多變量 回歸模型에 있어서의 誤差變量의 한 推定法

李 鍾 厚　崔 在 龍*

Alternative Estimation of Multivariate 'Errors in variables' Regression Model.

Jong-hoo Lee.　Jae-Rong Choi

目　次

1. 緒　論
2. 母數 B, Ξ, σ^2의 推定
3. 結　論
參考文獻

Abstract

The underlying model;

$$(1)\qquad \begin{cases} \underset{p\times n}{X} = \underset{p\times n}{\Xi} + \underset{p\times n}{E}, \quad E=(e_1,\cdots e_n), \quad e_i \sim N(0,\sigma^2 I_p) \\ Y = B\Xi + F, \end{cases}$$

Where F has the same distribution as E, (X', Y') is observation matrix, $\Xi=(\xi_1,\cdots\xi_n)$, B and σ^2 are unknown parameters, was proposed by Gleser and Watson [3] and studied by Bhargava.[2] They gave the estimators of B, Ξ and σ^2 by the maximum likelihood method under the assumption of normality as belows;

$$(2)\qquad \begin{cases} \hat{\Xi} = LL'X + LM'Y \\ \hat{B} = ML^{-1} \\ \hat{\sigma}^2 = (2np)^{-1}(trW - trD) \end{cases}$$

where $W=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}(X', Y')$, $\begin{pmatrix} L & N \\ M & -Q \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} L & N \\ M & -Q \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} D & O \\ O & \tilde{D} \end{pmatrix}$,

in the ordinary spectral form.

In this note, We try to reduce the dimension to a scalar from by the linear combination of observations in order to estimate B and consider an ordinary multivariate linear model for Ξ, σ^2. As the conclusion, We have the same estimators for B, without the assumption

* 東亜大學校 文理科大學 數學科

of normality, but $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$, Which is consistent for σ^2.

1. 緖 論

두 組의 多變量 誤差變量에 關한 回歸模型의 硏究의 結果가 Gleser 및 Watson(文獻3)에 依하여 1973年에 처음으로 紹介되었다. 그리고 Bhargave(文獻2)에 依하여 若干의 擴張을 하였다.

Gleser 및 Watson은 서로 獨立이며 p次元正規分布를 따르는 觀測量$(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,2,\cdots n)$을 다음과 같이 두었다.

$$(1-1)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{y}_i=B\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{f}_i \end{cases} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

여기서 $\boldsymbol{e}_i$와 $\boldsymbol{f}_i$는 서로 獨立이며 同一한 正規分布 $N(0,\sigma^2 I_p)$를 따르는 確率變數이고 B, ξ, σ^2은 未知의 母數이다. 이들을 $n\geqq 2p$란 假定에서

$$(1-2)\qquad \begin{cases} X=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n),\quad Y=(\boldsymbol{y}_1,\cdots\boldsymbol{y}_n),\quad \Xi=(\xi_1,\cdots\xi_n) \\ E=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n),\quad F=(\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n) \end{cases}$$

으로 두면 行列 X, Y, Ξ, E, F는 $(p\times n)$型이고 다음의 關係式이 成立한다.

$$(1-3)\qquad \underset{(2p\times n)}{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}} = \underset{(2p\times p)}{\begin{pmatrix} I_p \\ B \end{pmatrix}} \underset{(p\times n)}{\Xi} + \underset{(2p\times n)}{\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}}$$

그리고 X와 Y의 結合確率密度函數는

$$(1-4)\qquad p(X,\ Y\ \mid \Xi,\ B,\ \sigma^2)$$
$$=(2\pi\sigma^2)^{-np}exp[(-2\sigma^2)^{-1}\{tr(X-\Xi)(X-\Xi)'+tr(Y-B\Xi)(Y-B\Xi)'\}]$$

이다. 이 線型回歸模型에서 未知母數 Ξ, B, σ^2의 最尤推定量

$$(1-5)\qquad \begin{cases} \hat{\Xi}=LL'X+LM'Y \\ \hat{B}=ML^{-1} \\ \hat{\sigma}^2=(2np)^{-1}(trW-trD) \end{cases}$$

를 求하였다.

但 $\begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}$ $(2p\times p)$는 $W=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}(X, Y)'$의 p個의 最大의 固有値에 對應하는 固有 Vector 行列이고 D는 $(L',\ M')\,W\begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}=D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$ $(\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_p)$卽$W$의 p個의 最大固有値로 된 對角行列이다.

