

目 次

1. 序 論
2. 單位階段函數를 應用한
보의 解析
3. 彈性支點을 가진 보의 解析
4. 實 驗
5. 結 論

※ 參考文獻

1. 序 論

힘에 比例하는 변위가 發生하며 변위에 비례하는 反力을 주는 彈性 支點에 의하여 支持된 보는, 힘을 받아도 전혀 變位가 생기지 않는 剛性支點에 의하여 지지된 보와는 다른 舉動을 보일 것이 豫상된다.

靜定보인 경우는 지점의 反力이 단성지점이든 강성지점이든 다같이 때문에 反力을 求하는 問題가 어렵지 않다. 따라서 정정보의 경우는 彈性支點을 가진 보라 하더라도 支點의 變位를 쉽게 구할 수 있으므로 그 解析이 까다롭지 않다. 그러나 단성지점을 가진 不靜定보의 경우는 지점의 反力이 보의 굽힘 剛性係數뿐만 아니라 지점들의 스프링정수들에 의하여 서로 달라진다. 즉 보의 변형뿐만 아니라 支點들의 변위들도 計算하여야 反力을 구할 수 있고 剪斷力, 굽힘모우멘트, 처짐角, 처짐을 구하는 보의 해석이 가능하여 진다. 그러므로 보의 해석이 매우 복잡하게 되는데 이는 過剩拘束의 수가 많을수록 幾何級數的으로 수가 증가하는 방정식들을 取扱해야 되기 때문이다.

본연구에서는 均一斷面보에 대하여 단위계단함수를 利用함으로써 보의 種類, 지점의 종류 및 수, 荷重의 종류 및 수 등에 관계없이 모든 보의 해석이 훨씬 간편하게 됨을 보이고, 모든 보를 나타낼 수 있는 模型을 定하여 이 보의 해석이 전산프로그램으로 作成될 수 있도록 하였다. 그리하여 어느 特定한 보가 주어지면 이 보에 맞는 入力데이터만 주어 그 보의 해석이 가능하도록 하였다.

또한 彈性支點을 가진 연속보를 제작하고 지점의 수와 스프링 정수, 荷重의 수와 크기, 지점의 간격등을 여러가지로 변화시키면서 처짐을 실측하여 본연구에서 개발한 전산 프로그램에 의한 計算結果와 비교하였다.

2. 單位階段函數를 應用한 보의 解析

2.1 기본 방정식

보의 해석에 관한 방정식들은 좌표계를 어떻게 取하느냐에 따라서 달라질 뿐만 아니라 剪斷力, 굽힘모우멘트, 分布荷重의

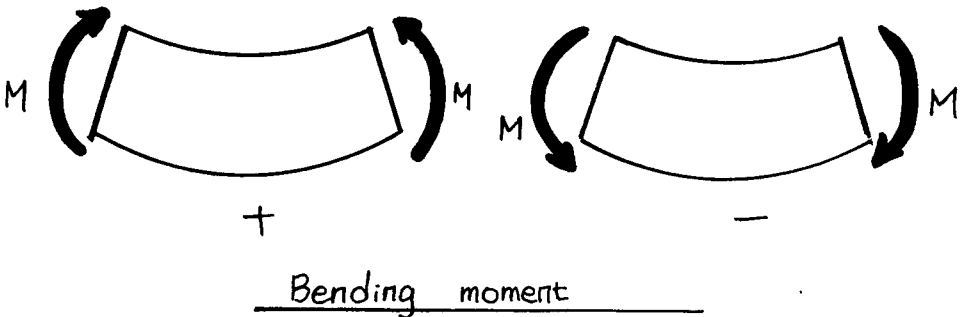
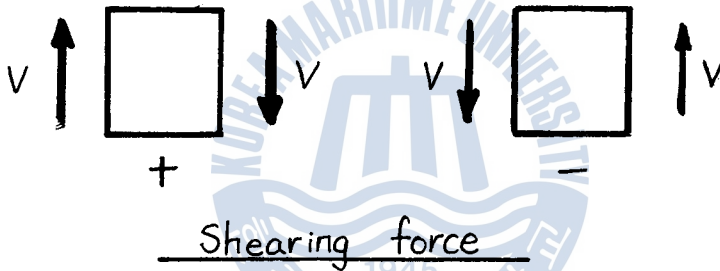
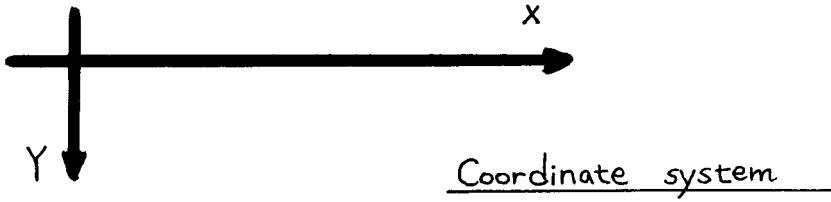


Fig1. 좌표계와 전단력, 굽힘모우멘트, 분포하중

부호를 어떻게定하는냐에 따라서도 달라지므로, 방정식들을 확실하게 하기 위하여 座標系와 剪斷力, 굽힘모우멘트 및 분포하중의 부호를 Fig.1 과 같이 定한다. 그러면 분포하중 w , 전단력 V , 굽힘모우멘트 M 의 관계식들은 다음과 같다.

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3)$$

여기서 EI 는 굽힘강성계수로서 E 는 탄성계수이고 I 는 단면 2차 모우멘트이다.

2.2 단위계단함수

單位階段函數 (unit step function)는 다음과 같이 정의된다.

$$U(x-a) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases} \quad (4)$$

이 함수는 $x=a$ 에서 二價인 불연속함수이다. 즉

$$\lim_{x \rightarrow a^+} U(x-a) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} U(x-a) = 0 \quad (5)$$

이 된다.

단위계단함수의 적분은 다음과 같다.

