球面圖形의 研究 (續)

金　　相　　輪

A Study of Figures on Spherical Surfaec (Continued)

Kim Sang-Lyun

目　　次

Abstract

This article is concerned with the study of the great circle on a unit sphere by making use of longitude and latitude coordinates.

In Section 3, spherical distance between two points, longitude and latitude coordinates of a point divided with the ratio of $m:n$ internally and externally on a great circle between two points and longitude and latitude equations of a great circle have been calculated in terms of spherical trigonometry.

In Section 4. various vector calculations have been simplified in terms of calculations of fundamental quantities which are X, Y, Z or A_m, B_m, C_m, components of position vectors of a point on a sphere. Therefore, the results of Section 3 and also other formulas have been derived without introducing spherical trigonometry. In particular, an angle of spherical triangle has been expressed with lengths of three sides.

In Section 5, the fundamental quantities were differentiated and their geometrical meanings were reviewed.

Finally, in Section 6, the known farmulas of a tangential vector of a spherical curve, differential coefficent dy/dx, a line element ds, and Rhumb line were obtained in terms of the fundamememtal quantities.

1. 緖　　言

球面上의 圖形 特히 大圈에 관한 諸 公式의 誘導는 從來 主로 球面三角法에 依持해 왔으나 그에서 期待되는 諸 結果는 限定된 感이 있고 새로운 方法의 導入이 期待되는 것은 피할 수 없는 추세라 할 것이다.

著者는 前日에 「벡터에 의한 球面三角法의 再組織」을 發表한바 있었으나[1)] 이번에는 方法을 달리한 「벡터에 의한 大圈의 觀察」을 企圖한다.

球面上의 점의 球中心에 관한 位置벡터의 i, j, k 成分은 當然히 經緯度座標로써 表示된다. 이 i, j, k 成分 사이의 관계를 究明하므로써 벡터의 演算을 圓滑化시킬 수 있지 않겠는가 하는 素朴한 着眼이 이 小稿을 낳게 하는 動機였고 그러한 演算에서 誘導된 結果와 比較하기 위하여 本稿는 球面三角法에 의한 方法의 考察에서 부터 始作된다. 이 部分은 著者가 前에 執筆했던 것을 改編한 것이다[2)]. 그리고 大圓, 等緯度圓, 航海線等의 數學的인 用語는 이것을 航海學 用語인 大圈, 距等圈, 航程線으로 統一하였다.

---

1), 2) 金相輪 : 球面圖形의 硏究; 韓國海洋大學 論文集, 第8輯, 1973.

2. 記 號

x…点 P의 經度座標

y…点 P의 緯度座標

(x, y)…点 P의 經緯度座標

N…北極

S…南極

C…球 中心

G…Greenwich

O…經緯度 直角座標系의 原点

O'…經緯度 直角座標系의 裏点

(r, θ)…球面 極座標

(x_m, y_m)…点 P_m의 經緯度座標, $m=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$

S_{mn}…点 P_m, P_n 間의 球面距離, $m, n=1, 2, 3, \cdots\cdots$

$$\left.\begin{array}{l} X=\cos y \cos x \\ Y=\cos y \sin x \\ Z=\sin y \end{array}\right\} \cdots \text{点 } P(x\ , y)\text{의 直角座標}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_m=\cos y_m \cos x_m \\ B_m=\cos y_m \sin x_m \\ C_m=\sin y_m \end{array}\right\} \cdots \text{点 } P_m(x_m, y_m)\text{의 直角座標},\ m=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

P_{mn}…点 P_m, P_n을 지나는 大圈의 極, $m, n=0, 1, 2, \cdots\cdots$

(x_{mn}, y_{mn})…点 P_{mn}의 經緯度座標, $m, n=0, 1, 2, \cdots\cdots$

(A_{mn}, B_{mn}, C_{mn})…点 P_{mn}의 直角座標

θ_{qpr}…点 P_p, P_q를 지나는 大圈과 点 P_p, P_r를 지나는 大圈의 交角, $q, p, r=1, 2, 3, \cdots\cdots$

P_x…벡터 $\dfrac{\partial X}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial Y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial Z}{\partial x}\boldsymbol{k}$에 관여하는 球面上의 点

P_{xxy}…벡터 $\dfrac{\partial^3 X}{\partial x^2 \partial y}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial^3 Y}{\partial x^2 \partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y}\boldsymbol{k}$에 관여하는 球面上의 点

3. 球面三角法에 의한 大圈의 考察

3-1. 經緯度座標

球面上의 三角形의 性質을 硏究하는데 있어서는 大圈弧의 크기는 그 大圈弧의 兩端을 球中心과 이어서 되는 扇形의 中心角을 가지고 나타내기 때문에 球의 半徑의 크기는 뜻이 없다. 따라서 앞으로 항상 半徑의 크기가 1인 單位 球面을 생각하기로 한다.

地球를 單位球라 생각하고 地球赤道를 x軸, Greenwich를 지나는 本初子午線을 y軸으로 定하면 x, y軸은 直交하고 그 交点 O는 이 直角座標系의 原点이 된다. 球面上의 任意点 P의 經度, 緯度를 x, y라고 할 때 (x, y)는 点 P의 經緯度座標가 된다.

地球의 北極 N와 点 P를 지나는 大圈이 x軸과 만나는 点을 A라고 할때 $OA=x$, $PA=y$가 된다. 그리고 OA, PA는 直交한다. 經度 x는 点 P가 東經度이면 $+$를, 西經度이면 $-$를 붙이고 또 緯度 y도 点 P가 北緯度이면 $+$를, 南緯度이면 $-$를 붙인다. 따라서

$$-180° \leqq x \leqq 180°, \quad -90° \leqq y \leqq 90°$$

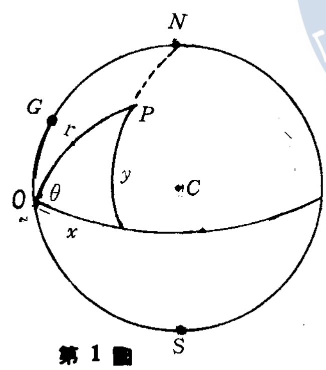
이다.

原点 O는 $(0, 0)$, 北極 N은 $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, 또 南極 S는 $\left(a, -\frac{\pi}{2}\right)$인 經緯度座標를 가진다. 단 a는 不定이다. $(\pm 180°, 0)$인 經緯度座標를 가지는 点을 裏点이라고 이름 붙여 놓는다. 이러한 球面上의 直角座標系는 經緯度座標系가 된다.

航海學等에서는 經度, 緯度의 順이 아니고 緯度, 經度의 順으로 取扱하는 傾向이 있으나 平面 直角座標의 경우와 比較할때 數學的으로는 經度, 緯度의 順이 妥當한 것 같아서 위와 같이 經度를 x, 緯度를 y로 採擇하기로 한 것이다.

3-2. 球面 極座標

球面上에 点 $P(x, y)$가 주어질 때 P를 原点 O와 大圈弧로 맺고 $OP=r$ 라 한다. 또 大圈弧 OP가 陽의 x軸과 만드는 角을 θ라고 할 때 (r, θ)는 点 P의 球面 極座標가 된다. 여기서 r는 항상 陽이다. 또 $0° \leqq \theta \leqq 360°$로 定한다. 이때 Napier의 Rule를 適用하여 (第 1 圖)



第 1 圖

$$\left.\begin{array}{l} \cos r = \cos x \cos y \\ \tan \theta = \dfrac{\tan y}{\sin x} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan x = \tan r \cos \theta \\ \sin y = \sin r \sin \theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}2)$$

가 成立하고 또 第一cosine法則을 適用하여

$$\cos y = \cos r \cos x + \sin r \sin x \cos \theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}3)$$

를 얻는다. 이들은 $0° \leqq \theta \leqq 360°$ 인 때 x, y가 各各 陽이건 陰이건 간에 成立한다. 단 P의 經度는 $\pm 180°$가 아니라야 한다. (3-2)에서

$$\cos \theta = \frac{\tan x}{\tan r}, \quad \sin \theta = \frac{\sin y}{\sin r}$$

이고 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\frac{\sin^2 y}{\sin^2 r} + \frac{\cos^2 r}{\sin^2 r} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}4)$$

이 成立하고 여기서 $\cos r$ 대신에 (3-1)의 첫 式을 代入하여

$$\sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y = \sin^2 r \quad \cdots\cdots(3\text{-}5)$$

를 얻는다. 그러나 (3-4)는 (3-1)의 첫 式을 제곱하고 變形하여 얻을 수도 있다.

3-3. 二点 $P_m(x_m,\ y_m)$, $P_n(x_n,\ y_n)$ 사이의 球面距離

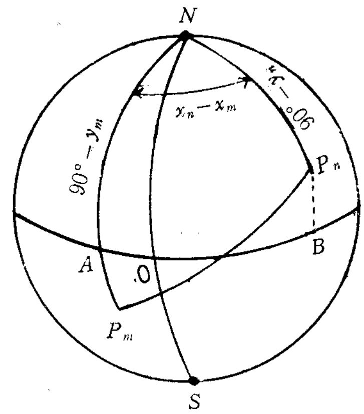
P_m, P_n 사이의 球面距離를 S_{mn} 라고 하자, 第 2 圖의 球面三角形 NP_mP_n에서 第一cosine法則을 適用하여

$$\cos S_{mn} = \cos(90° - y_m)\cos(90° - y_n) + \sin(90° - y_m)\sin(90° - y_n)\cos(x_n - x_m)$$

이고 따라서

$$\cos S_{mn} = \sin y_m \sin y_n + \cos y_m \cos y_n \cos(x_m - x_n) \cdots (3\text{-}6)$$

를 얻는다. 球面三角形에서는 角과 邊의 크기는 180° 보다 작아야 하므로 $x_n - x_m (>0)$과 S_{mn}는 180° 보다 작아야 하는 것은 勿論이다.



第 2 圖

裏点 O'의 附近에서는 第 3 圖의 경우 $x_m > 0$, $x_n < 0$ 이고

$$AO' = 180° - x_m, \quad O'B = 180° + x_n$$

이므로

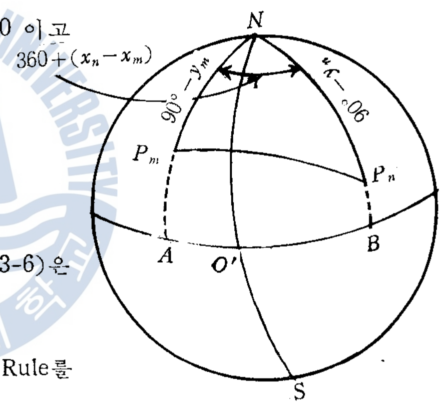
$$\angle P_m N P_n = AB = 360° + (x_n - x_m)$$

이고 따라서 公式 (3-6)은 이 때에도 正當하다.

特別히 二点이 $P_1(m, 0)$, $P_2(0, n)$로 주어질 때는 (3-6)은

$$\cos S_{12} = \cos m \cos n \quad \cdots\cdots(3\text{-}7)$$

이 된다. 이것은 勿論 直角三角形 P_1OP_2에서 Napier의 Rule를 써서도 얻을 수 있다.



第 3 圖

3-4. 二点 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$를 $m:n$로 內分, 外分하는 点 P의 經緯度座標 (x, y)

P_1, P_2의 球面距離를 S_{12}라고 한다.

Ⅰ. 內分의 경우

$$P_1P = \frac{m}{m+n} S_{12} = a, \quad PP_2 = \frac{n}{m+n} S_{12} = b$$

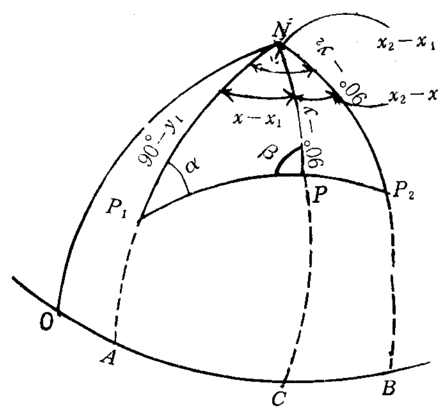
$$\angle NP_1P = \alpha, \quad \angle NPP_1 = \beta$$

라 놓는다. 第 4 圖의 三角形 NP_1P, NP_1P_2에서 各各 第一cosine法則을 適用하여

$$\cos(90° - y) = \cos a \cos(90° - y_1) + \sin a \sin(90° - y_1)\cos\alpha$$

$$\cos(90° - y_2) = \cos S_{12} \cos(90° - y_1) + \sin S_{12} \sin(90° - y_1)\cos\alpha$$

이고 이것은



第 4 圖

$$\sin y = \cos a \sin y_1 + \sin a \cos y_1 \cos \alpha$$

$$\sin y_2 = \cos S_{12} \sin y_1 + \sin S_{12} \cos y_1 \cos \alpha$$

와 같다. 위의 둘째 式에서 $\cos \alpha$를 求하여 첫째 式에 代入하면

$$\sin y = \cos a \sin y_1 + \sin a \cos y_1 \frac{\sin y_2 - \sin y_1 \cos S_{12}}{\cos y_1 \sin S_{12}}$$

$$= \frac{1}{\sin S_{12}} \{\sin y_1 (\cos a \sin S_{12} - \sin a \cos S_{12}) + \sin a \sin y_2\}$$

$$= \frac{1}{\sin S_{12}} \{\sin y_1 \sin(S_{12} - a) + \sin a \sin y_2\}$$

$$= \frac{1}{\sin S_{12}} \{\sin y_1 \sin b + \sin a \sin y_2\} = \frac{\sin a}{\sin S_{12}} \{\sin y_2 + \frac{\sin b}{\sin a} \sin y_1\}$$

이 되고 따라서

$$\sin y = \frac{\sin \frac{m}{m+n} S_{12}}{\sin S_{12}} \left\{ \sin y_2 + \frac{\sin \frac{n}{m+n} S_{12}}{\sin \frac{m}{m+n} S_{12}} \sin y_1 \right\}$$

이 成立한다.