이에 對하여 本論文에서는 母數 Ξ, B, σ^2의 推定量을 딴 方法으로 求하여 Gleser 및 Watson이 求한 最尤推定量과 比較하여 본다.

2. 母數B, Ξ, σ^2의 推定

(1) B의 推定量

p次元 Vector空間에서 Vector $\boldsymbol{n}(p\times 1)$, $\boldsymbol{q}(p\times 1)$를 適切히 取하여 $\boldsymbol{n}'\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{q}'\boldsymbol{y}_i$의 結合을 생각하자 $\boldsymbol{n}'\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}'\boldsymbol{y}_i$는 正規分布를 따르며

$$(2-1) \qquad E(\boldsymbol{n}'\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}'\boldsymbol{y}_i)=(\boldsymbol{n}'-\boldsymbol{q}'B)\xi_i=0$$

이 成立하려면

$$(2-2) \qquad \boldsymbol{n}'-\boldsymbol{q}'\hat{B}=0$$

이 必要하다. 그리고 또

$$(2-3) \qquad \text{var }(\boldsymbol{n}'\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}'\boldsymbol{y}_i)=\sigma^2(\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}+\boldsymbol{q}'\boldsymbol{q})$$

이고

$$(2-4) \qquad \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{n}'\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}'\boldsymbol{y}_i)^2=(\boldsymbol{n}'-\boldsymbol{q}')W\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}\\-\boldsymbol{q}\end{pmatrix}$$

이므로

$$(2-5) \qquad \inf_{\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}+\boldsymbol{q}'\boldsymbol{q}=1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{n}'\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}'\boldsymbol{y}_i)^2$$

을 만족시키는 解$(\boldsymbol{n}', -\boldsymbol{q}')$를 取하여 B를 推定하고자 한다.

(2—5)의 解 $(\boldsymbol{n}', -\boldsymbol{q}')$는 (2—4)를 最小로 한다. 따라서 $(\boldsymbol{n}', -\boldsymbol{q}')$는 W의 最小固有値에 對應하는 固有vector이다. 이 vector를 $(\boldsymbol{n}_1', -\boldsymbol{q}_1')$라 하고 vector $(\boldsymbol{n}_2', -\boldsymbol{q}_2')$를 vector $(\boldsymbol{n}_1', -\boldsymbol{q}_1')$와 수직이고 (2—5)를 만족시키게 取하면 W의 두째로 最小인 固有値에 對應하는 固有vector이다. 이와 같은 方法을 繼續하여 W의 最小의 p個의 固有値에 對應하는 p個의 固有vector $(\boldsymbol{n}_1', -\boldsymbol{q}_1'), (\boldsymbol{n}_2', -\boldsymbol{q}_2'), \cdots, (\boldsymbol{n}_p', -\boldsymbol{q}_p')$를 얻을 수가 있다. 그리고 (2—2)에서

$\hat{B}'(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_p)=(\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_p)$ 즉 $\hat{B}'Q=N$을 얻는다. 단 $(N', -Q')$는 W의 p個의 固有値에 對應하는 固有vector 行列이다.

따라서

$$(2-6) \qquad \hat{B}=Q'^{-1}N'$$

이며 $\hat{B}$는 Gleser가 求한 最尤推定量 $\hat{B}$와 一致함을 알 수 있다. 왜냐하면 W의 固有vector 行列은 $\begin{pmatrix}L & N\\M & -Q\end{pmatrix}$ 이므로

$$(2-7) \qquad \begin{pmatrix}L' & M'\\N' & -Q'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & N\\M & -Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L'L+M'M & L'M-M'Q\\N'L-Q'M & N'N+Q'Q\end{pmatrix}=I_{2p}$$

이다. 그러므로

$$N'L-Q'M=0, \qquad Q'^{-1}N'=ML^{-1}$$

$$(2-8) \qquad \hat{B}=Q'^{-1}N'=ML^{-1}=\hat{B}$$

를 얻는다.

(2) Ξ의 推定量

주어진 多變量線型模型 (1—3)

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\Xi+\begin{pmatrix}E\\F\end{pmatrix}$$

를 생각하자. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$의 分散의 合이 最小가 되게하는 最小自乘法에 依하여 Ξ의 推定量을 求하고자 한다. 即 $\text{tr}\left[\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\Xi\right]\left[\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\Xi\right]'$가 最小되는 Ξ의 推定量을 求하면

$$(2-9) \qquad \hat{\Xi}=\left[(I_p, B')\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\right]^{-1}(I_p, B')\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=(I_p+B'B)^{-1}(X+B'Y)$$

이다.