$$\int U(x-a) dx = (x-a)U(x-a) + C_1 \quad (6)$$

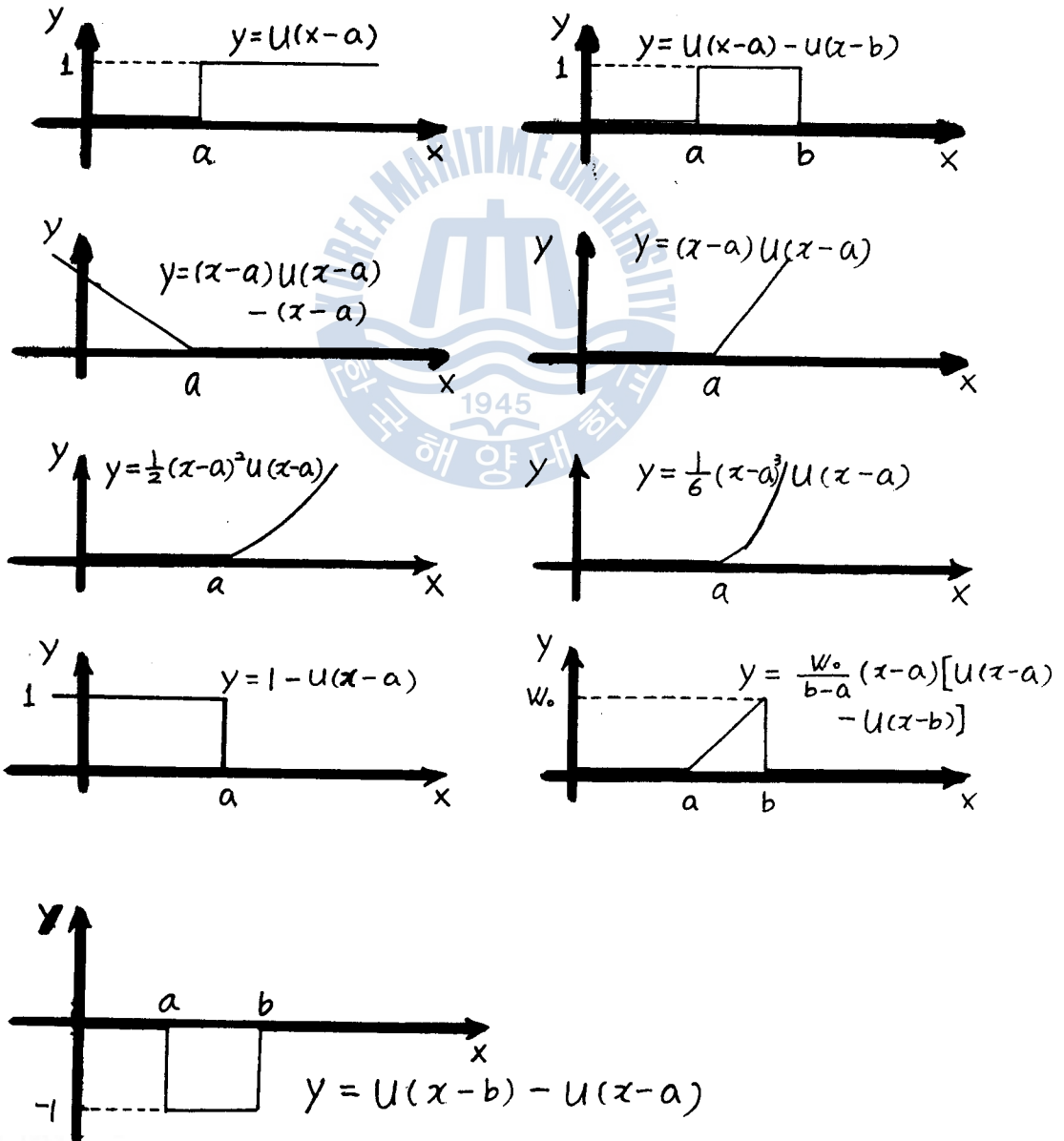
$$\int (x-a)U(x-a) dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 U(x-a) + C_2 \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{2}(x-a)^2 U(x-a) dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 U(x-a) + C_3 \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{6}(x-a)^3 U(x-a) dx = \frac{1}{24}(x-a)^4 U(x-a) + C_4 \quad (9)$$

여기서 C_1, C_2, C_3, C_4 는 積分常數이다.

單位階段函數를 利用하면 여러가지 불연속함수를 비교적 간단하게 表示할 수가 있는데, Fig. 2에 단위계단함수와 그의 적분 및 몇가지 불연속함수를 나타내었다.



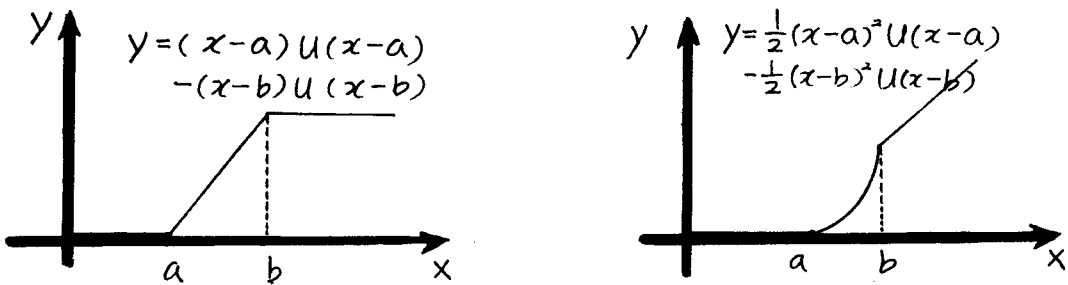


Fig. 2 단위계단함수와 그의 적분 및 몇가지 불연속함수

2.3 전단력과 굽힘모우멘트

보에 分布荷重만이 作用할 때는 전단력의 분포가 연속함수이기 때문에 別問題가 안되나, 集中荷重이 作用할 때는 전단력의 분포가 집중하중의 작용점에서 불연속이 되고, 區間에 따라 전단력의 크기가 달라져서 전단력과 굽힘모우멘트의 表示가 복잡하게 되는데, 단위계단함수를 이용하면 비교적 간단하게 이들을 표시할 수가 있다. 또한 모우멘트가 작용할 때도 굽힘모우멘트의 분포는 모우멘트의 作用點에서 불연속이 되고 굽힘모우멘트의 표시가 복잡하게 되는데 단위계단함수를 써서 簡單하게 표시할 수가 있다. 一例로서 Fig.3 에 보이는 바와 같은 연속보에 집중하중 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 와 反力 R_1, R_2, R_3, R_4 및 모우멘트 M_1, M_2, M_3 가 작용할 때, 左端으로부터 거리 x 인 단면의 전단력 V 와 굽힘모우멘트 M 은 평형조건 ($\Sigma F=0, \Sigma M=0$) 으로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 V &= R_1 + R_2 U(x-l_2) + R_3 U(x-l_3) - P_1 U(x-x_1) \\
 &\quad - P_2 U(x-x_2) - P_3 U(x-x_3) - P_4 U(x-x_4) \\
 &\quad - P_5 U(x-x_5) \\
 &= \sum_{i=1}^4 R_i U(x-l_i) - \sum_{i=1}^5 P_i U(x-x_i) \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$M = \sum_{i=1}^n R_i(x-l_i)U(x-l_i) - \sum_{i=1}^k P_i(x-x_i)U(x-x_i) + \sum_{i=1}^3 M_i U(x-d_i) \quad (11)$$

