球面座標系를 써서 풀어본 風成海流問題의 한 解

俞　　洪　　善

A solution of the wind-driven ocean circulation problem in the spherical coorndinate

Hong-Sun Yu

〈目　次〉

Abstract

In the large-scale ocean current problem, the descrepancy between the computed mass transport and the observed one in the westward intensified ocean currents is one of the problems to be solved.

In this paper the author shows that using the spherical coordinate system increases the value of the computed mass transport and makes the discrerancy narrower.

Ⅰ. 序　　論

Stommel(1948), Munk(1950) 등에 의해서 다루어진 海水大循環에 있어서 西岸 경계에서의 流速强化(westward intensification)의 問題는 定性的으로는 잘 說明되었으나 定量的으로는 計算流量이 實測流量에 못미친다는 점에 있어서 問題가 남는다. 本論文에서는 球座標를 사용하여 問題를 풀어 봄으로써 計算流量의 增加를 가져올 수 있었고 그래서 實測流量에 接近시킬 수 있음을 報告코저 한다. Hidaka 가 일시 本論文과 같은 주장을 하였고, 그것이 잘못 계산된 것이라는 Takano 의 논문이 발표된 바 있으나 本論文에서는 Takano의 指摘에 無關하게 球座標를 사용함이 流量計算에 증가를 가져옴을 確認할 수 있었다. 문제를 다루는 방법은 전적으로 Stommel의 방법을 따랐는 바, 이것은 Hidaka 가 Munk 의 방법을 따른 것과 대조 구별되어야 하겠기에 밝혀 두는 바이다.

Ⅱ. 基 本 方 程 式

海水의 大循環을 다루기에 合當하게 Scaling을 한 方程式을 球座標를 써서 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\cos\phi}\left[\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\phi}(v\cos\phi)+\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0$$

$$-2\sin\phi v=-\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\varepsilon u+\tau_{\theta}$$

$$2\sin\phi u=\frac{\partial p}{\partial\phi}-\varepsilon v+\tau_{\phi}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-Q\rho$$

$$\frac{d\rho}{dt}=0$$

여기서 θ, ϕ, z는 各各 經度, 緯度 및 鉛直座標이다. 첨자 θ, ϕ는 東向 및 北向成分을 나타내기 위해 쓰였다. u, v, w는 東, 北 및 鉛直上向의 流速을 나타낸다. p, ρ는 壓力 및 密度를 나타내고 εu, εv는 粘性變形力을, τ는 바람變形力을 나태낸다. 끝으로 Q는 無次元常數이다

위의 식들을 Stommel의 방법에 따라 水深에 대한 積分式으로 바꾸어 보자

$$U=\int_0^{1+h}u\,dz$$

$$V=\int_0^{1+h}v\,dz$$

$$\int_0^{1+h}\frac{\partial w}{\partial z}=w(\theta,\phi,1+h)-w(\theta,\phi,o)=0$$

(∵ $w=0$: 上·下境界에서)

여기서 $z=0$는 底面을 $z=1$은 平均水面을 $z=1+h$는 실제수면을 각각 나타낸다. 그리고 $h\ll 1$과 $\rho\approx 1$임을 감안하여 近似를 取하면

$$\int_0^{1+h}\frac{\partial p}{\partial z}dz=p(\theta,\phi,1+h)-p(\theta,\phi,o)=-Q(1+h)$$

한편

$$\int_0^{z}\frac{\partial p}{\partial z}dz=p(\theta,\phi,z)-p(\theta,\phi,0)=-Qz$$

그러므로

$$p(\theta,\phi,z)=p(\theta,\phi,1+h)+Q(1+h)-Qz$$
$$=p_{atm}+Q(1+h)-Qz$$

여기서 $p(\theta,\phi,1+h)=p_{atm}$, 즉 表面에 作用하는 壓力이 大氣壓임을, 그리고 大氣壓은 水面에 걸

져 一定하다고 생각하면

$$\frac{\partial p(\theta, \phi, z)}{\partial \theta} = Q\frac{\partial h}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = Q\frac{\partial h}{\partial \phi}$$

로 바꿔 쓸 수 있다.

이상의 결과를 利用하여 基本方程式을 바꿔 쓰면

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi}(V\cos\phi) = 0 \tag{1}$$

$$-2\sin\phi V = -\frac{Q}{\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial \theta} - \varepsilon U + \tau_\theta \tag{2}$$

$$+2\sin\phi U = -Q\frac{\partial h}{\partial \phi} - \varepsilon V + \tau_\phi \tag{3}$$

連續方程式인 (1)式에서 流函數 ψ를 정의할 수 있음을 알게 된다. 즉,

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad V = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

라 놓으면 ψ는 (1)식을 만족시킨다. 流函數 ψ를 써서 (2), (3)式을 表現하면

$$-2\tan\phi\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{Q}{\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial \theta} + \varepsilon\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \tau_\theta \tag{4}$$

$$-2\sin\phi\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = -Q\frac{\partial h}{\partial \phi} - \frac{\varepsilon}{\cos\phi}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \tau_\phi \tag{5}$$