여기서 $\widehat{B}=ML^{-1}$를 代入한 값을 $\widehat{\Xi}$라하면

$$(2-10)\qquad \widehat{\Xi}=(I_p+L'^{-1}M'ML^{-1})^{-1}(X+L'^{-1}M'Y)$$

$$=(LL')(X+L'^{-1}M'Y) \qquad (\because\ L'L+M'M=I_p)$$

$$=LL'X+LM'Y=\hat{\Xi}$$

와 같이 $\widehat{\Xi}$은 最尤推定量 $\hat{\Xi}$와 같음을 알 수 있다.

(3) 母分散 σ^2의 推定量

正規性을 假定하고 (1—3)의 模型에 對한 σ^2의 推定量을 求하고자 한다. R을

$$(2-11)\qquad R=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\hat{\Xi}=\left[I_{2p}-\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}(I_p+B'B)^{-1}(I_p,\ B')\right]\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}(I_p+B'B)^{-1}(I_p,\ B')$$

으로 두면 $I_{2p}-H$가 冪等行列이므로

$$(2-12)\qquad trRR'=tr[I_{2p}-H]\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}(X'\ \ Y')(I_{2p}-H)=trW(I_{2p}-H)$$

임을 알 수 있다.

이제 $E(trRR')$를 얻기 위하여 먼저 EW를 求한다.

$$(a)\quad EW=E\begin{pmatrix}XX' & XY'\\ YX' & YY'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\sigma^2I_p+\Xi\Xi' & \Xi\Xi'B'\\ B\Xi\Xi' & n\sigma^2I_p+B\Xi\Xi'B'\end{pmatrix}$$

$$=n\sigma^2I_{2p}+\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\Xi\Xi'(I_p,\ B')$$

$$\because\qquad E(X-\Xi)(X-\Xi)'=E(XX')-\Xi\Xi'=n\sigma^2I_p$$

$$(b)\qquad tr\ H=tr(I_p+B'B)^{-1}(I_p,B')\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}$$

$$=trI_p=p$$

$$tr\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\Xi\Xi'(I_p,B')(I_{2p}-H)$$

$$=tr\ \Xi\Xi'(I_p,\ B')(I_{2p}-H)\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}$$

$$=tr\ \Xi\Xi'(I_p,\ B')\left[\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}-H\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\right]$$

$$=tr\ \Xi\Xi'(I_p,\ B')\left[\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\right]$$

$$=0$$

위의 關係는 Ξ, B에 推定量을 代入하여도 成立한다.

(c) $EtrRR'$

$$EtrRR'=trEW(I_{2p}-H)$$

$$=tr\left[n\sigma^2I_{2p}+\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\Xi\Xi'(I_p,\ B')\right](I_{2p}-H)$$

$$=tr\ n\sigma^2(I_{2p}-H)+tr\begin{pmatrix}I_p\\B\end{pmatrix}\Xi\Xi'(I_p,\ B')(I_{2p}-H)$$

$$=np\sigma^2$$

이다. 그러므로 一般으로 다음식을 얻는다.

$$(2-13)\qquad EtrRR'=np\sigma^2$$

다음에 $trRR'$에 $\hat{B}=ML^{-1}$를 代入하자. 먼저

$$\hat{H}=H_{B=ML^{-1}}$$

라 두면

$$I_{2p}-\hat{H}=I_{2p}-\begin{pmatrix}I_p\\ B\end{pmatrix}(I_p+B'B)^{-1}(I_p,B')_{B=ML^{-1}}$$

$$=I_{2p}-\begin{pmatrix}I_p\\ ML^{-1}\end{pmatrix}(I_p+L'^{-1}M'ML^{-1})^{-1}(I_p,L'^{-1}M')$$

$$=I_{2p}-\begin{pmatrix}I_p\\ ML^{-1}\end{pmatrix}(LL')(I_p,\ L'^{-1}M')=\left[I_{2p}-\begin{pmatrix}LL' & LM'\\ ML' & MM'\end{pmatrix}\right]$$

$$=I_{2p}-\begin{pmatrix}L\\ M\end{pmatrix}(L',\ M')$$

따라서

$$trRR'_{B=ML^{-1}}=trW(I_{2p}-\hat{H})=trW\left[I_{2p}-\begin{pmatrix}L\\ M\end{pmatrix}(L',\ M')\right]=trW-trD$$

이다. 그러므로

$$E\left[\frac{1}{np}(trW-trD)\right]=E\left[\frac{1}{np}\ trRR'_{B=ML^{-1}}\right]=\sigma^2$$

을 얻는다. 여기서 $\frac{1}{np}(trW-trD)$를 σ^2의 推定量으로 할 수 있다.

$$(2-14)\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{np}(trW-trD)$$

으로 두면 $\hat{\sigma}^2$은 σ^2의 不偏推定量이며 Gleser가 求한 一致推定量과 같다. 따라서 以上을 綜合하면 다음의 定理를 얻는다.