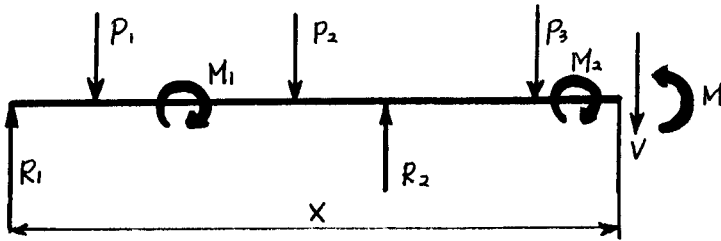
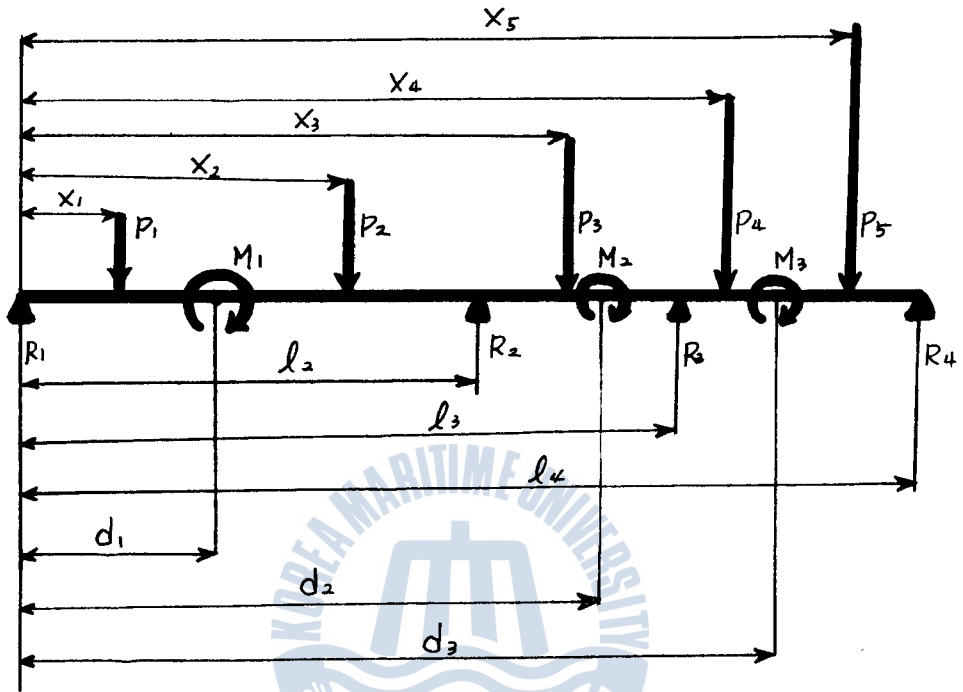


Fig. 3 연속보

이 연속보의 경우 x 는 구간 $0 \leq x \leq l_4$ 에서만 정의되므로 恒常 1이고 $U(x-l_4)$ 는 恒常 0 이므로 $R_1 U(x) = R_1$ 이 되어 $R_4 U(x-l_4) = 0$ 이 된다.

이와 같이 어느 단면에 작용하는 전단력과 굽힘모멘트를 단위계산 함수를 이용하면 집중하중과 모멘트 및 反力들의 크기뿐만 아니라 작용점의 위치도 동시에 표시할 수 있어 아주 편리하다.

2.4 보의 해석예

單位階段函數를 利用하면 전단력과 굽힘모멘트를 간단히 표시할 수 있을뿐만 아니라 처짐角과 처짐도 從來의 해법에 비하여 더 쉽게 구하여지고 간단히 表示될 수가 있는데, 그 예를 들면 다음과 같다.

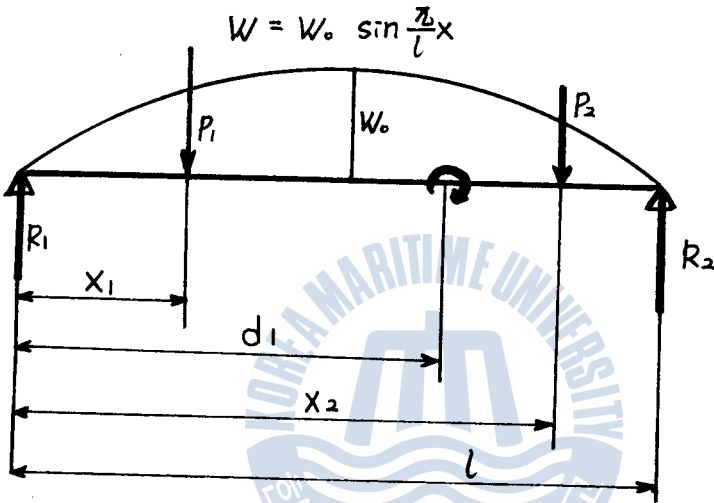


Fig. 4 단 순 보

Fig. 4와 같이 길이가 l 인 단순보에 分布荷重 $w = w_0 \sin \frac{\pi}{l} x$ 와 집중하중 P_1, P_2 및 모멘트 M_1 이 作用할 때, 反力 R_1, R_2 는 다음과 같다.

$$R_1 = \frac{w_0 l}{\pi} + \frac{P_1 (l - x_1)}{l} + \frac{P_2 (l - x_2)}{l} - \frac{M_1}{l}$$

$$R_2 = \frac{w_0 l}{\pi} + \frac{P_1 x_1}{l} + \frac{P_2 x_2}{l} + \frac{M_1}{l} \quad (12)$$

한편 式(1)로부터

$$\frac{dV}{dx} = -w = -w_0 \sin \frac{\pi}{l} x \quad (13)$$

이 式을 적분하면 전단력 V 의 分布를 求할 수 있다.

$$V = \frac{w_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi}{l} x + C_1 + R_1 - P_1 U(x - x_1) - P_2 U(x - x_2) \quad (14)$$

C_1 은 적분상수로서 境界條件에 의하여 求한다. 境界條件으로 $x=0$ 일때 $V=R_1$ 이므로 $C_1 = -w_0 l / \pi$ 가 된다. 이것을 式 (14) 에 代入하면

$$V = \frac{w_0 l}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{l} x - 1 \right) + R_1 - P_1 U(x-x_1) - P_2 U(x-x_2) \quad (14')$$

이 式을 式(2)에 代入하고 積분을 하면 軸힘모우멘트 M 이 求하여진다.

$$M = \frac{w_0 l}{\pi} \left(\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} x - x \right) + C_2 + R_1 x - P_1 (x-x_1) U(x-x_1) - P_2 (x-x_2) U(x-x_2) + M_1 U(x-d_1) \quad (15)$$

C_2 도 적분상수로서 境界條件에 의하여 求한다. 境界條件은 $x=0$ 일때 $M=0$ 이므로 $C_2=0$ 이 된다. 따라서 軸힘모우멘트 M 의 分布는 다음과 같이 된다.

$$M = \frac{w_0 l}{\pi} \left(\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} x - x \right) + R_1 x - P_1 (x-x_1) U(x-x_1) - P_2 (x-x_2) U(x-x_2) + M_1 U(x-d_1) \quad (15')$$

이 式을 式(3)에 代入하여 積분하면 처짐角 $\frac{dy}{dx}$ 가 求하여지고 한 번 더 積분하면 처짐 y 가 求하여진다.