다음에 또 三角形 NP_1P와 NP_2P에서 sine法則을 適用하여

$$\frac{\sin(90° - y_1)}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin(x - x_1)}, \quad \frac{\sin(90° - y_2)}{\sin(180° - \beta)} = \frac{\sin b}{\sin(x_2 - x)}$$

를 얻고 따라서

$$\sin \beta = \frac{\sin(x - x_1) \cos y_1}{\sin a} = \frac{\sin(x_2 - x) \cos y_2}{\sin b}$$

$$\sin(x_2 - x) \cos y_2 = \frac{\sin b}{\sin a} \sin(x - x_1) \cos y_1$$

$$(\sin x_2 \cos x - \cos x_2 \sin x) \cos y_2 = \frac{\sin b}{\sin a} \{\sin x \cos x_1 - \cos x \sin x_1\} \cos y_1$$

이것을 簡單히 하여

$$\tan x = \frac{\cos y_2 \sin x_2 + \frac{\sin b}{\sin a} \cos y_1 \sin x_1}{\cos y_2 \cos x_2 + \frac{\sin b}{\sin a} \cos y_1 \cos x_1}$$

를 얻는다. 따라서 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$를 $m:n$으로 内分하는 点 P의 經緯度座標 (x, y)는

$$\left.\begin{aligned} \tan x &= \frac{\cos y_2 \sin x_2 + H_1 \cos y_1 \sin x_1}{\cos y_2 \cos x_2 + H_1 \cos y_1 \cos x_1} \\ \sin y &= \frac{\sin \frac{m}{m+n} S_{12}}{\sin S_{12}} (\sin y_2 + H_1 \sin y_1) \\ H_1 &= \frac{\sin \frac{n}{m+n} S_{12}}{\sin \frac{m}{m+n} S_{12}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}8)$$

도서 주어진다. 裏点의 附近에서도 이것은 不變이다.

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$의 中点의 經緯度座標는 (3-8)에서 $H_1=1$ 이고

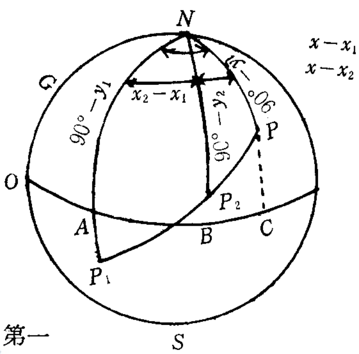
$$\left.\begin{aligned} \tan x &= \frac{\cos y_2 \sin x_2 + \cos y_1 \sin x_1}{\cos y_2 \cos x_2 + \cos y_1 \cos x_1} \\ \sin y &= \frac{\sin\frac{S_{12}}{2}}{\sin S_{12}}(\sin y_2 + \sin y_1) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}9)$$

이 된다.

Ⅱ. 外分의 경우

$$P_1P = \frac{m}{m-n} S_{12} = a, \quad P_2P = \frac{n}{m-n} S_{12} = b$$

$$\angle NP_1P_2 = \alpha, \quad \angle NPP_2 = \beta, \quad m > n$$



第 5 圖

라 하면 (第 5 圖), 三角形 NP_1P_2, NP_1P에서 各各 第一 cosine法則을 適用하여

$$\cos(90°-y_2) = \cos(90°-y_1)\cos S_{12} + \sin(90°-y_1)\sin S_{12} \cos\alpha$$

$$\cos(90°-y) = \cos(90°-y_1)\cos a + \sin(90°-y_1)\sin a \cos\alpha$$

를 얻고 따라서

$$\sin y_2 = \sin y_1 \cos S_{12} + \cos y_1 \sin S_{12} \cos\alpha$$

$$\sin y = \sin y_1 \cos a + \cos y_1 \sin a \cos\alpha$$

를 얻는다. 따라서

$$\sin y = \sin y_1 \cos a + \cos y_1 \sin a \frac{\sin y_2 - \sin y_1 \cos S_{12}}{\cos y_1 \sin S_{12}}$$

$$= \frac{1}{\sin S_{12}}\{\sin y_1 \cos a \sin S_{12} - \sin y_1 \sin a \cos S_{12} + \sin a \sin y_2\}$$

$$= \frac{1}{\sin S_{12}}\{\sin y_1 \sin(S_{12}-a) + \sin a \sin y_2\}$$

$$= \frac{1}{\sin S_{12}}\{\sin a \sin y_2 - \sin b \sin y_1\}$$

$$= \frac{\sin a}{\sin S_{12}}\left\{\sin y_2 - \frac{\sin b}{\sin a}\sin y_1\right\}$$

이다. 다음에 또 三角形 NP_1P, NP_2P에서 各各 sine法則을 適用하여

$$\frac{\sin(90°-y_1)}{\sin\beta} = \frac{\sin a}{\sin(x-x_1)}, \quad \frac{\sin(90°-y_2)}{\sin\beta} = \frac{\sin b}{\sin(x-x_2)}$$

를 얻고 따라서

$$\sin\beta = \frac{\sin(x-x_1)\cos y_1}{\sin a} = \frac{\sin(x-x_2)\cos y_2}{\sin b}$$

이다. 右邊의 等式에서

$$\frac{\sin(x-x_1)}{\sin(x-x_2)}=\frac{\sin a}{\sin b}\;\frac{\cos y_2}{\cos y_1}$$

$$\frac{\sin b}{\sin a}\{\sin x\cos x_1-\cos x\sin x_1\}\cos y_1=\{\sin x\cos x_2-\cos x\sin x_2\}\cos y_2$$

$\cos x$ 로써 兩邊을 나누고

$$\frac{\sin b}{\sin a}\{\tan x\cos x_1-\sin x_1\}\cos y_1=\{\tan x\cos x_2-\sin x_2\}\cos y_2$$

$$\tan x\left\{\frac{\sin b}{\sin a}\cos y_1\cos x_1-\cos y_2\cos x_2\right\}=\frac{\sin b}{\sin a}\cos y_1\sin x_1-\cos y_2\sin x_2$$

$$\tan\ x=\frac{\cos y_2\sin x_2-\dfrac{\sin b}{\sin a}\cos y_1\sin x_1}{\cos y_2\cos x_2-\dfrac{\sin b}{\sin a}\cos y_1\cos x_1}$$

를 얻는다. 따라서 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$를 $m:n$로 外分하는 点 P의 座標 (x,y)는

$$\left.\begin{aligned}&\tan x=\frac{\cos y_2\sin x_2-H_2\cos y_1\sin x_1}{\cos y_2\cos x_2-H_2\cos y_1\cos x_1}\\&\sin y=\frac{\sin\dfrac{m}{m-n}S_{12}}{\sin S_{12}}(\sin y_2-H_2\sin y_1)\\&H_2=\frac{\sin\dfrac{n}{m-n}S_{12}}{\sin\dfrac{m}{m-n}S_{12}},\quad x\neq 90^\circ\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}9)$$

로써 주어진다.

公式 (3-9)는 $m<n$ 인 때에도 變함 없이 成立한다. 그러나 外分의 比 $m:n$는 任意로 주어질 수는 없고 x_2-x가 180° 보다 작게 주어져야 하는 것은 球面三角法의 性質上 不得已한 일이다.

3-5. 点 $P_0(x_0,\ y_0)$을 極으로 하는 大圈의 經緯度方程式

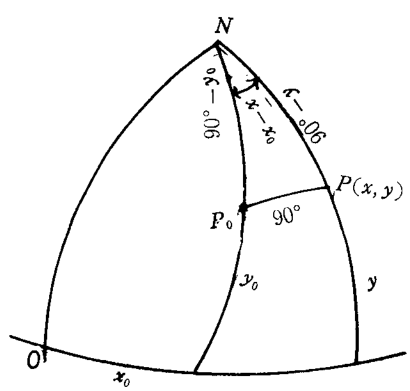
P_0을 極으로 하는 大圈上의 任意 一点을 $P(x,\ y)$라고 할 때 P_0, P를 맺는 大圈弧의 길이는 90°가 된다. 第 6 圖의 球面三角形 $NP_0\ P$에서 第一cosine法則을 適用하여

$$\begin{aligned}\cos 90^\circ=&\cos(90^\circ-y_0)\cos(90^\circ-y)\\&+\sin(90^\circ-y_0)\sin(90^\circ-y)(x-x_0)\end{aligned}$$

를 얻고 따라서

$$\sin y_0\sin y+\cos y_0\cos y\cos(x-x_0)=0\cdots(3\text{-}10)$$

이다. 이것은 求하는 大圈의 經緯度方程式이다.



第 6 圖

備考 大圈의 極은 반드시 두개 있고, 그 하나의 極이 北緯度의 点이면 다른 極은 반드시 南緯度의 点이 된다. 따라서 大圈의 極은 그것이 赤道上의 点이 아니면 반드시 北緯度의 것을 擇하기로 約束한다. 이렇게 定하면

$P_0(x_0,\ y_0)$이 한 大圈의 極으로 주어질 때는 $0° \leqq y_0 \leqq 90°$가 된다. 앞으로 이 約束은 지켜질 것이다.

原点 $O(0,0)$를 極으로 하는 大圈은 (3-10)에서

$$\cos y \cos x = 0$$

이고 $\cos y \fallingdotseq 0$ 이므로 $\cos x = 0$ 이고 따라서

$$x = \pm 90° \cdots\cdots (3\text{-}11)$$

가 된다. 또 点 $(x_0,\ 0)$을 極으로 하는 大圈의 方程式은

$$x - x_0 = \pm 90° \quad \text{또는} \quad x = x_0 \pm 90° \cdots\cdots (3\text{-}12)$$

이다. 이것은 子午線의 方程式이다.

3-6. 点 $P_1(x_1,\ y_1)$을 지나고 子午線과 $\alpha°(0° < \alpha < 180°)$로써 相交하는 大圈의 經緯度方程式

P_1을 지나고 子午線과 α^0로써 相交하는 大圈上의 任意의 一点을 $P(x,\ y)$라고 하면 球面三角形 NP_1P (第 7 圖)에서 四隣要素의 公式을 適用하여

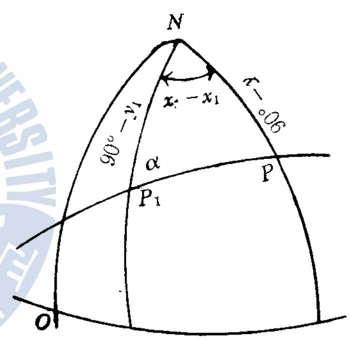
$$\cos(90° - y_1)\cos(x - x_1) = \cot(90° - y)\sin(90° - y_1) - \cot\alpha \sin(x - x_1)$$

을 얻고 따라서

$$\tan y = \tan y_1 \cos(x - x_1) + \cot\alpha \frac{\sin(x - x_1)}{\cos y_1} \cdots\cdots (3\text{-}13)$$

단, $y_1 \fallingdotseq 90°$

를 얻는다. 이것을 求하는 大圈의 經緯度方程式이다.



第 7 圖

(3-13)에서 $x_1 = 0,\ y_1 = n$라 놓아서 얻는 方程式

$$\tan y = \tan n \cos x + \cot\alpha \frac{\sin x}{\cos n} \cdots\cdots (3\text{-}14)$$

은 y 軸上의 截片이 n 이고 y 軸과 α^0로써 相交하는 大圈의 經緯度方程式이다.

点 $P_1(x_1,\ y_1)$을 지나고 또 P_1을 지나는 距等圈과 α^0를 만드는 大圈의 方程式은 (3-13)의 α 대신에 $90° - \alpha$를 넣어서

$$\tan y = \tan y_1 \cos(x - x_1) + \tan\alpha \frac{\sin(x - x_1)}{\cos y_1} \cdots\cdots (3\text{-}15)$$

이 되고 (3-15)에서 $x_1 = y_1 = 0$ 으로 하여 얻는 方程式

$$\tan y = \tan\alpha \sin x \cdots\cdots (3\text{-}16)$$

는 原点을 지나고 x 軸과 α^0로써 相交하는 大圈의 經緯度方程式이 된다. 또 x 軸上의 截片이 m 이고 x 軸과 α^0로써 相交하는 大圈의 經緯度方程式은 (3-15)에서 $x_1 = m,\ y_1 = 0$ 으로 놓아서

$$\tan y = \tan\alpha \sin(x - m) \cdots\cdots (3\text{-}17)$$

이다.

