球面圖形의 硏究

金　　相　　輪

A Study of Figures on Spherical Surface

By

Kim Sang-Lun

目　　次

其一 벡터에 의한 球面三角法의 再組織

No. 1　Recomposition of Spherical Trigonometry by Vectors

Abstract

Even though the spherical trigonometry has already been completed, the author tries to reorganize the spherical trigonometry by finding new processes for the formulae of spherical trigonometry with the help of the elementary algebra of vectors, using vectors and some of basic axiomatic formulae. But the order of its system follows the conventional order of spherical trigonometry.

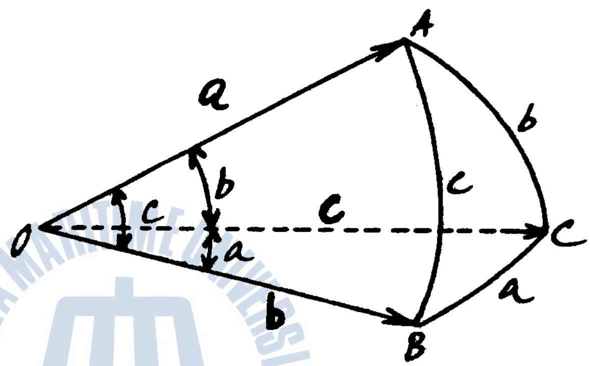
1. 緖　　言

球面三角形의 要素間에 成立하는 若干個의 基本的인 量을 벡터의 內積, 外積을 써서 表示하고 이들 基本量을 거듭 利用하여 球面三角法의 모든 重要公式을 求함으로써 球面三角法을 再組織하려는 것이 本稿의 意圖이다. 斷片的으로는 벡터에 의한 sine 法則의 誘導 等이 Vector analysis의 敎科書 (M. R. Spiegel의 Vector analysis and an introduction to tensor analysis) 等에 揭載되어

있고 또 本人도 前에 (參考文獻 參照) 이러한 方法을 考察한 바가 있었으나 本稿는 前에 考察한 바를 더 發展시켜서 球面三角法 全體를 再組織할려고 하는 바이다.

2. 球面三角形의 基本量과 極三角形

球面 O 上의 3個의 大圓弧 AB, BC, CA로써 되는 圖形 ABC는 球面三角形이고 角 A, B, C는 모두 180° 보다 작게 주어지며 또 A, B, C의 對邊 a, b, c는 그 邊에 對하는 球의 中心角으로서 測定되고 a, b, c도 또 모두 180° 보다 작게 주어진다.



邊의 크기를 그 邊에 對하는 球의 中心角의 크기를 가지고 나타내기 때문에 球의 半徑의 크기는 邊의 크기에 아무런 影響을 미치지 않고 따라서 다음 定理가 成立하는 것은 明白하다.

定理. 球面三角法의 公式에서는 球의 半徑의 크기는 아무런 關係가 없다.

위의 定理에 의해서 半徑의 크기가 1인 單位球를 생각하고 球中心 O를 球面 三角形 ABC의 頂點 A, B, C와 맺어서 되는 백터를

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{b},\quad \overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$$

라고 한다. 勿論 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$는 單位 벡터이다. 또 위의 그림과 같이 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$는 右手系를 이룬다고 假定한다. 이때

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\cos a,\quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\cos b,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos c \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|=\sin a,\quad |\mathbf{c}\times\mathbf{a}|=\sin b,\quad |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sin c \qquad \cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{c}}{\sin b\sin c}=\cos A,\quad \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{a}}{\sin c\sin a}=\cos B,\quad \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b}}{\sin a\sin b}=\cos C \qquad \cdots\cdots(\mathrm{III})$$

$$\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})}{\sin b\sin c}=\sin A\,\mathbf{a},\quad \frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}{\sin c\sin a}=\sin B\,\mathbf{b},\quad \frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})}{\sin a\sin b}=\sin C\,\mathbf{c} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

또는

$$\frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})|}{\sin b\sin c}=\sin A,\quad \frac{|(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})|}{\sin c\sin a}=\sin B,\quad \frac{|(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})|}{\sin a\sin b}=\sin C \qquad \cdots\cdots(\mathrm{IV}_1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\dfrac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})}{\sin b\sin c}=\sin A \\ \mathbf{b}\cdot\dfrac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}{\sin c\sin a}=\sin B \\ \mathbf{c}\cdot\dfrac{(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})}{\sin a\sin b}=\sin C \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{IV}_2)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}=\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin A\sin b\sin c} \\ \boldsymbol{b}=\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin B\sin c\sin a} \\ \boldsymbol{c}=\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin C\sin a\sin b} \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

等이 成立한다. 위에서 ·는 內積을, ×는 外積을 나타내는 것은 勿論이다.