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{w_0 l}{\pi} \left\{ \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cos \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} x^2 \right\} - \frac{R_1}{2} x^2 + \frac{P_1}{2} (x-x_1)^2 U(x-x_1) + \frac{P_2}{2} (x-x_2)^2 U(x-x_2) - M_1 (x-d_1) U(x-d_1) + C_3 \quad (16)$$

$$EI y = \frac{w_0 l}{\pi} \left\{ \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{6} x^3 \right\} - \frac{R_1}{6} x^3 + \frac{P_1}{6} (x-x_1)^3 U(x-x_1) + \frac{P_2}{6} (x-x_2)^3 U(x-x_2) - \frac{M_1}{2} (x-d_1)^2 U(x-d_1) + C_3 x + C_4 \quad (17)$$

C_3, C_4 는 적분상수로서 경계조건에 의하여 구한다. 경계조건은 $x=0$ 일때 $y=0$, $x=l$ 일때 $y=0$ 이다. 이 조건들로부터 C_3, C_4 를 구하면

$$C_3 = \frac{M_1(l-d_1)^2}{2l} - \frac{P_1(l-x_1)^3 + P_2(l-x_2)^3}{6l} + \frac{R_1 l^2}{6} - \frac{W_0 l^3}{6\pi}$$

$$C_4 = 0 \tag{18}$$

式(18)의 적분상수와 式(12)의 反力 R_1 을 式(16), (17)에 代入하여 처짐각과 처짐을 구한다.

以上은 정정보의 경우에 대하여 例를 들였으나, 부정정보의 경우도 비슷한 方法으로 해석이 가능하다.

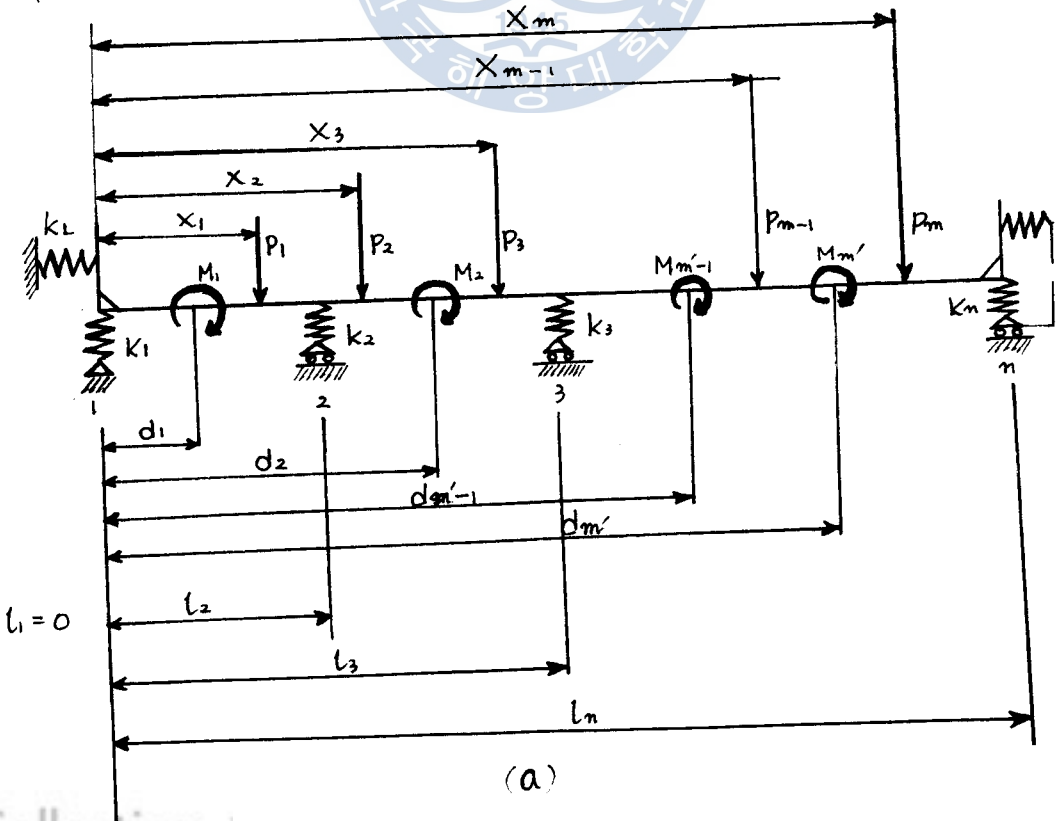
이와 같이 단위계단함수를 이용하면 하중이나 反力の 작용점에서 처짐角과 처짐이 연속이어야 한다는 경계조건이 스스로 만족되어 적분상수의 수효가 훨씬 적어지므로 支點의 反力, 전단력, 굽힘모우멘트, 처짐각, 처짐을 구하는 보의 해석이 훨씬 쉽고 그의 표시가 간단하게 됨을 알 수 있다.

3. 彈性支點을 가진 보의 해석

完全한 意味의 강체는 존재할 수 없고 모든 물체는 外力을 加하면 변형하는 變形體이다. 력우기 공학에서 다루는 대부분의 재질은 탄성체이므로 탄성체위에 탄성지점을 가진 보의 거동은 강체위에 강성지점을 가진 보의 거동은 강체위에 강성지점을 가진 보의 거동과는 差異가 있을 것이 예상된다. 따라서 본연구에서는 보의 모든 지점이 힘에 비례하는 변위가 발생한다고 보고, 보에 관한 정적인 해석을 하여 어떠한 보에도 적용할 수 있도록 전산프로그램을 개발하고자 한다. 물론 탄성지점의 스프링장수를 무한대로 놓으면 강성지점을 가진 보가 되므로

이 때의 보의 거동은 지금까지 確立된 보에 관한 理論과 一致한다.

Fig. 5 (a)는 모든 보를 나타내는 모형도이고 同圖 (b)는 자유물체 선도이다. 이 보의 지점은 n 개이고 각지점의 스프링정수는 $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ 이며 지점들의 위치는 좌단으로부터 각각 거리 $l_1 (= 0), l_2, l_3, \dots, l_n$ 되는 점이다. 좌단과 우단은 탄성고정지점 (Elastically Built-in Supports)으로 모우멘트에 비례하는 각변위를 하며, 그 비례상수를 각각 K_L, K_R 이라 한다. 그러므로 K_L 이 0이면 좌단은 단순지점이 되고 K_L 이 ∞ 이면 좌단은 고정지점이 된다. 이 보에는 좌단으로부터 거리 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ 인 점에 각각 집중하중 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$ 이 작용하고, 좌단으로부터 거리 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_m$ 인 점에 각각 모우멘트 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_m$ 가 작용한다. 또한 이 보는 w 의 등분포하중을 받는다고 한다. 이 보가 좌단 및 우단에서 받는 반작용 모우멘트를 각각 M_L, M_R 이라 하고 각지점에서 받는 반력을 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ 이라 한다.