다음에 y 軸上의 截片이 n 이고 x 軸과 α^0로써 相交하는 大圈의 經緯度方程式을 求한다. y軸上의 截片이 n 이고 x 軸과 α^0로써 相交하는 大圈이 x 軸과 点 A에서 相交한다 하고 A의 經緯度座標를 $(p, 0)$이라 하면 x 軸上의 截片이 p 이고 x 軸과의 交角이 α^0인 大圈의 經緯度方程式은 (3-17)에서

$$\tan y=\tan\alpha\sin(x-p)$$

이고 이 大圈은 点 $(0, n)$을 지나므로

$$\tan n=\tan\alpha\sin(-p) \quad \text{即} \quad \sin p=-\cot\alpha\tan n$$

인 關係가 있다. 따라서

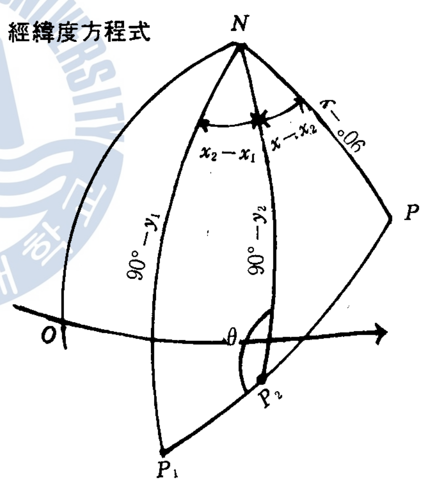
$$\cos p=\sqrt{1-\sin^2 p}=\sqrt{1-\cot^2\alpha\tan^2 n}$$

이 된다. 여기서 $\cos p$를 陽이 되게 取했으나 그것은 x 軸上의 截片은 그 絶對値가 $90°$ 보다 작게 되는 것을 截片으로 取하므로써 正當하다. 따라서

$$\tan y=\tan\alpha\{\sin x\sqrt{1-\cot^2\alpha\tan^2 n}+\cos x\cot\alpha\tan n\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}18)$$

를 얻는다. 이것을 求하는 大圈의 經緯度方程式이다.

3-7. 二点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$를 지나는 大圈의 經緯度方程式



第 8 圖

P_1, P_2를 지나는 大圈上에 任意의 一点 $P(x, y)$를 取하고 또 $\angle NP_2P_1=\theta$ 라고 한다. 三角形 NP_1P_2, NP_2P에서 各各 四隣要素의 公式을 適用하면

$$\cos(90°-y_2)\cos(x_2-x_1)=\cot(90°-y_1)\sin(90°-y_2)-\cot\theta\sin(x_2-x_1)$$

$$\cos(90°-y_2)\cos(x-x_2)=\cot(90°-y)\sin(90°-y_2)-\cot(180°-\theta)\sin(x-x_2)$$

이고 따라서

$$\sin y_2\cos(x_2-x_1)=\tan y_1\cos y_2-\cot\theta\sin(x_2-x_1)$$

$$\sin y_2\cos(x-x_2)=\tan y\cos y_2+\cot\theta\sin(x-x_2)$$

이다. 둘째 式에서 $\cot\theta$를 求하고 이것을 첫째 式에 代入하면

$$\sin y_2\cos(x_2-x_1)=\tan y_1\cos y_2-\frac{\sin y_2\cos(x-x_2)-\tan y\cos y_2}{\sin(x-x_2)}\sin(x-x_2)$$

이고 이것을 整理하면

$$\sin y_2\cos(x_2-x_1)\sin(x-x_2)=\tan y_1\cos y_2\sin(x-x_2)-\sin y_2\cos(x-x_2)\sin(x-x_2)+\tan y\cos y_2\sin(x-x_2)$$

$\cos y_2$로써 兩邊을 나누고 整理하여

$$\tan y=\frac{\tan y_1}{\sin(x_2-x_1)}\sin(x_2-x)-\frac{\tan y_2}{\sin(x_2-x_1)}\sin(x_1-x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}19)$$

를 얻는다. 이것은 二点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$를 지나는 大圈의 經緯度方程式이다. 公式 (3-19)에서 $x_1=m$, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=n$이면

$$\tan y=\frac{\tan n}{\sin m}\sin(m-x) \quad \cdots\cdots (3\text{-}20)$$

을 얻고 이것은 二点 $(m, 0)$, $(0, n)$을 지나는 大圈 即 x, y 軸上의 截片이 各各 m, n인 大圈의 經緯度方程式을 나타낸다. 또 (3-19)에서 $x_2=0$, $y_2=n$ 라고 하면

$$\tan y=\frac{\tan y_1}{\sin x}\sin x-\frac{\tan n}{\sin x_1}\sin(x-x_1) \quad \cdots\cdots (3\text{-}21)$$

를 얻는다. 이것은 $P_1(x_1, y_1)$을 지나고 y 軸上의 截片이 n인 大圈의 經緯度 方程式이다.

4. 벡터에 의한 大圈의 考察

4-1. 球面上의 点의 位置벡터와 基本量

單位球의 中心 C를 經緯度座標系의 原点 O, 北極 N와 맺은 CO, CN를 各各 陽의 X軸, Z軸으로 取하고 또 赤道面上에서 CO에 垂直으로 C에서 그은 直線을 Y軸으로 取한다. 단 Y軸의 方向은 陽의 X, Y, Z軸이 右手系를 이루도록 直角座標系를 設定하는 것은 勿論이다. 또 앞으로 球面上의 点 P_m의 經緯度座標를 (x_m, y_m), 直角座標를(A_m, B_m, C_m) (단 $m=0, 1, 2, 3, \cdots$)로 定하고 또 点 P의 經緯度座標를 (x, y), 直角座標를 (X, Y, Z)로 定한다. 이 때 点 P_m에 있어서는

$$\left.\begin{aligned} A_m&=\cos y_m\cos x_m\\ B_m&=\cos y_m\sin x_m\\ C_m&=\sin y_m \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}1)$$

또 点 P에 있어서는

$$\left.\begin{aligned} X&=\cos y\cos x\\ Y&=\cos y\sin x\\ Z&=\sin y \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}2)$$

인 關係式이 成立하고 또

$$\left.\begin{aligned} \tan x_m&=\frac{B_m}{A_m}\\ \cos y_m&=\sqrt{A_m^2+B_m^2}\\ \sin y_m&=C_m\\ \tan y_m&=\frac{C_m}{\sqrt{A_m^2+B_m^2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan x = \dfrac{Y}{X} \\ \cos y = \sqrt{X^2+Y^2} \\ \sin y = Z \\ \tan y = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}4)$$

인 關係가 있다.

벡터의 記號를 쓰면 点 P_m, P의 球中心 C에 관한 位置벡터는

$$\overrightarrow{CP_m} = A_m\boldsymbol{i} + B_m\boldsymbol{j} + C_m\boldsymbol{k} = \cos y_m \cos x_m \boldsymbol{i} + \cos y_m \sin x_m \boldsymbol{j} + \sin y_m \boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{CP} = X_i + Y_j + Z_k = \cos y \cos x \boldsymbol{i} + \cos y \sin x \boldsymbol{j} + \sin y \boldsymbol{k}$$

이다. 또 $|\overrightarrow{CP_m}| = |\overrightarrow{CP}| = 1$ 이고

$$\sqrt{A_m^2+B_m^2+C_m^2} = 1, \quad \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = 1$$

이다.

$$A_m, \ B_m, \ C_m; \quad X, \ Y, \ Z$$

를 点 P_m, P의 **基本量**이라고 부르기로 한다. 基本量에 관한 簡單한 性質에는 다음과 같은 것이 있다.

1. $X^2+Y^2+Z^2=1$ ……………………………………(4-5)
2. $A_m^2+B_m^2+C_m^2=1$ ……………………………………(4-6)
3. $A_m^2+B_m^2=\cos^2 y_m$ ……………………………………(4-7)
4. $X^2+Y^2=\cos^2 y$ ……………………………………(4-8)
5. $A_mA_n+B_mB_n=\cos y_m \ \cos y_n \ \cos(x_m-x_n)$ ……………………………………(4-9)

(證明) $A_mA_n+B_mB_n=\cos y_m \cos x_m \cos y_n \cos x_n+\cos y_m \sin x_m \cos y_n \sin x_n$

$$=\cos y_m \cos y_n(\cos x_m \cos x_n+\sin x_m \sin x_n)$$

$$=\cos y_m \cos y_n \cos(x_m-x_n)$$

6. $XA_n+YB_n=\cos y \cos y_n \cos(x-x_n)$ ……………………………………(4-10)
7. $A_mB_n+A_nB_m=\cos y_m \cos y_n \sin(x_m+x_n)$ ……………………………………(4-11)
8. $XB_n+YA_n=\cos y \cos y_n \sin(x+x_n)$ ……………………………………(4-12)
9. $A_mA_n-B_mB_n=\cos y_m \cos y_n \cos(x_m+x_n)$ ……………………………………(4-13)
10. $XA_n-YB_n=\cos y \cos y_n \cos(x+x_n)$ ……………………………………(4-14)
11. $A_mB_n-A_nB_m=\cos y_m \cos y_n \sin(x_n-x_m)$ ……………………………………(4-15)
12. $XB_n-A_nY=\cos y \cos y_n \sin(x_n-x)$ ……………………………………(4-16)

4-2. 二点 $P_m(x_m, y_m)$, $P_n(x_n, y_n)$ 사이의 球面距離 S_{mn}

$$\overrightarrow{CP_m}=A_m\boldsymbol{i}+B_m\boldsymbol{j}+C_m\boldsymbol{k}, \quad \overrightarrow{CP_n}=A_n\boldsymbol{i}+B_n\boldsymbol{j}+C_n\boldsymbol{k}$$

에서 內積 $\overrightarrow{CP_m}\cdot\overrightarrow{CP_n}$를 適用하여

$$\cos S_{mn}=A_mA_n+B_mB_n+C_mC_n \cdots\cdots(4\text{-}17)$$

이고 이것이 P_m, P_n 사이의 球面距離 S_{mn}를 決定하는 公式이다. $m=1$, $n=2$ 이면

$$\cos S_{12}=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$$

이고 基本量의 性質 (4-9)를 適用하면

$$\cos S_{12}=\cos y_1\cos y_2\cos(x_2-x_1)+\sin y_1\sin y_2$$

이 된다. 또(4-17)에 (4-9)를 適用하면 公式 (3-6)이 誘導된다.

原点 O 와 点 $P(x,y)$ 사이의 球面距離 S는 $A=1$, $B=C=0$ 으로 하여

$$\cos S=AX+BY+CZ=X=\cos y\cos x$$

이고 $S=r$ 라고 놓으면

$$\cos r=\cos y\cos x$$

이다. 이것은 公式 (3-1)의 첫 式이다.

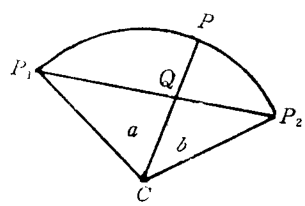
4-3. 二点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$를 $m:n$로 內分 .外分하는 点 P의 經緯度座標

Ⅰ. 內分의 경우

球面上의 二点 P_1, P_2를 $m:n$로 內分하는 点을 $P(x,y)$라 할 때 P_1, P_2를 直線으로 잇고 球半徑 CP와의 交点을 Q 라고 한다. 지금 点 Q의 直角座標를 (A',B',C'), $\angle P_1CP_2=S_{12}$, $\angle P_1CP=\frac{m}{m+m}S_{12}=a$, $\angle PCP_2=\frac{n}{m+n}S_{12}=b$ 라고 하면

$$P_1Q:QP_2=CP_1\sin a:CP_2\sin b=\sin a:\sin b$$

이고 따라서



第 9 圖

$$\overrightarrow{P_1Q}=\frac{\sin a}{\sin b}\overrightarrow{QP_2}$$

$$\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{CP_1}=\frac{\sin a}{\sin b}(\overrightarrow{CP_2}-\overrightarrow{CQ})$$

$$\overrightarrow{CQ}=\frac{\sin a}{\sin a+\sin b}\overrightarrow{CP_2}+\frac{\sin b}{\sin a+\sin b}\overrightarrow{CP_1}$$

$$=\frac{\sin a}{\sin a+\sin b}(A_2\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+C_2\boldsymbol{k}+\frac{\sin b}{\sin a+\sin b}(A_1\boldsymbol{i}+B_1\boldsymbol{j}+C_1\boldsymbol{k})$$

이다. 여기서

$$\overrightarrow{CQ}=A'\boldsymbol{i}+B'\boldsymbol{j}+C'\boldsymbol{k}$$

이므로

$$\left.\begin{aligned} A'&=\frac{1}{\sin a+\sin b}(A_2\sin a+A_1\sin b)\\ B'&=\frac{1}{\sin a+\sin b}(B_2\sin a+B_1\sin b)\\ C'&=\frac{1}{\sin a+\sin b}(C_2\sin a+C_1\sin b)\end{aligned}\right\}$$

인 關係가 있고

$$A'^2+B'^2+C'^2=\frac{1}{(\sin a+\sin b)^2}\{\sin^2 a(A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2)+\sin b(A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)$$
$$+2\sin a\sin b(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)\}$$
$$=\frac{1}{(\sin a+\sin b)^2}\{\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b\cos S_{12}\}$$

이다. 단 여기서 (4-6), (4-17)이 適用되었다. 그런데

$$\begin{aligned}&\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b\cos S_{12}\\&=\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b\cos(a+b)\\&=\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b\{\cos a\cos b-\sin a\sin b\}\\&=\sin^2 a\cos^2 b+\sin^2 b\cos^2 a+2\sin a\sin b\cos a\cos b\\&=(\sin a\cos b+\sin b\cos a)^2\\&=\sin^2(a+b)\\&=\sin^2 S_{12}\end{aligned}$$

이므로

$$A'^2+B'^2+C'^2=\left(\frac{\sin S_{12}}{\sin a+\sin b}\right)^2$$

이고

$$|\overrightarrow{CQ}|=\frac{\sin S_{12}}{\sin a+\sin b}\qquad \text{단, } 0<a,\ b,\ S_{12}<180^\circ$$

가 되므로

$$\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{CQ}}{|\overrightarrow{CQ}|}=\frac{\sin a+\sin b}{\sin S_{12}}(A'i+B'j+C'k)$$

이다.

$$\overrightarrow{CP}=Xi+Yj+Zk$$

이므로

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{1}{\sin S_{12}}(A_2\sin a+A_1\sin b)\\Y&=\frac{1}{\sin S_{12}}(B_2\sin a+B_1\sin b)\\Z&=\frac{1}{\sin S_{12}}(C_2\sin a+C_1\sin b)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}18)$$

