}{B(m-r+1,\ r)}\int_0^\infty f(x)(F(x))^{m-r}(1-F(x))^{r-1}dx\int_0^x\cdots\int_0^x\int_x^\infty f(x_1)\cdots f(x_n)f(x_{n+1})\cdot dx_{n+1}\cdots dx_1$$

$$=\frac{1}{B(m-r+1,\ r)}\int_0^\infty f(x)(F(x))^{m-r}(1-F(x))^r(F(x))^n dx$$

$$=\frac{1}{B(m-r+1,\ r)}\int_0^1 p^r(1-p)^{m+n-r}\, dp=\frac{B(m+n-r+1,\ r+1)}{B(m-r+1,\ r)}$$

$$=\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}}-\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n+1}{r}} \qquad (\because\ 1-F(x)=p).$$

$$\therefore\ P\{N>n\}=P\{N=n+1\}+P\{N=n+2\}+\cdots$$
$$=\binom{m}{r}\Big/\binom{m+n}{r}$$

다음에 $P\{N\le mx\}\to 1-\dfrac{1}{(1+x)^r}(m\to\infty)$를 증명하자.

$P\{N>n\}=\binom{m}{r}\Big/\binom{m+n}{r}$에서 $n=mx$로 두면 $P\{N\leqq mx\}=1-P\{N>mx\}$이므로

$$P\{N>mx\}=\binom{m}{r}\Big/\binom{m+mx}{r}=\frac{m!}{r!(m-r)!}\ \frac{r!(m+mx-r)!}{(m+mx)!}$$

$$=\frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{(m+mx)(m+mx-1)\cdots(m+mx-r+1)}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{m}\right)}{(1+x)\left(1+x-\frac{1}{m}\right)\left(1+x-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1+x-\frac{r-1}{m}\right)}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{m}\right)}{(1+x)^r\left(1-\frac{1}{m(1+x)}\right)\left(1-\frac{2}{m(1+x)}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{m(1+x)}\right)}$$

$$\to\frac{1}{(1+x)^r}\qquad(m\to\infty).$$

따라서

$$P\{N\leqq mx\}\to 1-\frac{1}{(1+x)^r}\qquad(m\to\infty)$$

을 얻는다.

다음에 $r\geqq 2$일 때 $E\{N\}=m/(r-1)$을 증명하자.

$$P\{N=n\}=\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n-1}{r}}-\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}}$$

이므로

$$nP\{N=n\}+(n+1)P\{N=n+1\}=\binom{m}{r}\left\{\frac{n}{\binom{m+n-1}{r}}-\frac{n}{\binom{m+n}{r}}+\frac{n+1}{\binom{m+n}{r}}-\frac{n+1}{\binom{m+n+1}{r}}\right\}$$

$$=\frac{n\binom{m}{r}}{\binom{m+n-1}{r}}+\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}}-\frac{(n+1)\binom{m}{r}}{\binom{m+n+1}{r}}$$

따라서

$$E\{N\}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n-1}{r}}-\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}}\right)=\binom{m}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{m+n}{r}}$$

$$=1+\frac{m-r+1}{m+1}+\frac{(m-r+1)(m-r+2)}{(m+1)(m+2)}+\frac{(m-r+1)(m-r+2)(m-r+3)}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\cdots$$

$$=F(1,\ m-r+1;\ m+1;\ 1)$$

이다. 補助定理 3에서 $a=1$, $b=m-r+1$, $c=m+1$ 이므로

$$E\{N\}=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(r-1)}{\Gamma(m)\Gamma(r)}=\frac{m}{r-1}$$

이다.

(c) $f_{(1)}(x_{(1)})$, $f_{(m)}(x_{(m)})$의 $j\cdot p\cdot d\cdot f\cdot$ $f_{1,m}(x_{(1)},\ x_{(m)})$는

$$f_{1,m}(x_{(1)},\ x_{(m)})=m(m-1)f(x_{(1)})f(x_{(m)})(F(x_{(m)})-F(x_{(1)}))^{m-2}$$

이므로

$$P\{N>n\mid X_{(1)}<x_{(1)},\ x_{(m)}<X_{(m)}\}$$

$$=\int_0^\infty \int_{x_{(1)}}^\infty m(m-1)f_{(1)}\cdot f_{(m)}(F_{(m)}-F_{(1)})^{m-2}dx_{(m)}dx_{(1)}\int_{x_{(1)}}^{x_{(m)}}\cdots\int_{x_{(1)}}^{x_{(m)}}f(x_1)\cdots f(x_n)dx_n\cdots dx_1$$

$$=m(m-1)\int_0^\infty \int_{x_{(1)}}^\infty f_{(1)}\cdot f_{(m)}(F_{(m)}-F_{(1)})^{m+n-2}dx_{(m)}dx_{(1)}$$

$$=\frac{m(m-1)}{m+n-1}\int_0^\infty f(x_1)\left[(F(x_{(m)})-F(x_{(1)}))^{m+n-1}\right]_{x_{(1)}}^\infty dx_{(1)}$$

$$=\frac{m(m-1)}{m+n-1}\int_0^\infty f_{(1)}(x_{(1)})(1-F(x_{(1)}))^{m+n-1}dx_{(1)}$$

$$=\frac{m(m-1)}{(m+n-1)(m+n)}.$$

$$P\{N=n\}=P\{N>n-1\}-P\{N>n\}$$

$$=\frac{m(m-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}-\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

$$=\frac{2m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}.$$

$$E\{N\}=\sum_{n=1}^\infty n\frac{2m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}$$

$$=2m(m-1)\left[\frac{1}{(m+1)m(m-1)}+\frac{2}{(m+2)(m+1)m}+\frac{3}{(m+3)(m+2)(m+1)}+\cdots\right]$$

$$u_n=\frac{n}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}=\frac{1}{(m+n)(m+n-1)\left(1+\frac{m-2}{n}\right)}<\frac{1}{n^2}$$

이므로

$$E\{N\}<\infty.$$

參 考 文 獻

1. E.T. Whittaker, A course of Modern Analysis(1952), Cambridge University Press.
2. 竹内 啓, 數理統計學(1963), 東洋經濟.
3. 高木貞治, 解析概論, 岩波書店.
4. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol.2(1966), John wiley.