또

$$1-\cos^2 a=\sin^2 a,\quad 1-\cos^2 b=\sin^2 b,\quad 1-\cos^2 c=\sin^2 c$$

이므로

$$\begin{cases} 1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\ 1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) \\ 1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

가 成立한다. 이들 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ), (Ⅳ), (Ⅴ)를 各各 球面 三角形의 第一, 第二, 第三, 第四, 第五 **基本量** 이라고 이름 붙여 놓는다.

極三角形 球面三角形 ABC의 極三角形을 $A'B'C'$라 하고 球의 中心 O와 頂點 A', B', C', 를 맺어서 되는 單位 벡터를 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$라고 한다. 即

$$\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{a}',\quad \overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{b}',\quad \overrightarrow{OC'}=\boldsymbol{c}'$$

와 같다. 이때

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}'=\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}}{\sin a}, & \boldsymbol{b}'=\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}, & \boldsymbol{c}'=\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c} \\ \boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'}{\sin a'}, & \boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'}{\sin b'}, & \boldsymbol{c}=\dfrac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}}{\sin c'} \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{VI})$$

가 成立한다. 따라서 또

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{c}'=\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c} \\ \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{c}'=\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c} \\ \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\dfrac{\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'}{\sin b'}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'}{\sin c'} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\dfrac{\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'}{\sin a'}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'}{\sin c'} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'}{\sin a'}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'}{\sin b'} \end{cases}$$

가 된다. 위의 左右式에서 左邊은 各各 $A'B'C'$, ABC의 第一基本量이고 右邊은 또 各各 第三基本量이 된다. (Ⅰ), (Ⅲ)에 의해서

$$\begin{cases} \cos a'=-\cos A \\ \cos b'=-\cos B \\ \cos c'=-\cos C \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos a=-\cos A' \\ \cos b=-\cos B' \\ \cos c=-\cos C' \end{cases}$$

가 되고 따라서

$$\begin{cases} a'=\pi-A \\ b'=\pi-B \\ c'=\pi-C \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\pi-A' \\ b=\pi-B' \\ c=\pi-C' \end{cases}$$

가 되고

$$A+a'=B+b'=C+c'=A'+a=B'+b=C'+c=\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅶ})$$

가 된다. 또 ABC가 右手系이므로 $A'B'C'$도 右手系가 된다.

3. 直角球面三角形

球面三角法에서는 直角三 角形이 一般 三角形보다 먼저 取扱되므로 여기서도 그에 따르기로 한다. $C=90°$인 直角球面 三角形 ABC를 생각 한다. 이때 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$는 面 OBC 上의 共面벡터이고 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$와 $\boldsymbol{b}$의 交角은 $90°+a$가 된다. 따라서

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\sin b\cos(90°+a)=-\sin b\sin a$이다. 또 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$는 面 OAC 上의 共面벡터이고 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$와 $\boldsymbol{a}$의 交角은 $90°+b$가 된다. 따라서

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\sin a\cos(90°+b)=-\sin a\sin b$$

이다. 따라서

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sin a\sin b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(R-\text{Ⅰ})$$

가 成立한다.

注意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$가 左手系를 이룰 때는

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$의 交角은 $90°-a$, $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$의 交角은 $90°-b$가 되고

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\sin a\ \sin b$

가 된다.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$와 $\boldsymbol{c}$의 交角을 θ_1
$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$와 $\boldsymbol{b}$의 交角을 θ_2 이라고 하면
$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$와 $\boldsymbol{a}$의 交角을 θ_3

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sin a\sin b \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\sin a\sin b \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\sin a\sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin c\cos\theta_1=\sin a\sin b \\ \sin b\cos\theta_2=\sin a\sin b \\ \sin a\cos\theta_3=\sin a\sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_1=\dfrac{\sin a\ \sin b}{\sin\ c} \\ \cos\theta_2=\dfrac{\sin a\ \sin b}{\sin\ b} \\ \cos\theta_3=\sin b,\ \theta_3=90°-\mathrm{b} \end{cases}$$

다음에 $C=90°$ 이면 第一, 二基本量에는 아무 變化가 없고 第三基本量 (Ⅱ)의 세째 式은

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(R-\text{Ⅱ})$$

이 되고 이것은

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}) \quad \cdots\cdots(R-\text{Ⅲ})$$

即

$$\cos c=\cos b\cos a \quad \cdots\cdots(\text{公式}-1)$$

가 된다. 또 第四基本量 (Ⅳ)의 세째 式은

$$\frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin a\sin b}=\boldsymbol{c} \quad \cdots\cdots(R-\text{Ⅳ})$$

가 되고 이것은

$$\frac{1}{\sin a\sin b}\Big\{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\Big\}=\boldsymbol{c}$$

$$\frac{1}{\sin a\sin b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}$$

가 되나 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\sin a\sin b$ 이므로 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}$가 되어서 새로운 進展은 없다.