이다. P点의 經緯度座標 (x, y)를 求하기 위해서는 公式 (4-4)를 適用하여.

$$\tan x=\frac{Y}{X}=\frac{B_2\sin a+B_1\sin b}{A_2\sin a+A_1\sin b}=\frac{B_2+\dfrac{\sin b}{\sin a}B_1}{A_2+\dfrac{\sin b}{\sin a}A_1}$$

$$\sin y = Z = \frac{C_2 \sin a + C_1 \sin b}{\sin S_{12}} = \frac{\sin a}{\sin S_{12}}\left(C_2 + \frac{\sin b}{\sin a} C_1\right)$$

이고 따라서

$$\left.\begin{aligned} \tan x &= \frac{B_2 + H_1 B_1}{A_2 + H_1 A_1} \\ \sin y &= \frac{\sin \frac{m}{m+n} S_{12}}{\sin S_{12}} (C_2 + H_1 C_1) \\ H_1 &= \frac{\sin \frac{n}{m+n} S_{12}}{\sin \frac{m}{m+n} S_{12}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}19)$$

이 成立하고 P_1, P_2의 中点의 座標 (x, y)는

$$\left.\begin{aligned} \tan x &= \frac{B_2 + B_1}{A_2 + A_1} \\ \sin y &= \frac{\sin \frac{1}{2} S_{12}}{\sin S_{12}} (C_2 + C_1) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}20)$$

로써 주어진다. 公式 (4-19), (4-20)은 公式 (3-8), (3-9)와 對照된다. 또 P_1에서 出發하여 P_2를 向하여 大圈上을 θ 만큼 進行한 点 P의 經緯度座標(x, y)는

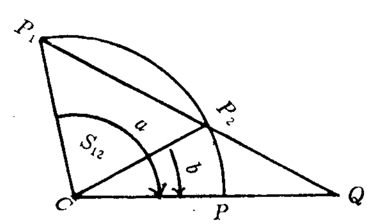
$$\left.\begin{aligned} \tan x &= \frac{B_2 + H B_1}{A_2 + H A_1} \\ \sin y &= \frac{\sin \theta}{\sin S_{12}} (C_2 + H C_1) \\ H &= \frac{\sin (S_{12} - \theta)}{\sin \theta} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}21)$$

로써 주어진다.

Ⅱ. 外分의 경우

P_1, P_2를 잇는 大圈弧를 $m:n$로 外分하는 点을 $P(x, y)$, 또 直線 P_1P_2와 球半徑 CP와의 交点을 Q라고 한다. 이때 $\angle P_1CQ = \frac{m}{m-n} S_{12} = a$, $\angle P_2CQ = \frac{n}{m-n} S_{12} = b$ 라고 한다. 또 Q 点의 直角座標를 (A', B', C')라고 한다. 이때 第10圖에서

$$P_1Q : P_2Q = CP_1 \sin a : CP_2 \sin b = \sin a : \sin b$$



第10圖

이고

$$\overrightarrow{P_1Q} = \frac{\sin a}{\sin b} \overrightarrow{P_2Q}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{\sin a}{\sin a - \sin b} \overrightarrow{CP_2} - \frac{\sin b}{\sin a - \sin b} \overrightarrow{CP_1}$$

$$= \frac{1}{\sin a - \sin b} [\sin a (A_2 \boldsymbol{i} + B_2 \boldsymbol{j} + C_2 \boldsymbol{k}) - \sin b (A_1 \boldsymbol{i} + B_1 \boldsymbol{j} + C_1 \boldsymbol{k})]$$

이다.

$$\overrightarrow{CQ}=A'\boldsymbol{i}+B'\boldsymbol{j}+C'\boldsymbol{k}$$

이므로

$$\left.\begin{aligned}A'&=\frac{1}{\sin a-\sin b}(A_2\sin a-A_1\sin b)\\B'&=\frac{1}{\sin a-\sin b}(B_2\sin a-B_1\sin b)\\C'&=\frac{1}{\sin a-\sin b}(C_2\sin a-C_1\sin b)\end{aligned}\right\}$$

이 成立한다. 따라서

$$\begin{aligned}A'^2+B'^2+C'^2&=\frac{1}{(\sin a-\sin b)^2}\{\sin^2a(A_2^2+B_2^2+C_2^2)+\sin^2b(A_1^2+B_1^2+C_1^2)\\&\quad-2\sin a\sin b(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)\}\\&=\frac{1}{(\sin a-\sin b)^2}\{\sin^2a+\sin^2b-2\sin a\sin b\cos S_{12}\}\end{aligned}$$

그런데

$$\sin^2a+\sin^2b-2\sin a\sin b\cos S_{12}=\sin^2 S_{12}$$

가 되므로

$$A'^2+B'^2+C'^2=\left(\frac{\sin S_{12}}{\sin a-\sin b}\right)^2$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{CQ}|=\pm\frac{\sin S_{12}}{\sin a-\sin b}$$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{CQ}}{|\overrightarrow{CQ}|}=\pm\frac{1}{\sin S_{12}}[&(A_2\sin a-A_1\sin b)\boldsymbol{i}+(B_2\sin a-B_1\sin b)\boldsymbol{j}\\&+(C_2\sin a-C_1\sin b)\boldsymbol{k}]\end{aligned}$$

이다. 또

$$\overrightarrow{CP}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$$

이므로

$$X=\pm\frac{1}{\sin S_{12}}(A_2\sin a-A_1\sin b)$$

$$Y=\pm\frac{1}{\sin S_{12}}(B_2\sin a-B_1\sin b)$$

$$Z=\pm\frac{1}{\sin S_{12}}(C_2\sin a-C_1\sin b)$$

단 : 複符號는 $\sin a>\sin b$ 이면 +를, $\sin a<\sin b$ 이면 −를 取한다.

따라서 P点의 經緯度 座標(x, y)는

$$\tan x = \frac{Y}{X} = \frac{B_2 \sin a - B_1 \sin b}{A_2 \sin a - A_1 \sin b} = \frac{B_2 - \frac{\sin b}{\sin a} B_1}{A_2 - \frac{\sin b}{\sin a} A_1}$$

$$\sin y = Z = \pm \frac{\sin a}{\sin S_{12}} \left(C_2 - \frac{\sin b}{\sin a} C_1 \right)$$

이고

$$\left.\begin{aligned} \tan x &= \frac{B_2 - H_2 B_1}{A_2 - H_2 A_1} \\ \sin y &= \pm \frac{\sin \frac{m}{m-n} S_{12}}{\sin S_{12}} (C_2 - H_2 C_1) \\ H_2 &= \frac{\sin \frac{n}{m-n} S_{12}}{\sin \frac{m}{m-n} S_{12}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}23)$$

단 複符號는 $\sin \frac{m}{m-n} S_{12} > \sin \frac{n}{m-n} S_{12}$ 이면 $+$를, $\sin \frac{m}{m-n} S_{12} < \sin \frac{n}{m-n} S_{12}$ 이면 $-$를 取한다.

가 求해진다. 公式 (4-23)은 公式 (3-9)와 對照된다. 또 以上의 結論 即 (4-23)은 $m<n$ 일 때도 正當하다. 단, 이 때는 $\frac{m}{m-n}$, $\frac{n}{m-n}$는 陰이 된다.

備考 公式 (4-23)에서 考察할 때 球面三角法에 의해서 誘導된 公式 (3-9)에서는 항상 $\sin \frac{m}{m-n} S_{12} > \sin \frac{n}{m-n} S_{12}$가 되는 것을 알 수 있다.

点 $P_1(x_1, y_1)$을 出發하여 $P_2(x, y_2)$로 向하여 大圈上을 θ만큼 進行하여 P点에 到達했을 때 $\theta > S_{12}$ 이면 P点의 經緯度座標는 (4-23)에 의해서

$$\left.\begin{aligned} \tan x &= \frac{B_2 - HB_1}{A_2 - HA_1} \\ \sin y &= \frac{\sin \theta}{\sin S_{12}} (C_2 - HC_1) \\ H &= \frac{\sin(\theta - S_{12})}{\sin \theta} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}24)$$

단, $\sin\theta > \sin(\theta - S_{12})$

로써 주어진다.

4-4. 点 P_m을 極으로 한는 大圈의 經緯度方程式

P_m을 極으로 하는 大圈上의 任意点을 $P(x, y)$라고 하면

$$\overrightarrow{CP_m} \cdot \overrightarrow{CP}=0$$

이고

$$\overrightarrow{CP_m}=A_m\boldsymbol{i}+B_m\boldsymbol{j}+C_m\boldsymbol{k},\ \overrightarrow{CP}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$$

이므로

$$A_mX+B_mY+C_mZ=0 \quad \cdots\cdots(4\text{-}25)$$

이 成立한다. 이것은 P_m을 極으로 하는 大圈의 經緯度方程式이다.

$P_m(x_m,\ y_m)$의 球中心 C에 관한 對稱点 $P'_m(x'_m,\ y'_m)$에서는 $x'_m=x_m+180°$, $y'_m=-y_m$ 이므로

$$A'_m=\cos(-y_m)\cos(x_m+180°)=-\cos y_m \cos x_m=-A_m$$
$$B'_m=\cos(-y_m)\sin(x_m+180°)=-\cos y_m \sin x_m=-B_m$$
$$C'_m=\sin(-y_m)=-\sin y_m=-C_m$$

이고 따라서 P'_m를 極으로 하는 大圈은 (4-25)에 의해서

$$-A_mX-B_mY-C_mZ=0$$

卽

$$A_mX+B_mY+C_mZ=0$$

이 되고 이것은 P_m을 極으로 하는 大圈과 同一하다. 또 $P''_m(x_m-180°,-y_m)$를 極으로 하는 大圈도 또 (4-25)와 같다.

$P_m(x_m, y_m)$을 極으로 하는 大圈의 經緯度方程式은 또 C가 中心인 單位球面과 P_0을 中心으로 하는 半徑이 $\sqrt{2}$인 球面과의 交線으로서도 求해진다. 卽 $P_m(x_m,\ y_m)$의 直角座標는 $(A_m,\ B_m,\ C_m)$ 이므로 P_0을 中心하고 半徑이 $\sqrt{2}$인 球面의 方程式은

$$(X-A_m)^2+(Y-B_m)^2+(Z-C_m)^2=2$$

이고 또 C가 中心인 單位球面은 $X^2+Y^2+Z^2=1$ 이므로 이 두 式에서

$$1-2(A_mX+B_mY+C_mZ)+(A^2_m+B^2_m+C^2_m)=2$$

卽

$$A_mX+B_mY+C_mZ=0$$

을 얻는다.

4-5. $P_m(x_m, y_m)$, $P_n(x_n, y_n)$을 지나는 大圈의 極 P_{mn}의 直角座標(A_{mn}, B_{mn}, C_{mn})와 經緯度座標(x_{mn}, y_{mn})

点 P_m, P_n의 球中心 C에 관한 位置벡터 $\overrightarrow{CP_m}$, $\overrightarrow{CP_n}$의 外積을 計算한다.

$$\overrightarrow{CP_m}\times\overrightarrow{CP_n}=(A_m\boldsymbol{i}+B_m\boldsymbol{j}+C_m\boldsymbol{k})\times(A_n\boldsymbol{i}+B_n\boldsymbol{j}+C_n\boldsymbol{k})$$
$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_m & B_m & C_m \\ A_n & B_n & C_n \end{vmatrix}$$
$$=(B_mC_n-B_nC_m)\boldsymbol{i}+(C_mA_n-C_nA_m)\boldsymbol{j}+(A_mB_n-A_nB_m)\boldsymbol{k}$$

따라서

$$|\overrightarrow{CP}_m \times \overrightarrow{CP}_n| = (B_mC_n - B_nC_m)^2 + (C_mA_n - C_nA_m)^2 + (A_mB_n - A_nB_m)^2$$

이다. 그런데

$$(A_m^2 + B_m^2 + C_m^2)(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2) - (A_mA_n + B_mB_n + C_mC_n)^2$$
$$= (A_mB_n - A_nB_m)^2 + (C_mA_n - C_nA_m)^2 + (B_mC_n - B_nC_m)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}26)$$

이고 (4-6), (4-17)을 適用하면

$$1 - \cos^2 S_{mn} = (B_mC_n - B_nC_m)^2 + (C_mA_n - C_nA_m)^2 + (A_mB_n - A_nB_m)^2$$

$S_{12} < 180°$ 라고 보면

$$\sin S_{mn} = \sqrt{(B_mC_n - B_nC_m)^2 + (C_mA_n - C_nA_m)^2 + (A_mB_n - A_nB_m)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}27)$$

이다. 따라서

$$|\overrightarrow{CP}_m \times \overrightarrow{CP}_n| = \sin S_{mn}$$

이고

$$\overrightarrow{CP}_{mn} = \frac{\overrightarrow{CP}_m \times \overrightarrow{CP}_n}{|\overrightarrow{CP}_m \times \overrightarrow{CP}_n|}$$
$$= \frac{1}{\sin S_{mn}}\{(B_mC_n - B_nC_m)\boldsymbol{i} + (C_mA_n - C_nA_m)\boldsymbol{j} + (A_mB_n - A_nB_m)\boldsymbol{k}\}$$

이다. 따라서

$$\overrightarrow{CP}_{mn} = A_{mn}\boldsymbol{i} + B_{mn}\boldsymbol{j} + C_{mn}\boldsymbol{k}$$

라고 하면 다음이 成立한다.

$$\left.\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{1}{\sin S_{mn}}(B_mC_n - B_nC_m) \\ B_{mn} &= \frac{1}{\sin S_{mn}}(C_mA_n - C_nA_m) \\ C_{mn} &= \frac{1}{\sin S_{mn}}(A_mB_n - A_nB_m) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}28)$$

위의 (4-28)의 右邊의 添文字의 順序를 바꾸면 또 하나의 極이 求해진다. 또 (4-28)에서 極 P_{mn}의 經緯度座標는

$$\left.\begin{aligned} \tan x_{mn} &= \frac{B_{mn}}{A_{mn}} = \frac{C_mA_n - C_nA_m}{B_mC_n - B_nC_m} \\ \sin y_{mn} &= C_{mn} = \frac{1}{\sin S_{mn}}(A_mB_n - A_nB_m) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}29)$$

를 滿足하는 (x_{mn}, y_{mn})로서 주어진다.