여기서 h항들을 없애기 위해서 $\frac{\partial}{\partial \phi}$((4)식 $\times\cos\phi$) $-\frac{\partial}{\partial \theta}$((5)식)을 하면

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\right] + 2\cos\phi\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial \tau_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi\,\tau_\theta) \tag{6}$$

이 식에 $\frac{1}{r^2\cos\phi}$를 곱하면

$$\varepsilon\nabla^2\psi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\,\mathrm{curl}_z\tau \tag{7}$$

를 얻는다. r은 地球半徑을 나타낸다. 그리고 ∇^2은 球座標로 표현한 Laplacian이다. 이제 문제는 (6)식을 풀어 ψ를 求하고 그로부터 U, V 등을 구하는 문제로 귀결되었다.

Ⅲ. 方程式의 解

위의 方程式의 해를 구하는 것은 쉽지 않기 때문에 τ_θ, τ_ϕ를 적당히 선택하되 해를 얻기 편리하도록 선택해서 문제를 풀어보자. 우선

$$\tau_\theta = -\varepsilon\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \tag{8}$$

라 놓아 보자. 그러면 (6)식의 좌편 첫항과 τ_θ항이 상쇄되어

$$\frac{\varepsilon}{\cos\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+2\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\partial\tau_\phi}{\partial\phi} \tag{9}$$

이 된다. 여기서 다시 τ_ϕ를 다음과 같이 놓아 보자.

$$\tau_\phi=-2\frac{\sin^2\phi}{\cos\phi}\Phi\cdot\Theta+k\theta\Phi/\cos\phi \tag{10}$$

그리고 $\psi=\Phi(\phi)\Theta(\theta)$로 놓고 (9)식을 정리하면

$$\varepsilon\Theta''+2\Theta'=k \tag{11}$$

경계조건으로 $\theta=0$ 및 θ_0에서

$$\psi=0;\ \text{즉}\ \Theta=0$$

가 되도록 하는 해는

$$\Theta=\frac{k}{2}[\theta-\theta_o(1-e^{-2\theta/\varepsilon})] \tag{12}$$

편의상 東端境界를 $\theta=0$로 잡았고 西端을 $\theta=\theta_o$로 할 때 $\varepsilon=0.01$정도로 보았을 때 $e^{-2\theta_o/\varepsilon}\simeq0$으로 볼 수 있다는 점을 경계조건 논의에 이용하였다.

한편 이상의 논의에서 $\Phi(\phi)$는 어떠한 함수형이라도 (9)식을 만족할 수 있음을 알 수 있다. 다시 말해서 $\phi=\phi_1$, ϕ_2에서 $\psi=0$, 즉 $\Phi=0$의 경계조건을 만족하도록 하는 동시에 (8)식 및 (10)식에 대입해서 현실에 근사한 바람변형력을 만들도록 하는 함수형을 선택하는 자유가 주어진 셈이다. 실제 지구표면에 부는 바람의 거시적인 경향은 북으로 가면서 무역풍 및 편서풍으로 교대로 방향이 바뀌는 것으로 볼 수 있고 따라서 바람에 의한 변형력의 두 방향성분 τ_θ와 τ_ϕ는 위도에 따라 삼각함수형으로 변하는 것으로 표현할 수 있다. 즉,

$$\Phi=a\cos(\alpha\phi+\phi_o) \tag{13}$$

이것이 경계조건을 만족하기 위해서는

$$\alpha=n\pi/(\phi_2-\phi_1) \tag{14}$$

$$\phi_o=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2n\phi_1}{\phi_2-\phi_1}\right) \tag{15}$$

이 되어야 한다($n=0,1,2,3,\cdots\cdots$).

이제 流函數는

$$\psi_n=\frac{ak}{2}[\theta-\theta_o(1-e^{-2\theta/\varepsilon})]\cos(\alpha\phi+\phi_o) \tag{16}$$

로 얻어졌다. 그리고 바람변형력은 그 東西成分 및 南北成分이 各各

$$\tau_\theta=-\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$=-\frac{\varepsilon ak\alpha}{2}[\theta-\theta_o(1-e^{-2\theta/\varepsilon})]\sin(\alpha\phi+\phi_o) \tag{17}$$

$$\tau_\phi=\frac{ka}{\cos\phi}[\theta\cos^2\phi-\theta_o(1-e^{-2\theta/\varepsilon})\sin^2\phi]\cos(\alpha\phi+\phi_o) \tag{18}$$

여기서 상수들을 적절하게 결정해 보자. 우리의 고찰영역을

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

정도로 잡고 이 위도영역에서 東西風이 一週期半 정도의 변화폭을 갖는다고 생각하면

$$n = 3, \quad \alpha = 9, \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