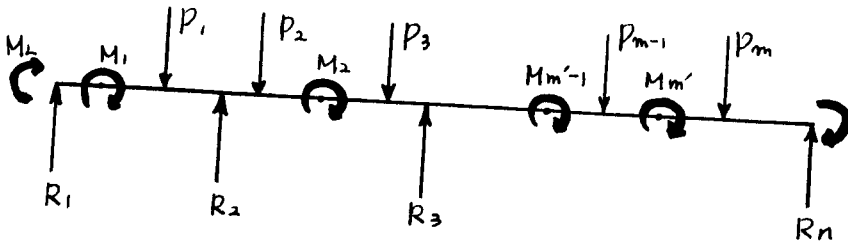


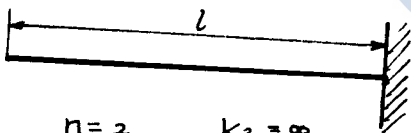
Fig. 5 (a) A model of beam.

(b) Free body diagram.

보의 모델을 이와 같이 나타내면 탄성지점을 가진 모든 보뿐만 아니라 강성지점을 가진 모든 보도 이 모형으로서 표시할 수가 있다. 예를 들면 길이가 2인 외팔보의 경우는 $n=2, k_1=0, k_L=0, k_2=\infty, k_R=\infty, L_2=2$ 이라 놓으면 된다. 여러가지 보를 이 모형으로 나타낼 때 각지점의 스프링정수와 지점의 수를 Fig. 6에 나타내었다.

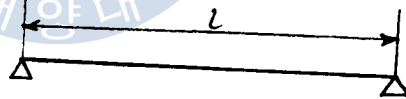
모든 보를 Fig. 5의 모형으로 나타낼 수 있으므로 이 보를 해석하여 전산프로그램으로 작성하여 놓고 출출의 경우에 맞는 입력 데이터를 주면 어떠한 보의 해석도 가능하다.

식 (1)로부터



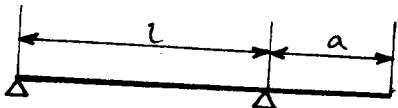
$$\begin{aligned} n &= 2 & k_2 &= \infty \\ k_1 &= 0 & k_R &= \infty \\ k_L &= 0 & L_n &= L \end{aligned}$$

Cantilever beam



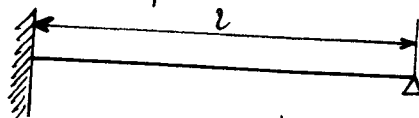
$$\begin{aligned} n &= 2 & k_2 &= \infty \\ k_1 &= \infty & k_R &= 0 \\ k_L &= 0 & L_n &= L \end{aligned}$$

Simple beam



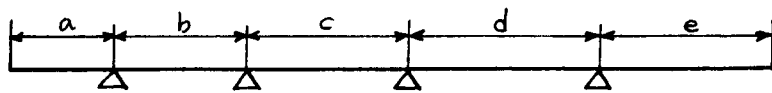
$$\begin{aligned} n &= 3 & k_2 &= \infty & L_1 &= 0 \\ k_1 &= \infty & k_3 &= 0 & L_2 &= L \\ k_L &= 0 & k_R &= 0 & L_n &= L+a \end{aligned}$$

Over-hanging beam



$$\begin{aligned} n &= 2 & k_2 &= \infty \\ k_1 &= \infty & k_R &= 0 \\ k_L &= \infty & L_n &= L \end{aligned}$$

One-end fixed, other-end supported beam



$$\begin{array}{lllll}
 n=6 & k_2=\infty & k_5=\infty & l_1=0 & l_4=a+b+c \\
 k_1=0 & k_3=\infty & k_6=\infty & l_2=a & l_5=a+b+c+d \\
 k_L=0 & k_4=\infty & k_R=0 & l_3=a+b & l_n=a+b+c+d+e
 \end{array}$$

Continuous beam

Fig. 6. Some examples of rigidly supported beams represented with the model

$$\frac{dV}{dx} = -w = -w_0 \quad (19)$$

이 식을 적분하면 전단력 V 을 구할 수 있다.

$$V = -w_0 x + C_1 + \sum_{j=1}^n R_j U(x-l_j) - \sum_{k=1}^m P_k U(x-x_k) \quad (20)$$

경계조건으로 $\lim_{x \rightarrow 0^+} V = R_1$ 을 이용하면 $C_1 = 0$ 이 됨을 알 수 있다.

식 (20)에 $C_1 = 0$ 을 대입하고 이것을 식 (2)에 대입하면

$$\frac{dM}{dx} = V = -w_0 x + \sum_{j=1}^n R_j U(x-l_j) - \sum_{k=1}^m P_k U(x-x_k) \quad (21)$$

이 식을 적분하면 굽힘모멘트 M 을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 M = & -\frac{w_0}{2} x^2 + \sum_{j=1}^n R_j (x-l_j) U(x-l_j) - \sum_{k=1}^m P_k (x-x_k) U(x-x_k) \\
 & + C_2 + M_L + \sum_{k=1}^m M_k U(x-d_k) \quad (22)
 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} M = M_L$ 이므로 $C_2 = 0$ 이어야 한다. $C_2 = 0$ 을 식 (22)에 대입하고 이것을 식 (3)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 EI \frac{d^2 y}{dx^2} = & -M = -M_L + \frac{w_0}{2} x^2 - \sum_{j=1}^n R_j (x-l_j) U(x-l_j) \\
 & + \sum_{k=1}^m P_k (x-x_k) U(x-x_k) - \sum_{k=1}^m M_k U(x-d_k) \quad (23)
 \end{aligned}$$

이 식을 2번 적분함으로써 처짐각 $\frac{dy}{dx}$ 와 처짐 y 를 구할 수 있다.
 단일단면보라고 하면 EI 는 상수이므로

$$EI \frac{dy}{dx} = -M_L x + \frac{w_0}{6} x^3 - \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{2} (x-l_j)^2 U(x-l_j) + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{2} (x-x_k)^2 U(x-x_k) - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (x-d_k) U(x-d_k) + C_3 \quad (24)$$

$$EI y = -\frac{M_L}{2} x^2 + \frac{w_0}{24} x^4 - \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{6} (x-l_j)^3 U(x-l_j) + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{6} (x-x_k)^3 U(x-x_k) - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (x-d_k)^2 U(x-d_k) + C_3 x + C_4 \quad (25)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$k_i (y)_{x=l_i} = R_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (26)$$

$$-K_L \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = M_L \quad (27)$$

$$-K_R \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l_n} = M_R \quad (28)$$