4-6. 二点 $P_m(x_m, y_m)$, $P_n(x_n, y_n)$을 지나는 大圈의 經緯度方程式

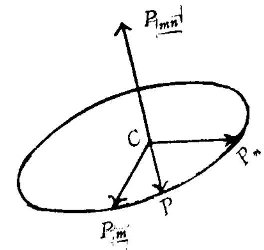
두 点 P_m, P_n을 지나는 大圈上의 任意 一点을 $P(x, y)$ 라고 하면

$$\overrightarrow{CP}\cdot\frac{\overrightarrow{CP}_m\times\overrightarrow{CP}_n}{|\overrightarrow{CP}_m\times\overrightarrow{CP}_n|}=0$$

이고 따라서

$$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP}_m\times\overrightarrow{CP}_n=0$$

卽



第11圖

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ A_m & B_m & C_m \\ A_n & B_n & C_n \end{vmatrix}=0$$

$$(B_mC_n-B_nC_m)X+(C_mA_n-C_nA_m)Y+(A_mB_n-A_nB_m)Z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}30)$$

이것은 $P_m(x_m, y_m)$, $P_n(x_n, y_n)$을 지나는 大圈의 經緯度方程式이다. 이 大圈의 經緯度方程式은 앞의 4-5節의 $P_{mn}(x_{mn}, y_{mn})$을 極으로 하는 大圈과 一致해야 할은 勿論이고 實際로 $P_{mn}(x_{mn}, y_{mn})$을 極으로 하는 大圈은

$$A_{mn}X+B_{mn}Y+C_{mn}Z=0$$

이고 여기서 부터 (4-30)이 誘導되는 것은 公式 (4-28)에서 明白하다.

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$를 지나는 大圈의 經緯度方程式을 얻기 위해서는 (4-30)에서 $m=1$, $n=2$로 하고 또 變形하여

$$C_2(XB_1-YA_1)-C_1(XB_2-YA_2)+Z(A_1B_2-A_2B_1)=0$$

으로 하고 여기서 基本量에 관한 公式 (4-12), (4-11)을 適用하면

$$\sin y_2\cos y\cos y_1\sin(x_1-x)-\sin y_1\cos y\cos y_2\sin(x_2-x)$$
$$+\sin y\cos y_1\cos y_2\sin(x_2-x_1)=0$$

이고 $\cos y$ 로서 兩邊을 나누어서

$$\sin y_2\cos y_1\sin(x_1-x)-\sin y_1\cos y_2\sin(x_2-x)$$
$$+\tan y\cos y_1\cos y_2\sin(x_2-x_1)=0$$

卽

$$\tan y=\frac{\sin y_1\cos y_2\sin(x_2-x)}{\cos y_1\cos y_2\sin(x_2-x_1)}-\frac{\sin y_2\cos y_1\sin(x_1-x)}{\cos y_1\cos y_2\sin(x_2-x_1)}$$

따라서

$$\tan y=\frac{\tan y_1}{\sin(x_2-x_1)}\sin(x_2-x)-\frac{\tan y_2}{\sin(x_2-x_1)}\sin(x_1-x)$$

단, $y\neq 90°$

를 얻는다. 이것은 公式 (3-19)이다.

4-7. 三点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_2(x_3, y_3)$이 같은 大圈上에 있을 條件

이것은

$$\overrightarrow{CP}_1\cdot\overrightarrow{CP}_2\times\overrightarrow{CP}_3=0$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}31)$$

또는 (3-19)에서

$$\tan y_3 = \frac{\tan y_1}{\sin(x_2 - x_1)} \sin(x_2 - x_3) - \frac{\tan y_2}{\sin(x_2 - x_1)} \sin(x_1 - x_3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}32)$$

이다.

4-8. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$를 極으로 하는 두 大圈의 交点의 座標

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$를 極으로 하는 大圈은 公式 (4-25)에 의해서

$$A_1X + B_1Y + C_1Z = 0, \quad A_2X + B_2Y + C_2Z = 0$$

이다. 따라서

$$A_1\frac{X}{Z} + B_1\frac{Y}{Z} + C_1 = 0, \quad A_2\frac{X}{Z} + B_2\frac{Y}{Z} + C_2 = 0$$

이고 이것을 풀이하면

$$\frac{X}{Z} = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

이다. 卽

$$\frac{X}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{Y}{C_1A_2 - C_2A_1} = \frac{Z}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

$$\frac{X^2}{(B_1C_2 - B_2C_1)^2} = \frac{Y^2}{(C_1A_2 - C_2A_1)^2} = \frac{Z}{(A_1B_2 - A_2B_1)^2}$$

$$= \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\sin^2 S_{12}} = \frac{1}{\sin^2 S_{12}}$$

따라서 交点의 直角座標는

$$\left.\begin{aligned} X &= \pm\frac{B_1C_2 - B_2C_1}{\sin S_{12}} \\ Y &= \pm\frac{C_1A_2 - C_2A_1}{\sin S_{12}} \\ Z &= \pm\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sin S_{12}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}33)$$

이다. 단 複符號는 同時에 +를, 또는 同時에 −를 取한다. (4-33)에서 두 大圈의 交点은 2個 있고 그들은 球中心 C와 一直線上에 있음이 明白하다.

交点의 經緯度座標 (x, y)는 公式 (4-4)에 의해서 (4-33)으로 부터

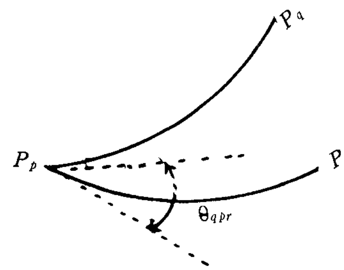
$$\left.\begin{aligned} \tan x &= \frac{Y}{X} = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{B_1C_2 - B_2C_1} \\ \sin y &= Z = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sin S_{12}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}34)$$

이고 하나의 交点이 求해지면 他는 스스로 알아진다.

4-9. $P_p(x_p,\ y_p)$, $P_q(x_q,\ y_q)$**를 지나는 大圈과** $P_p(x_p,\ y_p)$, $P_r(x_r,\ y_r)$**를 지나는 大圈의 交角의 크기** θ_{qpr}

P_p, P_q를 지나는 大圈과 P_p, P_r를 지나는 大圈의 極을 各各 P_{pq}, P_{pr}라고 하면 公式 (4-28)에 의해서

$$\overrightarrow{CP}_{pq}=A_{pq}\boldsymbol{i}+B_{pq}\boldsymbol{j}+C_{pq}\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{1}{\sin S_{pq}}[(B_pC_q-B_qC_p)\boldsymbol{i}+(C_pA_q-C_qA_p)\boldsymbol{j}+(A_pB_q-A_qB_p)\boldsymbol{k}]$$
$$\overrightarrow{CP}_{pr}=A_{pr}\boldsymbol{i}+B_{pr}\boldsymbol{j}+C_{pr}\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{1}{\sin S_{pr}}[(B_pC_r-B_rC_p)\boldsymbol{i}+(C_pA_r-C_rA_p)\boldsymbol{j}+(A_pB_r-A_rB_p)\boldsymbol{k}]$$



第12圖

이고 따라서

$$\cos\theta_{qpr}=\overrightarrow{CP}_{pq}\cdot\overrightarrow{CP}_{pr}$$
$$=\frac{(B_pC_q-B_qC_p)(B_pC_r-B_rC_p)}{\sin S_{pq}\sin S_{pr}}+\frac{(C_pA_q-C_qA_p)(C_pA_r-C_rA_p)}{\sin S_{pq}\sin S_{pr}}+\frac{(A_pB_q-A_qB_p)(A_pB_r-A_rB_p)}{\sin S_{pq}\sin S_{pr}}$$

가 된다. 그런데

$$(A_qA_r+B_qB_r+C_qC_r)(A_p^2+B_p^2+C_p^2)-(A_pA_q+B_pB_q+C_pC_q)(A_pA_r+B_pB_r+C_pC_r)$$
$$=(B_pC_q-B_qC_p)(B_pC_r-B_rC_p)+(C_pA_q-C_qA_p)(C_pA_r-C_rA_p)+(A_pB_q-A_qB_p)(A_pB_r-A_rB_p) \quad \cdots\cdots(4\text{-}35)$$

인 關係가 있다. 여기에 (4-6), (4-17)을 適用하여

$$\cos S_{qr}-\cos S_{pq}\cos S_{pr}=(B_pC_q-B_qC_p)(B_pC_r-B_rC_p)+(C_pA_q-C_qA_p)(C_pA_r-C_rA_p)+(A_pB_q-A_qB_p)(A_pB_r-A_rB_p) \quad \cdots\cdots(4\text{-}36)$$

이 된다. 따라서

$$\cos\theta_{qpr}=\frac{\cos S_{qr}-\cos S_{pq}\cos S_{pr}}{\sin S_{pq}\sin S_{pr}} \quad \cdots\cdots(4\text{-}37)$$

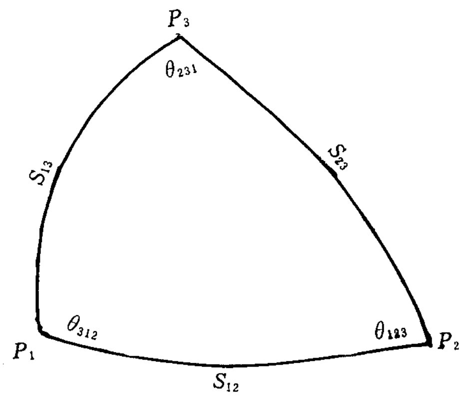
가 成立한다. 이것을 求하는 두 大圈의 交角을 決定하는 關係式이다.

4-10. 三点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$**으로 되는 球面三角形의 邊과 角의 크기**

第13圖를 참작하고 公式 (4-17), (4-37)을 適用하면 明白히 다음 關係式이 成立한다.

$$\left.\begin{aligned}\cos S_{12}&=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\\ \cos S_{23}&=A_2A_3+B_2B_3+C_2C_3\\ \cos S_{13}&=A_1A_3+B_1B_3+C_1C_3\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_{312}&=\frac{\cos S_{23}-\cos S_{13}\cos S_{12}}{\sin S_{13}\sin S_{12}}\\ \cos\theta_{123}&=\frac{\cos S_{13}-\cos S_{12}\cos S_{23}}{\sin S_{12}\sin S_{23}}\\ \cos\theta_{231}&=\frac{\cos S_{12}-\cos S_{13}\cos S_{23}}{\sin S_{13}\sin S_{23}}\end{aligned}\right\}$$



第13圖

만일 $S_{13}=90°$, $S_{23}=90°$ 이면

$$\cos\theta_{312}=\frac{\cos 90°-\cos 90°\cos S_{12}}{\sin 90°\sin S_{12}}=0$$

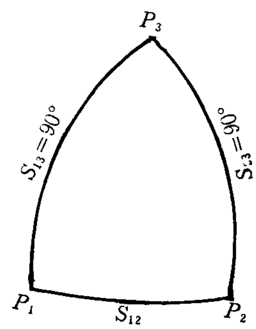
$$\cos\theta_{123}=\frac{\cos 90°-\cos S_{12}\cos 90°}{\sin S_{12}\sin 90°}=0$$

$$\cos\theta_{231}=\frac{\cos S_{12}-\cos 90°\cos 90°}{\sin 90°\sin 90°}=\cos S_{12}$$

이므로

$$\theta_{312}=\theta_{123}=90°,\quad \theta_{231}=S_{12}$$

가 되고 이것은 事實과 一致한다.