(定理) 多變量線型假說(1−3)의 未知母數 B, Ξ, σ^2의 推定量을

$$(2-15)\quad \begin{cases}\hat{B}=Q'^{-1}N'=ML^{-1}\\ \hat{\Xi}=(I_p+B'B)^{-1}(X+B'Y),\qquad \hat{\hat{\Xi}}=\hat{\Xi}_{B=ML^{-1}}=LL'X+LM'Y\\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{np}(trW-trD)\end{cases}$$

으로두면 B, Ξ의 推定量은 誤差變數의 正規性의 假定없이 求해지며 $\hat{B}$, $\hat{\Xi}$는 正規分布인 때 最尤推定量이 되고 $\hat{\sigma}^2$은 不偏推定量이며 Gleser가 求한 一致推定量과 같다. 단 $(L',\ M')$, $(N',\ -Q')$는 $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_{2p}>0$을 W의 固有値라 하고 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_p)$, $\tilde{D}=\mathrm{diag}(d_{p+1},\cdots,d_{2p})$라 할때

$$W\begin{pmatrix}L\\ M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L\\ M\end{pmatrix}D,\qquad W\begin{pmatrix}N\\ -Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N\\ -Q\end{pmatrix}\tilde{D}$$

$$N'L-Q'M=0,\qquad L'L+M'M=I_p$$

인 固有vector 行列이다.

3. 結 論

多變量線型 回歸假說에서 未知母數 即 回歸係數 B, 平均値 Ξ, 分散 σ^2의 推定量을 $W=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}(X',Y')$의 固有vector와 變量들의 分散의 合이 最小가 되는 最小自乘法을 써서 求했다.

(1) B의 推定量은 p次元 vector空間의 두 組의 base vector $\boldsymbol{n}_1,\cdots\boldsymbol{n}_p$, $\boldsymbol{q}_1,\cdots\boldsymbol{q}_p$를 取하여 確率變數의 一次結合 $\boldsymbol{n}'\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}'\boldsymbol{y}_i$를 생각하고

$$\inf_{n'n+q'q=1} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{n}x_i - \boldsymbol{q}'\boldsymbol{y}_i)^2$$

을 만족시키고 또 서로 수직인 vector $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{q}_1), \cdots (\boldsymbol{n}_p, \boldsymbol{q}_p)$를 取하면 B의 推定量 $\hat{B}$는 $\hat{B}=Q'^{-1}N'$, $N=(\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_p)$, $Q=(\boldsymbol{q}_1, \cdots \boldsymbol{q}_p)$이며 이는 誤差變量의 分布에 正規性의 假定이 없어도 成立하며 正規分布일 때는 最尤推定量과 一致한다.

(2) Ξ의 推定量은 線型模型 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p \\ B \end{pmatrix} \Xi + \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$ 에서 最小自乘法에 依하여 $\hat{\Xi}=(I_p+B'B)^{-1}(X+B'Y)$를 求하였는데 이 때도 誤差變量의 分布에 關係없으며 特히 $\hat{B}=ML^{-1}$를 代入하면 Gleser가 求한 最尤推定量과 一致한다.

(3) σ^2의 推定量도 最小自乘法에 依하여 求했다.

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{np} RR'_{B=ML^{-1}} = \frac{1}{np}(trW - trD)$는 不偏推定量이며 또 Gleser의 一致推定量과 같다.

參 考 文 獻

1. Anderson, T. W. (1958) An introduction to Multivariate Statistical Analysis, New York: John Wiley and Sons, Inc.
2. Bhargava, A. K. (1977) Maximum Likelihood Estimation in a Multivariate "Errors in variables" Regression Model with unknown error covariance matrix, Commun, Statist. pp. 587—601.
3. Gleser, L. J. and Watson, G. S. (1973) Estimation of a linear transformation Biometrica 60. pp. 525—534.