식(25)를 식(26)에 대입하고 식(24)를 식(27) 및 (28)에 대입하여 정리하면

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{6} (l_i - l_j)^3 U(l_i - l_j) R_j + \frac{EI}{k_i} R_i + \frac{1}{2} l_i^2 M_L - l_i C_3 - C_4$$

$$= \frac{w_0}{24} l_i^4 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{6} (l_i - x_k)^3 U(l_i - x_k) - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (l_i - d_k)^2 U(l_i - d_k) \quad (29)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{EI}{K_L} M_L + C_3 = 0 \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (l_n - l_j)^2 R_j + l_n M_L - \frac{EI}{K_R} M_R - C_3 = \frac{W_0}{6} l_n^3 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{2} (l_n - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{m'} M_k (l_n - d_k) \quad (31)$$

한편 평형조건으로부터 다음 식이 성립한다.

$$\sum_{j=1}^n R_j = \sum_{k=1}^m P_k + W_0 \cdot l_n \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^n l_j R_j - M_L - M_R = \sum_{k=1}^{m'} M_k + \sum_{k=1}^m P_k x_k + \frac{W_0}{2} l_n^2 \quad (33)$$

式(29)로부터 구한 n 개의 식과 式(30), (31), (32), (33), 도합 $n+4$ 개의 식으로부터 $n+4$ 개의 미지수 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n, M_L, M_R, C_3, C_4$ 를 구할 수 있다. 따라서 이들 식들을 매트릭스 형태로 고쳐쓰면.

$$\begin{bmatrix} n \times n \\ [G_{11}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times 4 \\ [G_{12}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \\ M_L \\ M_R \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \\ A_{n+1} \\ A_{n+2} \\ A_{n+3} \\ A_{n+4} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

여기서 $[G_{11}]$ 은 $n \times n$ 정방 매트릭스로 主對角線의 i 번째 성분은 EI/k_i 이고 주대각선 上部 성분들은 전부 0이며 주대각선 下部 (i, j) 성분은 $(l_i - l_j)^3/6$ 이다. $[G_{12}]$ 는 $n \times 4$ 매트릭스로

$$[G_{12}] = \begin{bmatrix} l_1^2/2 & 0 & -l_1 & -1 \\ l_2^2/2 & 0 & -l_2 & -1 \\ l_3^2/2 & 0 & -l_3 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_n^2/2 & 0 & -l_n & -1 \end{bmatrix}$$

이며 $[G_{21}]$ 은 $4 \times n$ 매트릭스로

$$[G_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (l_n - l_1)/2 & (l_n - l_2)/2 & (l_n - l_3)/2 & \dots & (l_n - l_{n-1})/2 & (l_n - l_n)/2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_{n-1} & l_n \end{bmatrix}$$

이다. 또한 $[G_{22}]$ 는 4×4 正方 매트릭스로

$$[G_{22}] = \begin{bmatrix} EI/K_L & 0 & 1 & 0 \\ l_n & -EI/K_R & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이다. 式(34) 우변의 각성분은 다음과 같다.

$$A_i = \frac{w_0}{24} l_i^4 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{6} (l_i - x_k)^3 U(l_i - x_k) - \sum_{k=1}^{m'} \frac{M_k}{2} (l_i - d_k)^2$$

$$U(l_i - d_k)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots n$$

$$A_{n+1} = 0, \quad A_{n+2} = \frac{w_0}{6} l_n^3 + \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{2} (l_n - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{m'} M_k (l_n - d_k)$$

$$A_{n+3} = \sum_{k=1}^m P_k + w_0 l_n, \quad A_{n+4} = \sum_{k=1}^{m'} M_k + \sum_{k=1}^m P_k x_k + \frac{w_0}{2} l_n^2$$

이렇게 하여 式(34)로부터 $R_1, R_2, R_3 \dots R_n, M_L, M_R, C_3, C_4$ 를 구할 수 있고 이들을 式(21), (23), (24), (25)에 대입함으로써 各各 전단력, 굽힘 모멘트, 처짐각, 처짐을 구할 수 있다. 여기서 注 意할 점은 k_L, k_R 이 0이어서는 안된다는 점이다. 만약 이 들중 어느 하나라도 0이 되면 式(34)는 풀리지 않게 된다. 따라서 이 경우에는 다음 2가지 方法中 어느 하나를 택하여 조사를 取한다. 첫째 方法은 이들중 어느 것이 0이면 0을 代入하지 말고

실용상 0이라고 看做할 수 있는 아주 작은 수를 대입하면 된다. 둘째 방법은 k_i 가 0이면 R_i 가 0이고 K_i 가 0이면 M_i 가 0이며 K_R 가 0이면 M_R 가 0이라는 사실에 注目하여 式(34)을 修正한다. 즉 k_i 가 0이면 매트릭스 $[G]$ 의 i 번째 行을 전부 0으로 하고 주대각선 i 번째 成分만 1로 하고 A_i 를 0으로 한다. K_i 가 0이면 매트릭스 $[G]$ 의 $n+1$ 번째 行을 전부 0으로 하고 주대각선 $n+1$ 번째 成分만 1로 한다. K_R 가 0이면 매트릭스 $[G]$ 의 $n+2$ 번째 行을 전부 0으로 하고 주대각선 $n+2$ 번째 成分만 1로 하고 A_{n+2} 를 0으로 한다.

以上에서는 탄성지점을 가진 보에 집중하중과 모우멘트 및 보의 全 길이에 걸쳐서 不均분포하중이 작용한다고 보고 해석을 하였는데, 만약 不均분布荷重이 作用할 때는 불균분포하중이 작용하는 區間을 짧게 분해하여 각 요소에서 작용하는 집중하중으로 대치하여 해석하는 방법이 있고, 不均分布荷重을 Fourier 급수로 전개하여 해석하는 방법이 있는데 어느 것이나 무방할 것이라 본다.

4 實驗

本研究에 對한 電算 프로그램을 檢證 하기 위하여 彈性支點을 가진 連續梁을 제작하고 支點의 數와 支點의 種類을 變化하여 여러가지 荷重條件에 對한 支點을 測定하고 計算結果와 比較하였다.



Fig. 7. Universal beam apparatus

Fig. 7와 같은 萬能梁 實驗裝置를 利用하여 彈性支點梁 위에 鐘을 利用하여 荷重을 加하였다.

設置된 鐘 荷重을 加하기 前에 支點의 스프링 定數를 測定하였으며 2차元的 設置된 鐘 狀態에서 測定함으로써 構造物의

彈性스프링 定數를 測定하였다.

스프링 定數의 測定은 주파 2차元的이치를 利用한 靜的測定을 行하였다. 測定結果, 3支點 모두 0.3 kg/mm 이었다.