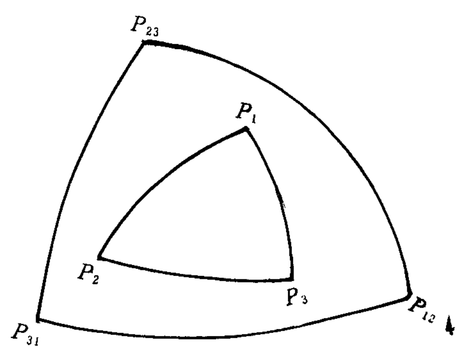
第14圖

4-11. 極三角形에 關한 考察

三点 P_1, P_2, P_3으로써 되는 球面三角形 $P_1P_2P_3$의 極三角形을 $P_{23}P_{31}P_{12}$라고 하자. 公式 (4-28)을 適用하여

点 $P_{23}(A_{23}, B_{23}, C_{23})$에 있어서는

$$\left.\begin{aligned}A_{23}&=\frac{1}{\sin S_{23}}(B_2C_3-B_3C_2)\\ B_{23}&=\frac{1}{\sin S_{23}}(C_2A_3-C_3A_2)\\ C_{23}&=\frac{1}{\sin S_{23}}(A_2B_3-A_3B_2)\end{aligned}\right\}$$



第15圖

点 $P_{31}(A_{31}, B_{31}, C_{31})$에 서는

$$\left.\begin{aligned}A_{31}&=\frac{1}{\sin S_{31}}(B_3C_1-B_1C_3)\\ B_{31}&=\frac{1}{\sin S_{31}}(C_3A_1-C_1A_3)\\ C_{31}&=\frac{1}{\sin S_{31}}(A_3B_1-A_1B_3)\end{aligned}\right\}$$

点 $P_{12}(A_{12}, B_{12}, C_{12})$에 있어서도

$$\left.\begin{aligned} A_{12}&=\frac{1}{\sin S_{12}}(B_1C_2-B_2C_1)\\ B_{12}&=\frac{1}{\sin S_{12}}(C_1A_2-C_2A_1)\\ C_{12}&=\frac{1}{\sin S_{12}}(A_1B_2-A_2B_1)\end{aligned}\right\}$$

이다. P_{31}, P_{12} 사이의 大圈弧의 길이를 $S_{31,12}$라고 하면

$$\begin{aligned}\cos S_{31,12}&=A_{31}A_{12}+B_{31}B_{12}+C_{31}C_{12}\\ &=\frac{1}{\sin S_{31}\sin S_{12}}\{B_3C_1-B_1C_3)(B_1C_2-B_2C_1)+(C_3A_1-C_1A_3)\\ &\quad\times(C_1A_2-C_2A_1)+(A_3B_1-A_1B_3)(A_1B_2-A_2B_1)\}\end{aligned}$$

公式 (4-36)에 의해서

$$\cos S_{31,12}=\frac{\cos S_{12}\cos S_{31}-\cos S_{23}}{\sin S_{31}\sin S_{12}}$$

또 公式 (4-37)에 의해서

$$\cos\theta_{213}=\frac{\cos S_{23}-\cos S_{12}\cos S_{13}}{\sin S_{12}\sin S_{13}}$$

이다. 따라서

$$\cos S_{31,12}=-\cos\theta_{213}$$

이고 極三角形의 重要한 性質

$$S_{31,12}+\theta_{213}=180°$$

가 誘導된다.

다음에

$$\overrightarrow{CP_{23}}\times\overrightarrow{CP_{31}}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_{23} & B_{23} & C_{23}\\ A_{31} & B_{31} & C_{31}\end{vmatrix}$$

$$=(B_{23}C_{31}-B_{31}C_{23})\boldsymbol{i}+(C_{23}A_{31}-C_{31}A_{23})\boldsymbol{j}+(A_{23}B_{31}-A_{31}B_{23})\boldsymbol{k}$$

이므로

$$U=B_{23}C_{31}-B_{31}C_{23}$$
$$V=C_{23}A_{31}-C_{31}A_{23}$$
$$W=A_{23}B_{31}-A_{31}B_{23}$$

이라 놓고 公式 (4-28)을 適用하면

$$U=\frac{(C_2A_3-C_3A_2)(A_3B_1-A_1B_3)-(C_3A_1-C_1A_3)(A_2B_3-A_3B_2)}{\sin S_{23}\sin S_{31}}$$

$$V=\frac{(A_2B_3-A_3B_2)(B_3C_1-B_1C_3)-(A_3B_1-A_1B_3)(B_2C_3-B_3C_2)}{\sin S_{23}\sin S_{31}}$$

$$W=\frac{(B_2C_3-B_3C_2)(C_3A_1-C_1A_3)-(B_3C_1-B_1C_3)(C_2A_3-C_3A_2)}{\sin S_{23}\sin S_{31}}$$

이들의 分子를 變形하면

$$U=\frac{A_3\{A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)\}}{\sin S_{23}\sin S_{31}}$$

$$V=\frac{B_3\{A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)\}}{\sin S_{23}\sin S_{31}}$$

$$W=\frac{C_3\{A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)\}}{\sin S_{23}\sin S_{31}}$$

이 된다. 따라서

$$U^2+V^2+W^2=\frac{(A_3{}^2+B_3{}^2+C_3{}^2)\{A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)\}^2}{\sin^2 S_{23}\sin^2 S_{31}}$$

$$=\frac{\{A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)\}^2}{\sin^2 S_{23}\sin^2 S_{31}}$$

이고

$$|\overrightarrow{CP}_{23}\times\overrightarrow{CP}_{31}|=\sqrt{U^2+V^2+W^3}$$

$$=\frac{\pm\{A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)\}}{\sin\ S_{23}\sin\ S_{31}}$$

이므로

$$\frac{\overrightarrow{CP}_{23}\times\overrightarrow{CP}_{31}}{|\overrightarrow{CP}_{23}\times\overrightarrow{CP}_{31}|}=\pm(A_3\boldsymbol{i}+B_3\boldsymbol{j}+C_3\boldsymbol{k})$$

가 된다. 卽 P_3은 大圈弧 $P_{23}P_{31}$의 極이 된다.

4-12. $P_m(x_m, y_m)$을 極으로 하는 大圈의 媒介變數方程式

$P_m(x_m, y_m)$을 極으로 하는 大圈의 方程式은 公式 (4-25)에 의해서

$$A_mX+B_mY+C_mZ=0$$

이며 이것은

$$A_m\cos y\cos x+B_m\cos y\sin x+C_m\sin y=0$$

과 같다. $\cos y$ 로써 兩邊을 나누어서

$$A_m\cos x+B_m\sin x+C_m\tan y=0$$

卽　$$\tan y=-\frac{A_m\cos x+B_m\sin x}{C_m}$$

단, $y\neq\frac{\pi}{2}$, $y_m\neq 0$

이다. 이것은 이 大圈上의 一点을 $P(x, y)$라 할때 $\overrightarrow{CP}$가 $\overrightarrow{CP}_m$와 直交할 條件이다. 그런데 3-5節의 備考에서 約束한 바와 같이 極은 北緯度의 点이라고 하였으므로 $0<y_m\leqq\frac{\pi}{2}$이고 따라서 $C_m>0$ 이 된다.

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+\dfrac{(A_m \cos x + B_m \sin x)^2}{C_m^{\ 2}}} = \frac{C_m^{\ 2}}{C_m^{\ 2}+(A_m \cos x + B_m \sin x)^2}$$

이고 또 $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos \geqq 0$, 따라서

$$\cos y = \frac{C_m}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos x + B_m \sin x)^2}}$$

또

$$\sin y = \tan y \cos y = -\frac{A_m \cos x + B_m \sin x}{C_m} \frac{C_m}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos x + B_m \sin x)^2}}$$

$$= \frac{-(A_m \cos x + B_m \sin x)}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos x + B_m \sin x)^2}}$$

가 된다. $X=\cos y \cos x$, $Y=\cos y \sin x$, $Z=\sin y$ 에 위의 $\cos y$, $\sin y$를 代入하면

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{C_m \cos x}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos x + B_m \sin x)^2}} \\ Y &= \frac{C_m \sin x}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos x + B_m \sin x)^2}} \\ Z &= \frac{-(A_m \cos x + B_m \sin x)}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos x + B_m \sin x)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}38)$$

이 되고 x 대신에 t 를 써면

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{C_0 \cos t}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos t + B_m \sin t)^2}} \\ Y &= \frac{C_0 \sin t}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos t + B_m \sin t)^2}} \\ Z &= \frac{-(A_m \cos t + B_m \sin t)}{\sqrt{C_m^{\ 2}+(A_m \cos t + B_m \sin t)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}39)$$

와 같다. 단 媒介變數 t 는 經度를 나타낸다. (4-39)는 $P_m(x_m, y_m)$을 極으로 하는 大圈의 媒介變數方程式이다.

5. 基本量의 偏微分

앞章까지는 球面上의 經緯度座標는 모두 六十分法의 度로써 表示되어 왔다. 그러나 이 章부터는 Radian으로 看做한다.

5-1. 基本量의 偏微分

球面上의 点 P의 球中心 C에 관한 位置벡터

$$Xi + Yj + Zk \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{-}1)$$

의 $X=\cos y \cos x$, $Y=\cos y \sin x$, $Z=\sin y$ 를 x, y에 관해서 偏微分하면

$$\frac{\partial X}{\partial x}=-\cos y\sin x,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=\cos y\cos x,\quad \frac{\partial Z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=-\sin y\cos x,\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=-\sin y\sin x,\quad \frac{\partial Z}{\partial y}=\cos y$$

이고 또

$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

을 x, y에 관하여 偏微分하여

$$\left.\begin{aligned}X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial x}+Z\frac{\partial Z}{\partial x}=0\\ X\frac{\partial X}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}+Z\frac{\partial Z}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5\text{-}2)$$

을 얻는다. 따라서

$$(X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{\partial X}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)=0$$

$$(X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)=0$$

이다. 또

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y}=0\cdots\cdots(5\text{-}3)$$

도 成立하므로

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)=0$$

이 된다.

卽 3個의 벡터

$$X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial x}\boldsymbol{k}\cdots\cdots(5\text{-}4)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}\cdots\cdots(5\text{-}5)$$

는 서로 直交한다. 또

$$\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}=\cos y$$

이므로

$$\frac{1}{\cos y}\left\{\frac{\partial X}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial x}\boldsymbol{k}\right\}=-\sin x\boldsymbol{i}+\cos x\boldsymbol{j}$$

는 벡터의 始点을 球中心으로 取하면 單位 球面上에 그 端点이 있게 된다. 이 端点을 P_x라고 하자. 卽

$$\overrightarrow{CP_x}=\frac{1}{\cos y}\left\{\frac{\partial X}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial x}\boldsymbol{k}\right\}=-\sin x\boldsymbol{i}+\cos x\boldsymbol{j}\cdots\cdots(5\text{-}6)$$

이다. 다음에 또

$$\sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}=1 \quad \cdots\cdots(5\text{-}7)$$

이므로

$$\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}$$

는 벡터의 始点을 球中心 C로 取하면 端点은 그 單位 球面上의 点이다. 이 端点을 P_y로서 表示한다. 卽

$$\overrightarrow{CP_y}=\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}=-\sin y\cos x\boldsymbol{i}-\sin y\sin x\boldsymbol{j}+\cos y\boldsymbol{k} \quad \cdots\cdots(5\text{-}8)$$

이다. 그리고 (5-1), (5-6), (5-8)의 세 벡터는 서로 直交한다. (5-1), (5-6), (5-8)에서

$$\begin{vmatrix} \cos y\cos x & \cos y\sin x & \sin y \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ -\sin y\cos x & -\sin y\sin x & \cos y \end{vmatrix}=1>0$$

이므로 $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$와 $(\overrightarrow{CP},\ \overrightarrow{CP_x},\ \overrightarrow{CP_y})$는 同方向이 된다.

点 $P(x,\ y)$에 對해서 P_x 点의 經緯度座標 $(x_x,\ y_x)$를 求해보면

$$\tan x_x=\frac{\dfrac{Y_x}{\cos y}}{\dfrac{X_x}{\cos y}}=-\frac{\cos x}{\sin x}=-\cot x=\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin y_x=\frac{Z_x}{\cos y}=0$$

이므로

$$x_x=x+\frac{\pi}{2},\quad y_x=0$$

이 된다. 卽 P_x 点의 經緯度座標는 $\left(x+\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$이다. 卽 赤道上의 点이다.

다음에 또 P_y의 經緯度座標 (x_y, y_y)는

$$\text{taa}\ x_y=\frac{Y_y}{X_y}=\frac{-\sin y\sin x}{-\sin y\cos x}=\tan x=\tan(\pi+x)$$

$$\sin y_y=Z_y=\cos y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$$

에서

$$\left(x+\pi,\ \frac{\pi}{2}-y\right)$$

가 된다. 卽 点 P_y는 $P(x,y)$를 極으로 하는 大圈上의 点으로서는 가장 緯度가 높은 点이 된다.

基本量 $X,\ Y,\ Z$의 偏微分을 더 繼續하고 그때 마다 만들어 지는 벡터는 始点을 球中心에 두

고 또 端点에 해당하는 球面上의 점의 記號는 앞과 같이 붙인다.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}=\sin y\sin x,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}=-\sin y\cos x,\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\right)^2}=\sin y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xy}=\sin x\boldsymbol{i}-\cos x\boldsymbol{j}=-\overrightarrow{CP}_x \quad\cdots\cdots(5-9)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\cos y\cos x,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}=-\cos y\sin x,\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2}=\cos y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xx}=-\cos\boldsymbol{i}-\sin\boldsymbol{j} \quad\cdots\cdots(5-10)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=-\cos y\cos x,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-\cos y\sin x,\quad \frac{\partial Z}{\partial y^2}=-\sin y$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2}=1$$

$$\overrightarrow{CP}_{yy}=-\cos y\ \cos x\boldsymbol{i}-\cos y\ \sin x\boldsymbol{j}-\sin y\boldsymbol{k}=-\overrightarrow{CP} \quad\cdots\cdots(5-11)$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}=\cos y\sin x,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^3}=-\cos y\cos x,\quad \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}\right)^2}=\cos y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xxx}=\sin x\boldsymbol{i}\text{-}\cos x\boldsymbol{j}=-\overrightarrow{CP}_x \quad\cdots\cdots(5-12)$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x\,\partial y^2}=\cos y\sin x,\quad \frac{\partial^3 Y}{\partial x\,\partial y^2}=-\cos y\cos y,\quad \frac{\partial^3 Z}{\partial x\,\partial y^2}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^3 X}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2}=\cos y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xyy}=\sin x\boldsymbol{i}-\cos x\boldsymbol{j}=-\overrightarrow{CP}_x \quad\cdots\cdots(5-13)$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^2\,\partial y}=\sin y\cos x,\quad \frac{\partial^3 Y}{\partial x^2\,\partial y}=\sin y\sin x,\quad \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2\,\partial y}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^3 X}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2}=\sin y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xxy}=\cos x\boldsymbol{i}+\sin x\boldsymbol{j}=-\overrightarrow{CP}_{xx} \quad\cdots\cdots(5-14)$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial y^3}=\sin y\cos x,\quad \frac{\partial^3 Y}{\partial y^3}=\sin y\sin x,\quad \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}=-\cos y$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^3 X}{\partial y^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial y^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}\right)^2}=1$$