로 결정된다. 그리고 $\varepsilon = 0.01$ 정도로 보고 바람변형력의 크기를 1 dyne/cm^2 정도로 보면[1] 대략

$$\frac{\varepsilon a k \alpha}{2} \simeq 1 \,(\text{dyne/cm}^2)$$

$$\frac{ak}{2} \simeq 20 \,(\text{dyne/cm}^2)$$

가 된다. 따라서

$$\psi = 10\left[\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} e^{-200\theta}\right] \cos\left(9\phi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{19}$$

$$U = 90\left[\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} e^{-200\theta}\right] \sin\left(9\phi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{20}$$

$$V = 10\left[1 - 100\pi e^{-200\theta}\right] \frac{\cos\left(9\phi + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\phi} \tag{21}$$

Ⅳ. 結　　論

이상의 결과에 대해서 몇가지 논의를 하기 위해 流線의 모양을 생각해 보자.

위에서 생각한 위도영역을 삼등분해서 각각 유선을 그릴 수 있는데, 위도에 따라 $\cos\phi$만큼 東西幅이 축소되는 효과를 고려하지 않고 보면 流線의 모양은 三緯度帶에서 같은 모양으로 나타난다. 다만 흐름의 방향이 다를 뿐이다. 정리해 보면

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{9}$: 反時計方向

$\frac{\pi}{9} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{9}$: 時計方向

$\frac{2\pi}{9} \leq \phi \leq \frac{1}{3}\pi$: 反時計方向

우리의 관심은 제 2 위도대의 것으로 한정키로 하자. (이 위도대의 西岸流 흐름이 太平洋에서는 Kuroshyo, 大西洋에서는 Gulf stream으로 나타난다).

한 緯度帶의 全東西幅에 대한 西岸暖流의 幅의 比를 δ라 하고 이를 구해보자(우리의 경우 δ는 三緯帶에서 같은 값을 갖는다). 西岸流의 幅은 西岸으로부터 流函數가 極値를 갖는 點까지의 거리로 계산될 수 있다. ψ가 極値를 갖는 點에서 $\partial\psi/\partial\theta = 0$이므로 그 點의 緯度 θ_m은

$$\theta_m = \frac{\ln 100\pi}{200} = 0.0288 = 0.732 \times \frac{\pi}{80}$$

이것을 전경도 $\frac{\pi}{2}$로 나누어 주면

$$\delta = 1.83 \times 10$$

즉 18%, 혹은 1000 km 幅에 대해서 180 km 幅에 해당된다. 이 결과는 Stommel[1]의 결과 $\delta=0.08$ 보다 약 $\frac{1}{4}$ 정도로 작은 것으로 수송량이 4배 크게 계산될 수 있음을 나타낸다. (Stommel의 원계산은 $\varepsilon=0.02$로 되어 있는데 비교를 위해 $\varepsilon=0.01$로 해서 다시 계산한 것이 $\delta=0.08$이다). 즉 구좌표계를 써서 계산한 결과 수송량에 대한 계산치와 실측치 사이의 불일치를 훨씬 좁힐 수 있게 되었음을 알 수 있다.

논의 방법이 기본방정식부터 다른 Munk의 결과

$$\delta=2.27\times10^{-2}$$

와 비교해도 본 논문의 계산이 더 좋은 결과를 얻고 있음을 알 수 있다.

Stommel[4]의 진술에 따르면 Munk의 결과로는 수송량의 절반밖에 설명할 수 없다고 하는데 이 점을 감안할 때 본 논문의 결과는 상당한 현실접근을 이룬 것으로 해석할 수 있다.

본 논문에서는 Stommel이 西沿岸流의 强化現象을 설명하기 위해서 채용한 대단히 단순화된 방법을 따르되 다만 구좌표계를 채용, 수정논의한 바 좋은 결과를 얻었다. 따라서 좀 더 철저하게 海洋大循環問題를 다룬 Munk의 방법을 역시 구좌표계를 써서 수정논의해 보면 수송량계산상의 불일치 문제를 훨씬 개선할 수 있지 않을까 생각이 된다.

참 고 문 헌

1. Stommel H. (1948) : The westward intensification of wind-driven ocean currents, Trans. Amer. Geophys. Union 29; 202～206.
2. Munk, W.H. (1950) : On the wind driven ocean circulation. J. of Meteror.; 7:79～93.
3. Pedlosky, J. (1979) : Geophysical Fluid Dynamics Chapter 5. Springer-Verlag.
4. Stommel, H. (1960) : The Gulf Stream, Chapter 7. the Cambridge University Press.
5. Hidaka, K. (1951) : Mass transport in ocean currents and lateral mixing. Geophysical Notes. Univ. of Tokyo. Vol. 2. No. 3 p. 1～4.
6. Takano, K. (1966) : Effet de la terre sur la circulation generale dans un ocean. J. of the Oceanographic Society of Japan, Vol. 22, No. 6, p. p. 255～263.
7. Veronis, G. (1973) : Large scale ocean circulation Academic Press, p. 31.
8. Veronis, G. (1973) : ibid. p. 43.