梁의 斷面은 直四角形 斷面으로 幅이 19 mm 길이 6.2 mm 이었고 길이는 1300 mm 인 軟鋼棒 ($E = 21,000 \text{ kg/mm}^2$) 이었다.

鎚을 利用하여 集中荷重을 2개 作用시키고 3개의 點에서 3點의 點을 測定하였다.

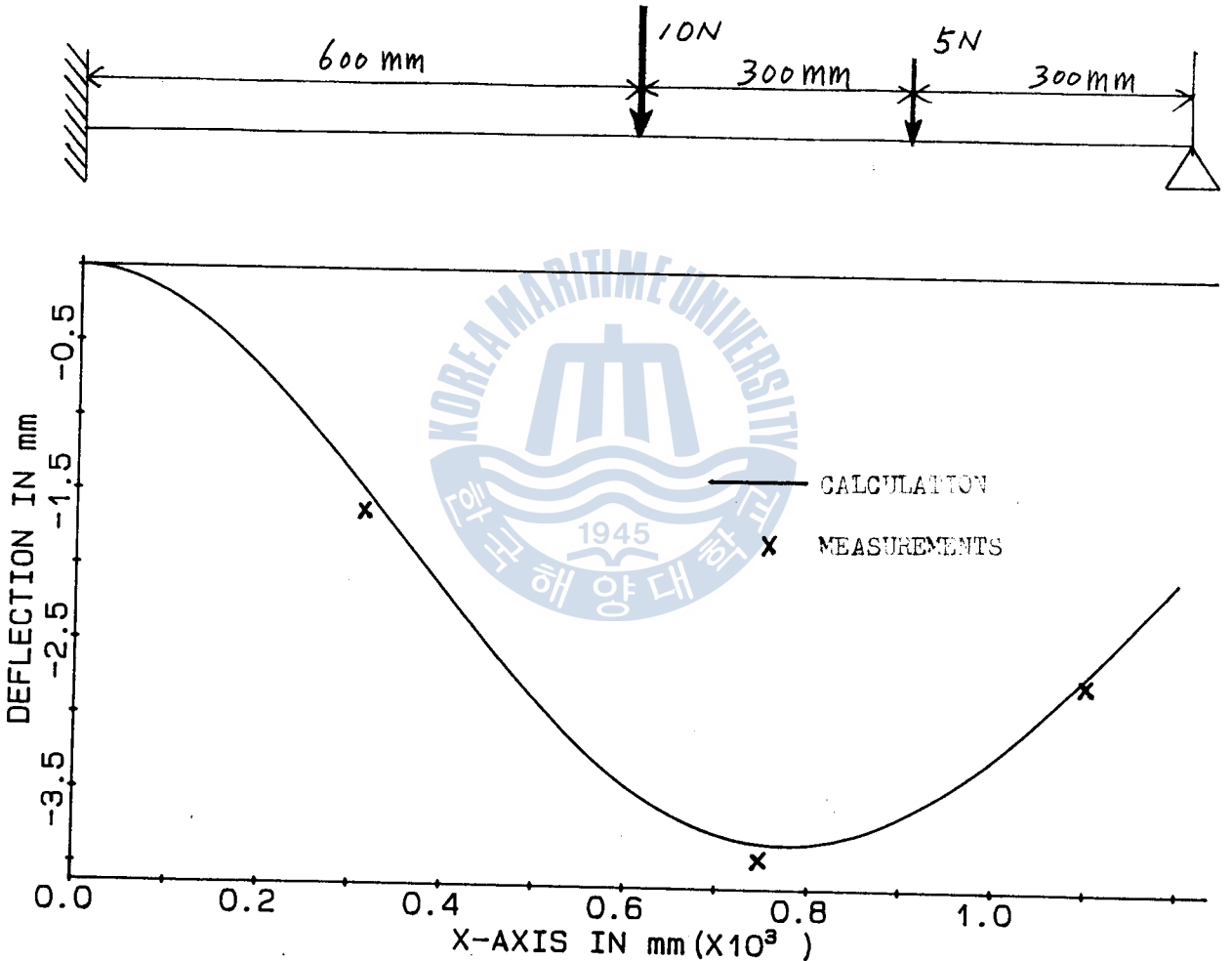


Fig. 8 Deflection of one end fixed other end supported beam.

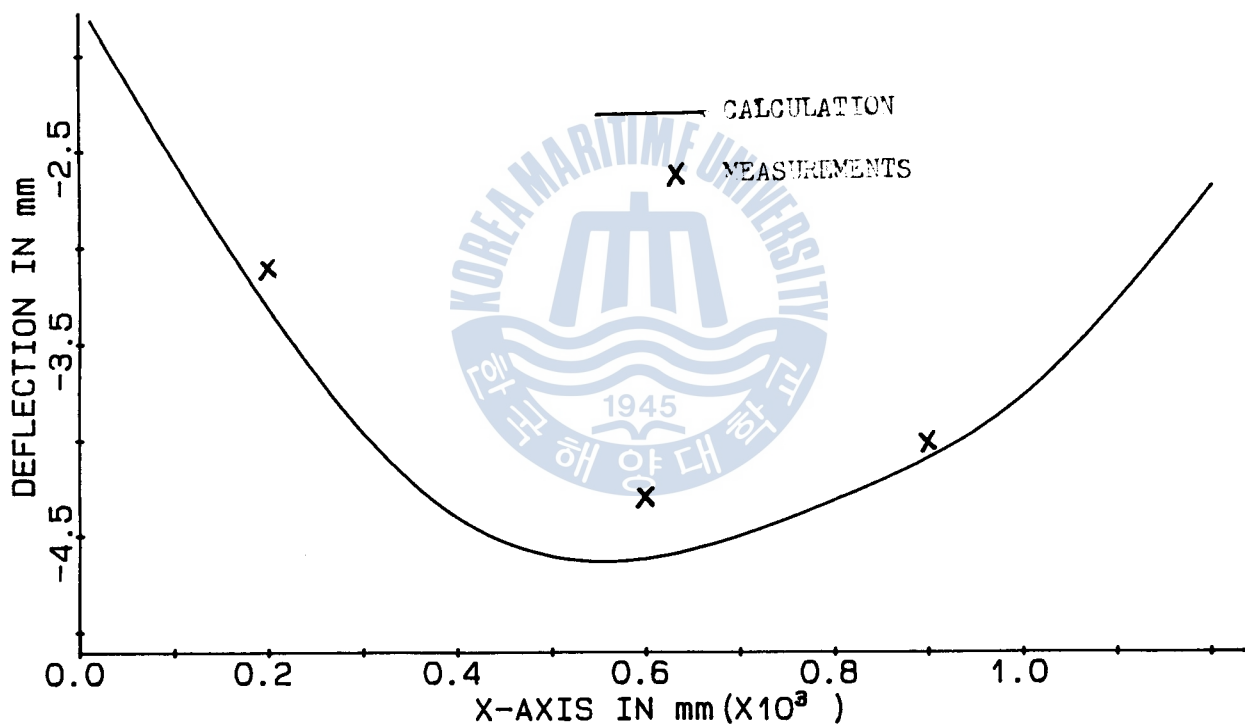
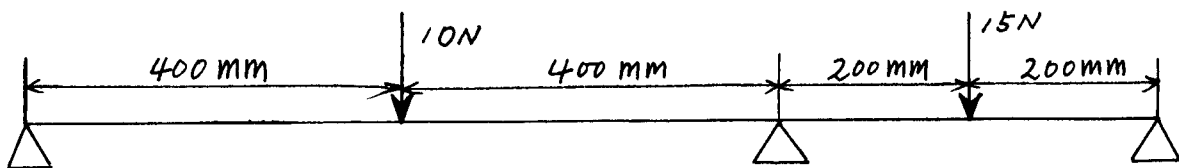