$$\overrightarrow{CP}_{yyy}=\sin y\cos x\boldsymbol{i}+\sin y\sin x\boldsymbol{j}-\cos y\boldsymbol{k}=-\overrightarrow{CP}_y \quad\cdots\cdots(5-15)$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}=\cos y\cos x,\quad \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}=\cos y\sin x,\quad \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4}\right)^2}=\cos y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xxxx}=\cos x\boldsymbol{i}+\sin x\boldsymbol{j}=-\overrightarrow{CP}_{xx} \cdots\cdots (5\text{-}16)$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^3\partial y}=-\sin y\sin x,\quad \frac{\partial^4 Y}{\partial x^3\partial y}=\sin y\cos x,\quad \frac{\partial^4 Z}{\partial x^3\partial y}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^3\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Y}{\partial x^3\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Z}{\partial x^3\partial y}\right)^2}=\sin y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xxxy}=-\sin x\boldsymbol{i}+\cos x\boldsymbol{j}=\overrightarrow{CP}_{x} \cdots\cdots (5\text{-}17)$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^2\partial y^2}=\cos y\cos x,\quad \frac{\partial^4 Y}{\partial x^2\partial y^2}=\cos y\sin x,\quad \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2\partial y^2}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^2\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Y}{\partial x^2\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Z}{\partial x^2\partial y^2}\right)^2}=\cos y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xxyy}=\cos x\boldsymbol{i}+\sin x\boldsymbol{j}=-\overrightarrow{CP}_{xx} \cdots\cdots (5\text{-}18)$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x\partial y^3}=-\sin y\sin x,\quad \frac{\partial^4 Y}{\partial x\partial y^3}=\sin y\cos x,\quad \frac{\partial^4 Z}{\partial x\partial y^3}=0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^4 X}{\partial x\partial y^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Y}{\partial x\partial y^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Z}{\partial x\partial y^3}\right)^2}=\sin y$$

$$\overrightarrow{CP}_{xyyy}=-\sin x\boldsymbol{i}+\cos x\boldsymbol{j}=\overrightarrow{CP}_{x} \cdots\cdots (5\text{-}19)$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial y^4}=\cos y\cos x,\quad \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4}=\cos y\sin x,\quad \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4}=\sin y$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^4 X}{\partial y^4}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Y}{\partial y^4}\right)^2+\left(\frac{\partial^4 Z}{\partial y^4}\right)^2}=1$$

$$\overrightarrow{CP}_{yyyy}=\cos y\cos x\boldsymbol{i}+\cos y\sin x\boldsymbol{j}+\sin y\boldsymbol{k}=\overrightarrow{CP} \cdots\cdots (5\text{-}20)$$

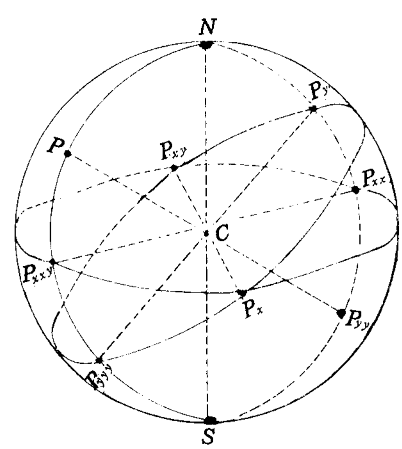
벡터는 다시 $\overrightarrow{CP}$에 돌아 왔으므로 여기서 끝인다.

点 P_{xx}의 經緯度座標(x_{xx}, y_{yy})를 求하면

$$\tan x_{xx}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x=\tan(\pi+x)$$

$$\sin y_{xx}=0$$

이므로 P_{xx}의 經緯度座標는 $(\pi+x,\ 0)$이다. 따라서 P_{xx}는 点 P에서 가장 遠 球面距離인 赤道上의 点이 된다.



第16圖

以上의 여러 벡터를 圖示하면 第16圖와 같다. 点 P_x, P_{xy}는 赤道上의 点이고 P를 極으로 하는 大圈이 赤道와 만나는 点이 된다. 또 点 P_{yyy}는 P를 極으로 하는

大圈上에서 緯度가 가장 낮은 点이고 緯度가 가장 높은 点은 P_y 点이다. 또 P_{xxy}는 赤道上에 있고 極 P에서 가장 가까운 赤道上의 点이다. 또 点 P_{yy}는 P를 極으로 하는 大圈의 또 하나의 極이다.

當然히 P_x, P_y를 지나는 大圈의 極은 P가 된다. 그것을 公式 (4-28), (4-29)를 適用하여 計算的으로 確認하면 다음과 같다. 卽 P_x, P_y를 지나는 大圈의 極의 直角座標와 經緯度座標를 (A, B, C), (a, b)라고 하면

$$\overrightarrow{CP_x} = -\sin x\boldsymbol{i} + \cos x\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{CP_y} = -\sin y\cos x\boldsymbol{i} - \sin y\sin x\boldsymbol{j} + \cos y\boldsymbol{k}$$

에서

$$A = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}(\cos x\cos y + \sin y\sin x\cdot 0) = \cos x\cos y = X$$

$$B = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\{0\cdot(-\sin x) + \cos y\sin x\} = \cos y\sin x = Y$$

$$C = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\{(-\sin x)(-\sin y\sin x) + \sin y\cos x\cos x\} = \sin y = Z$$

이고 또

$$\tan a = \frac{\cos y\sin x}{\cos x\cos y} = \tan x$$

$$\sin b = \frac{\sin y\sin^2 x + \sin y\cos^2 x}{\sin\frac{\pi}{2}} = \sin y$$

가 되기 때문이다. 또 P_x, P_y를 지나는 大圈의 經緯度方程式을 求하면 그것은 P를 極으로 하는 大圈의 經緯度方程式이 될 것이다.

6. 基本量에 의한 球面上의 幾何的 考察

本章에서도 点의 經緯度座標는 Radian으로 測定된 것이라고 看做한다. 本章의 結論은 새로운 것은 아니다. 다만 本稿에서 말하는 基本量을 利用하여 既知의 諸公式을 誘導해 볼려고 하는 것이다.

6-1. 子午線의 接線벡터

子午線上에 두 点 $P(x, y)$, $Q(x, y+\triangle y)$를 取한다. 이 때

$$\overrightarrow{CP} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k},\quad \overrightarrow{CQ} = X'\boldsymbol{i} + Y'\boldsymbol{j} + Z'\boldsymbol{k}$$

라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (X'-X)\boldsymbol{i} + (Y'-Y)\boldsymbol{j} + (Z'-Z)\boldsymbol{k}\\ &= \{\cos(y+\triangle y)\cos x - \cos y\cos x\}\boldsymbol{j} + \{\cos(y+\triangle y)\sin x - \cos y\sin x\}\boldsymbol{j}\\ &\qquad + \{\sin(y+\triangle y) - \sin y\}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$=\cos x\{\cos(y+\triangle y)-\cos y\}\boldsymbol{i}+\sin x\{\cos(y+\triangle y)-\cos y\}\boldsymbol{j}$$
$$+\{\sin(y+\triangle y)-\sin y\}\boldsymbol{k}$$

이다. $\triangle y\to 0$ 이면

$$\overrightarrow{PQ}=\cos x\frac{d\cos y}{dy}dy\boldsymbol{i}+\sin x\frac{d\cos y}{dy}dy\boldsymbol{j}+\frac{d\sin y}{dy}dy\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\partial X}{\partial y}dy\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}dy\boldsymbol{k}$$

여기서 $|\overrightarrow{PQ}|=dy$ 이므로

$$\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}$$

는 單位벡터이고 $\overrightarrow{CP}\cdot\left(\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)=0$ 이 되므로 $\overrightarrow{CP}$와 直交한다. 이것을 $\boldsymbol{t}_M$로써 나타 내기로 한다. 卽

$$\boldsymbol{t}_M=\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}=-\sin y\cos x\boldsymbol{i}-\sin y\sin x\boldsymbol{j}+\cos y\boldsymbol{k} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6\text{-}1)$$

는 点 P에서 P를 지나는 子午線의 單位接線벡터이다.

6-2. 距等圈의 接線벡터

点 $P(x,\ y)$를 지나는 距等圈上에 一点 $R(x+\triangle x,\ y)$를 取하고

$$\overrightarrow{CP}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k},\qquad \overrightarrow{CR}=X'\boldsymbol{i}+Y'\boldsymbol{j}+Z'\boldsymbol{k}$$

라하면

$$\overrightarrow{PR}=(X'-X)\boldsymbol{i}+(Y'-Y)\boldsymbol{j}+(Z'-Z)\boldsymbol{k}$$
$$=\cos y\{\cos(x+\triangle x)-\cos x\}\boldsymbol{i}+\cos y\{\sin(x+\triangle x)-\sin x\}\boldsymbol{j}$$

이다. 여기서 $\triangle x\to 0$ 이면

$$\overrightarrow{PR}=\cos y\frac{d\cos x}{dx}dx\boldsymbol{i}+\cos y\frac{d\sin x}{dx}dx\boldsymbol{j}$$

$$=\frac{\partial X}{\partial x}dx\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial x}dx\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial x}dx\boldsymbol{k}$$

이다. 이 때

$$|\overrightarrow{PR}|=\cos y\ dx$$

이므로

$$\frac{\frac{\partial X}{\partial x}}{\cos y}\boldsymbol{i}+\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\cos y}\boldsymbol{j}+\frac{\frac{\partial Z}{\partial x}}{\cos y}\boldsymbol{k}=-\sin x\boldsymbol{i}+\cos x\boldsymbol{j}$$

는 点 P를 지나는 距等圈의 單位接線벡터이다. 이것을 $\boldsymbol{t}_{PL}$ 로써 나타내기 로한다. 卽

$$\boldsymbol{t}_{PL}=\frac{\partial X}{\partial x}\Big/\cos y\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial x}\Big/\cos y\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial x}\Big/\cos y\boldsymbol{k}=-\sin x\boldsymbol{i}+\cos x\boldsymbol{j} \quad\cdots\cdots\cdots(6\text{-}2)$$

또,

$$\overrightarrow{CP}\cdot \boldsymbol{t}_{PL}=0, \qquad \boldsymbol{t}_{PL}\cdot \boldsymbol{t}_{M}=0$$

이므로 $\boldsymbol{t}_{PL}$는 $\overrightarrow{CP}$, $\boldsymbol{t}_{M}$와 直交한다. 또

$$\boldsymbol{t}_{PL}\times \boldsymbol{t}_{M}=\overrightarrow{CP}$$

가 成立하는 것은 當然하다. $\overrightarrow{CP}$를 $\boldsymbol{n}$ 로써 나타내면

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}_{PL}\times \boldsymbol{t}_{M}$$

이다.

6-3. 点 P에서의 球面의 接線

球面上에 点 $P(x, y)$와 $S(x+\triangle x,\ y+\triangle y)$가 있고

$$\overrightarrow{CP}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}, \qquad \overrightarrow{CS}=X''\boldsymbol{i}+Y''\boldsymbol{j}+Z''\boldsymbol{k}$$

이면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS}&=(X''-X)\boldsymbol{i}+(Y''-Y)\boldsymbol{j}+(Z''-Z)\boldsymbol{k}\\&=\{\cos(y+\triangle y)\cos(x+\triangle x)-\cos y\cos x\}\boldsymbol{i}+\{\cos(y+\triangle y)\sin(x+\triangle x)-\cos y\sin x\}\boldsymbol{j}\\&\quad+\{\sin(y+\triangle y)-\sin y\}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

여기서 $\triangle x\to 0$, $\triangle y\to 0$ 이면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS}&=dX\boldsymbol{i}+dY\boldsymbol{j}+dZ\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy\right)\boldsymbol{i}+\left(\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy\right)\boldsymbol{k}\\&=\{(-\cos y\sin x)dx+(-\sin y\cos x)dy\}\boldsymbol{i}+\{(\cos y\cos x)dx\\&\quad+(-\sin y\sin x)dy\}\boldsymbol{j}+\{\cos y\,dy\}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

또 이 때

$$|\overrightarrow{PS}|=\sqrt{dx^2\cos^2 y+dy^2}$$

이므로 球面上의 点 $P(x, y)$에서의 球面의 單位 接線벡터 $\boldsymbol{t}$ 는

$$\boldsymbol{t}=\frac{1}{\sqrt{dx^2\cos^2 y+dy^2}}(dX\boldsymbol{i}+dY\boldsymbol{j}+dZy) \quad \cdots\cdots(6\text{-}3)$$

이고 이 右邊은

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}&=\frac{1}{\sqrt{dx^2\cos^2 y+dy^2}}\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)\boldsymbol{j}\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy\right)\boldsymbol{k}\right\}\\&=\frac{\cos y\,dx}{\sqrt{dx^2\cos^2 y+dy^2}}\left\{\frac{\partial X}{\partial x}\Big/\cos y\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial x}\Big/\cos y\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial x}\Big/\cos y\boldsymbol{k}\right\}\\&\quad+\frac{dy}{\sqrt{dx^2\cos^2 y+dy^2}}\left\{\frac{\partial X}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial Z}{\partial y}\boldsymbol{k}\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos y\, dx}{\sqrt{dx^2 \cos^2 y + dy^2}} t_{PL} + \frac{dy}{\sqrt{dx^2 \cos^2 y + dy^2}} t_M \quad \cdots\cdots(6\text{-}4)$$

이 되므로 t 는 t_{PL}, t_M이 決定하는 平面上에 있다. 卽 t_{PL}, t_M이 決定하는 平面은 球面의 接平面이다.