Fig. 9 Deflection of the beam on 3 Supports

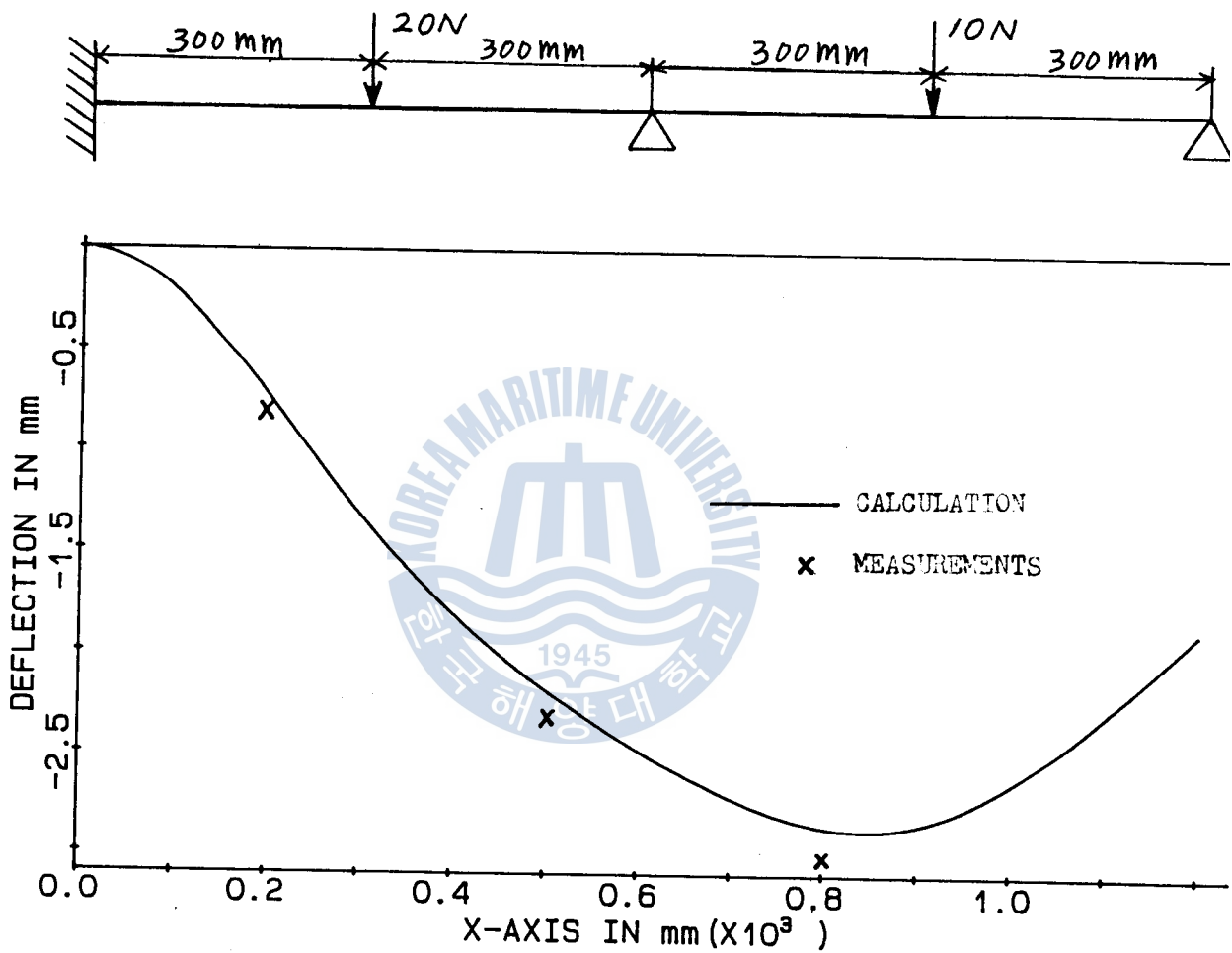


Fig. 10 Deflection of one end fixed continuous beam

Fig 8은 - 端固定 他端支持의 처짐을 나타낸다.

左端은 固定端으로 剛性支點이고 右端은 單純支點으로 彈性支點 (스프링定數 0.3 kg/mm) 이다. 荷重의 크기는 各各 10 N 과 5 N 으로 左端으로부터 各各 600 mm 90 mm 의 位置에 作用하였다. 처짐의 測定點은 左端으로부터 各各 300 mm , 250 mm , 1100 mm 이었고, 처짐량은 1.6 mm , 3.9 mm , 3.9 mm , 27 mm 이었으며 그림에 X 표시 하였다.

처짐의 計算値는 그림에 實線으로 나타내었다.

그림에 나타난바와같이 計算値와 實測値는 잘 一致하고 있음을 알수있다 右端의 彈性支點이 對하여 이 支點에서도 처짐의 相違함을 注目할 必要가 無다.

Fig 9는 3點支持의 처짐을 나타낸다 荷重의 크기는 10 N 과 15 N 이고 作用點은 各各 左端으로부터 400 mm 와 1000 mm 의 位置이다 처짐의 測定點은 左端으로부터 200 mm , 600 mm , 900 mm 이고 처짐량은 各各 3.1 mm , 4.2 mm , 4.0 mm 이었다 여기서도 처짐의 計算値는 實線으로 나타내었고 測定値는 X로 나타내었다.

그림 10은 - 端固定 連續梁의 처짐을 나타낸다

그림의 實線으로 表示된 曲線의 計算値이고 X 표시의 點으로 表示된 것의 實測値이다 그림에 보듯 바와같이 計算値와 實測値는 약간의 誤差가 發生한 경우도 있으나 그 誤差는 2% 이하로 全반적으로 매우 잘 一致함을 알수있다.

또한 그림에서 明白한 바와같이 彈性支點을 가진梁의 靜的인 變位는 剛性支點을 가진梁과는 전혀 다른 것을 알수있다