6-4. 球面上의 $\frac{dy}{dx}$와 線素의 考察

点 $P(x, y)$를 지나는 任意의 球面曲線上에 点 $R(x+\triangle x,\ y+\triangle y)$를 取해서 생각하면 点 P에서의 이 球面曲線의 單位 接線벡터는 (6-3)에 의해서

$$t = \frac{1}{\sqrt{dx^2 \cos^2 y + dy^2}} (dXi + dYjdZk)$$

이다. 또 点 P에서 子午線 單位 接線벡터는 (6-1)에 의해서

$$t_M = \frac{\partial X}{\partial y} i + \frac{\partial Y}{\partial y} j + \frac{\partial Z}{\partial y} k$$

이므로 t, t_M 사이의 交角의 크기를 θ 라고 하면

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{dx^2 \cos y + dy^2}} \left(dX \frac{\partial X}{\partial y} + dY \frac{\partial Y}{\partial y} + dZ \frac{\partial Z}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{dx^2 \cos^2 y + dy^2}} \left[\left\{ \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y} \right\} dx + \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 \right\} dy \right]$$

이고 右邊의 [ ] 속의 첫째, 두째의 { } 속은 各各 (5-3), (5-7)에 의해서 0, 1 이 된다. 따라서

$$\cos\theta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 \cos^2 y + dy^2}}$$

이다. 그런데

$$\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{dx^2 \cos^2 y + dy^2}{dy^2} - 1 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \cos^2 y = \cos^2 y \Big/ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

이므로

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \cot^2\theta \cos^2 y \quad \cdots\cdots(6\text{-}5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cot\theta \cos y \quad \cdots\cdots(6\text{-}6)$$

$$\frac{dx}{dy} = \tan\theta \sec y \quad \cdots\cdots(6\text{-}7)$$

가 된다. 단 여기서 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos y > 0$ 이고 $\theta < \frac{\pi}{2}$이면 $\frac{dy}{dx} > 0$, $\theta > \frac{\pi}{2}$이면 $\frac{dy}{dx} < 0$ 이 된다.

다음에 $P(x, y)$, $R(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 사이의 球面距離 ΔS는 公式 (4-17)에 의해서

$$\cos\Delta S = \cos y\cos x\cos(y+\Delta y)\cos(x+\Delta x) + \cos y\sin x\cos(y+\Delta y)\sin(x+\Delta x) + \sin y\sin(y+\Delta y)$$

로서 주어진다. 左右邊을 級數로 展開하면

$$1-\frac{1}{2}\Delta S^2+\cdots\cdots$$

$$= \cos y\cos x\left\{\cos y-\Delta y\sin y-\frac{1}{2}\Delta y^2\cos y+\cdots\cdots\right\}\left\{\cos x-\Delta x\sin x-\frac{1}{2}\Delta x^2\cos x+\cdots\right\} + \cos y\sin x\left\{\cos y-\Delta y\sin y-\frac{1}{2}\Delta y^2\cos y+\cdots\right\}\left\{\sin x+\Delta x\cos x-\frac{1}{2}\Delta x^2\sin x-\cdots\right\} + \sin y\left\{\sin y+\Delta y\cos y-\frac{1}{2}\Delta y^2\sin y-\cdots\right\}$$

$$= \cos y\cos x\left\{\cos y\cos x-\Delta x\cos y\sin x-\Delta y\sin y\cos x+\Delta x\Delta y\sin y\sin x-\frac{1}{2}\Delta x^2\cos y\cos x-\frac{1}{2}\Delta y^2\cos y\cos x+\cdots\right\}$$
$$+\cos y\sin x\left\{\cos y\sin x+\Delta x\cos y\cos x-\Delta y\sin y\sin x-\Delta x\Delta y\sin y\cos x-\frac{1}{2}\Delta x^2\cos y\sin x-\frac{1}{2}\Delta y^2\cos y\sin x-\cdots\right\}$$
$$+\sin y\left\{\sin y+\Delta y\cos y-\frac{1}{2}\Delta y^2\sin y-\cdots\right\}$$

$$=\cos^2 y\cos^2 x+\cos^2 y\sin^2 x+\sin^2 y-\frac{1}{2}\Delta x^2\cos^2 y-\frac{1}{2}\Delta y^2+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}(\Delta x^2\cos^2 y+\Delta y^2)+\cdots$$

左右邊을 比較하여

$$\Delta s^2 \fallingdotseq \Delta x^2\cos^2 y+\Delta y^2$$

Δx, $\Delta y\to 0$ 이면

$$ds^2=dx^2\cos^2 y+dy^2 \qquad\cdots\cdots(6\text{-}8)$$

卽 $$ds=\sqrt{dx^2\cos^2 y+dy^2} \qquad\cdots\cdots(6\text{-}9)$$

$$ds=\sqrt{\cos^2 y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad\cdots\cdots(6\text{-}10)$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\cos^2 y+1}\,dy \qquad\cdots\cdots(6\text{-}11)$$

이다. 이 ds는 球面上의, 또는 球面曲線上의 線素이다. 이들이 微分幾何學의 第一基本微分形式에서 求한 結果와 같은 것은 勿論이다. (6-10)에 (6-6)을 代入하면

$$ds=\sqrt{\cos^2 y+\cot^2\theta\cos^2 y}\,dx=\cos y\,\mathrm{cosec}\,\theta\,dx \qquad\cdots\cdots(6\text{-}12)$$

(6-11)에 (6-7)을 代入하면

$$ds=\sqrt{\tan^2\theta\sec^2 y\cos^2 y+1}\,dy=\sqrt{\tan^2\theta+1}\,dy=\sec\theta\,dy \qquad\cdots\cdots(6\text{-}13)$$

또는

$$\frac{ds}{dy}=\sec\theta \quad \cdots\cdots(6\text{-}14)$$

가 誘導된다.

6-5. 大圈과 子午線과의 交角

二点 P_1, P_2를 지나는 大圈의 方程式은

$$A_{12}X+B_{12}Y+C_{12}Z=0$$

이고

$$X=\cos y\cos x,\quad Y=\cos y\sin x,\quad Z=\sin y$$

이다. 大圈에 있어서는 y는 x의 函數이므로

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX}{dx}&=-\sin y\cos x\frac{dy}{dx}-\cos y\sin x\\ \frac{dY}{dx}&=-\sin y\sin x\frac{dy}{dx}+\cos y\cos x\\ \frac{dZ}{dx}&=\cos y\frac{dy}{dx}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6\text{-}16)$$

이다. 大圈의 方程式을 x에 관하여 微分하면

$$A_{12}\frac{dX}{dx}+B_{12}\frac{dY}{dx}+C_{12}\frac{dZ}{dx}=0$$

이고 여기에 (6-16)을 代入하고 整理하여

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B_{12}\cos y\cos x-A_{12}\cos y\sin x}{A_{12}\sin y\cos x+B_{12}\sin y\sin x-C_{12}\cos y} \quad \cdots\cdots(6\text{-}17)$$

를 얻는다. 그런데

$$\frac{dy}{dx}=\cot\theta\cos y$$

이므로

$$\cot\theta=\frac{B_{12}\cos x-A_{12}\sin x}{A_{12}\sin y\cos x+B_{12}\sin y\sin x-C_{12}\cos y} \quad \cdots\cdots(6\text{-}18)$$

가 된다.

또 $P_0(x_0, y_0)$을 極으로 하는 大圈에 있어서는 大圈의 方程式이

$$A_0X+B_0Y+C_0Z=0$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B_0\cos y\cos x-A_0\cos y\sin x}{A_0\sin y\cos x+B_0\sin y\sin x-C_0\cos y} \quad \cdots\cdots(6\text{-}19)$$

이고

$$\cot\theta=\frac{B_0\cos x-A_0\sin x}{A_0\sin y\cos x+B_0\sin y\sin x-C_0\cos y} \quad \cdots\cdots(6\text{-}20)$$

가 된다.

6-6. 航程線에 관한 考察

公式 (6-6)의

$$\frac{dy}{dx}=\cot\theta\cos y$$

에서

$$\cot\theta=a$$

라 놓으면

$$\frac{dy}{dx}=a\cos y \qquad \cdots\cdots(6\text{-}21)$$

이고 따라서

$$adx=\sec y\ dy$$

$$ax=\int\sec y\ dy=\log\left\{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}+\log c=\log c\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

卽

$$x=\frac{1}{a}\log c\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \cdots\cdots(6\text{-}22)$$

가 成立한다. 이것이 座標 (x_1, y_1)을 滿足하기 위한 c를 決定하면

$$x_1=\frac{1}{a}\log c\tan\left(\frac{y_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

에서

$$c=\frac{e^{ax_1}}{\tan\left(\frac{y_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{ax_1}\cot\left(\frac{y_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \cdots\cdots(6\text{-}23)$$

가 된다. 다음에 單位球面의 벡터方程式

$$\left.\begin{aligned} r&=Xi+Yj+Zk\\ &=\cos y\cos x i+\cos y\sin x j+\sin y k\\ \text{에서}\quad x&=\frac{1}{a}\log c\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\quad y=t \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(6\text{-}24)$$

라고 놓으면 $r(t)$는 單位 球面上의 曲線이 된다.

이 球面曲線이 子午線과 만드는 角의 크기 α를 調査해 보자. 이 曲線의 單位接線벡터 t는

$$t=\frac{dXi+dYj+dZk}{\sqrt{\cos^2 y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}$$

이고

$$\frac{dXi+dYj+dZk}{dx}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)i+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)j$$

$$+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)k$$

이므로

$$t=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)i+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)j\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)k\right]$$

또

$$t_M=\frac{\partial X}{\partial y}i+\frac{\partial Y}{\partial y}j+\frac{\partial Z}{\partial y}k$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{a\cos t}$$

$$\frac{dy}{dt}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=a\cos t$$

이므로

$$\cos\alpha=t_M\cdot t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 t+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\left[\frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial Y}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial Z}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 t+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.+\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{dy}{dx}\right]$$

$$=\frac{\frac{dy}{ax}}{\sqrt{\cos^2 t+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{a\cos t}{\sqrt{\cos^2 t+a^2\cos^2 t}}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

卽 α는 一定하다. 實은

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1+a^2}{a^2}-1=\frac{1}{a^2}$$

이므로

$$\cot\alpha=a$$

가 된다. 卽

球面曲線 (6-24)은 子午線과 만드는 角이 一定하고 따라서 航程線의 方程式이 된다.

航程線의 길이는 (6-14)式

$$\frac{ds}{dy}=\sec\theta$$

에서 $\theta=$ 一定이라 놓으면

$$s=\sec\theta\int_{y_2}^{y_3}dy=(y_3-y_2)\sec\theta$$

(6-22)式을 變形하면

$$y=2\tan^{-1}\left(\frac{e^{ax}}{c}\right)-\frac{\pi}{2}$$

이므로

$$y_3=2\tan^{-1}\left(\frac{e^{ax_3}}{c}\right)-\frac{\pi}{2}$$

$$y_2=2\tan^{-1}\left(\frac{e^{ax_2}}{c}\right)-\frac{\pi}{2}$$

이고 따라서

$$s=2\left[\tan^{-1}\left(\frac{e^{ax_3}}{c}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{e^{ax_2}}{c}\right)\right]\sec\theta \quad \cdots\cdots(6\text{-}25)$$

를 얻는다. 이것은 二点 (x_2, y_2), (x_3, y_3) 사이의 航程線의 길이 이고 航程線의 点 (x_1, y_1)을 지날 때는 c 는 (6-23)을 滿足하여야 한다.

7. 結　　言

本稿는 結局 經緯度座標를 利用한 球面上의 大圈에 관한 基本的인 考察이 되었다' 생각하기에 따라서는 그것은 球面圖形의 初等的 數學에서 더 重要한 部門이라고도 할 수 있다.

本稿는 第3章에서 球面三角法을 適用하여 球面上의 二点間의 球面距離, 二点間의 大圈을 $m:n$로 内分, 外分하는 点의 經緯度座標, 大圈의 經緯度方程式等을 求하였다. 이러한 것들은 그 結果나 方法에 있어서 새로운 것은 아니다. 그러나 이러한 것들을 하나의 公式으로 定型化해 놓는 것도 뜻이 있을 것이다.

第4章에서는 球面上의 点의 球中心에 관한 位置벡터의 i, j, k 成分을 X, Y, Z 또는 A_m, B_m, C_m라고 하여 이들을 基本量이라고 이름 붙이고 이들 基本量間의 여러 計算을 通해서 벡터의 計算을 簡單化하는 데 成功하였다. 그 結果 球面三角法의 豫備知識 없이도 第3章의 여러 公式이 簡潔하게 誘導되었고 또 다른 公式도 導出되었다. 特히 球面三角形의 角의 크기가 그 三邊의 크기만 가지고 簡單하게 나타내 졌다. 그리고 그러한 結論들이 正當하다는 것을 極三角形에 관한 考察에서 엿 볼 수 있다.

第5章에서는 基本量의 偏微分을 따져 그 幾何的 뜻을 살펴 보았다. 또 第6章에서는 이미

알고 있는 內容에 대하여 基本量을 適用한 것이고 球面曲線의 接線, $\frac{dy}{dx}$, 線素 ds의 公式, 航程線等을 考察한 것이다.

本稿는 結局 基本量을 活用하여 大圈에 適用시킨 것이라고 하겠다.

參考文獻

1. 金相輪 : 球面三角法, 韓國海洋大學 海事圖書出版部, 1969.
2. Martin M. Lipschutz; Theory and Problems of Differential Geometry, Mcgraw-Hill Book Co, 1969.