第三基本量 (Ⅲ)의 첫째, 둘째 式에서

$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{\sin b\sin c}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\\[2ex] \cos B=\dfrac{1}{\sin c\sin a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{\sin b\sin c}\Big\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\Big\}\\[2ex] \cos B=\dfrac{1}{\sin c\sin a}\Big\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\Big\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{\sin b\sin c}\Big\{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\Big\}\\[2ex] \cos B=\dfrac{1}{\sin c\sin a}\Big\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\Big\}\end{cases}$$

$C=90°$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$ 이므로

$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{\sin b\sin c}\Big\{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\Big\}\\[2ex] \cos B=\dfrac{1}{\sin c\sin a}\Big\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\Big\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{\sin b\sin c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\Big\{1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2\Big\}\\[2ex] \cos B=\dfrac{1}{\sin c\sin a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\Big\{1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2\Big\}\end{cases}$$

(Ⅴ)를 適用하면

$$※\quad\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{\sin b\sin c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2\\[2ex] \cos B=\dfrac{1}{\sin c\sin a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2\end{cases}$$

(Ⅰ), (Ⅱ)를 適用하면

$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{\sin b\sin c}\cos a\sin^2 b\\[2ex] \cos B=\dfrac{1}{\sin c\sin a}\cos b\sin^2 a\end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{\cos a \sin b}{\sin c} \\[2ex] \cos B = \dfrac{\cos b \sin a}{\sin c} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式})$$

또

$$\cos A \ \cos B = \frac{\cos a \cos b \ \sin a \sin b}{\sin^2 c}$$

(公式−1)을 適用하면

$$\cos A \ \cos B = \frac{\cos c \sin a \sin b}{\sin^2 c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式})$$

또

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\cos a \sin b}{\cos b \sin a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式})$$

도 誘導된다.

그러나 앞의 page의 ※ 表의 式에 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}},$ $\quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}$를 代入하면

※
$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{1}{\sin b \sin c} \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}} |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|^2 \\[2ex] \cos B = \dfrac{1}{\sin c \sin a} \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}} |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{1}{\sin b \sin c} \dfrac{\cos c}{\cos b} \sin^2 b \\[2ex] \cos B = \dfrac{1}{\sin c \sin a} \dfrac{\cos c}{\cos a} \sin^2 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos A = \cot c \ \tan b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式}-2) \\ \cos B = \cot c \ \tan a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式}-3) \end{cases}$$

가 誘導된다.

다음에 第四基本量 (Ⅳ)의 첫째, 두째 式에서

$$\begin{cases} \sin A \ \mathbf{a} = \dfrac{1}{\sin b \sin c} \left\{ (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} \right\} \\[2ex] \sin B \ \mathbf{b} = \dfrac{1}{\sin c \sin a} \left\{ (\mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin A \ \mathbf{a} = \dfrac{1}{\sin b \sin c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a} \\[2ex] \sin B \ \mathbf{b} = \dfrac{1}{\sin c \sin a} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\sin b \sin c} \\[2ex] \sin B = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\sin c \sin a} \end{cases}$$

(R−Ⅰ)을 代入하여

$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{\sin a \sin b}{\sin b \sin c} \\[2ex] \sin B = \dfrac{\sin a \sin b}{\sin c \sin a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式}-4) \\ \sin B = \dfrac{\sin b}{\sin c} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式}-5) \end{cases}$$

가 誘導된다.

위의 (公式−4), (公式−5)의 誘導는 (IV_1)의 첫째, 둘째 式을 利用해서도 아래와 같이 하여 求해진다. 即

$$\begin{cases} \sin A = \boldsymbol{a} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin b \sin c} \\ \sin B = \boldsymbol{b} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin c \sin a} \end{cases}$$

에서

$$\begin{cases} \sin A = \boldsymbol{a} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin b \sin c} \\ \sin B = \boldsymbol{b} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin c \sin a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin b \sin c} \\ \sin B = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin c \sin a} \end{cases}$$

($R-\mathrm{I}$)을 代入하여

$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式}-4) \\ \sin B = \dfrac{\sin b}{\sin c} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式}-5) \end{cases}$$

와 같다. 이것은 또 (IV_1)을 쓰서도 求해 질 것이다. 또 (VII_3)에서

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin A \ \sin b \sin c} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin B \ \sin c \sin a} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin B \ \sin c \sin a} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin C \ \sin a \ \sin b} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = \dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin C \ \sin a \sin b} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin A \sin b \sin c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin A \sin b \sin c} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin B \ \sin c \sin a} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin B \ \sin c \sin a} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin C \ \sin a \sin b} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = \dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin C \ \sin a \sin b} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin A \ \sin b \sin c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin A \ \sin B \ \sin^2 c \sin a \sin b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin B \ \sin C \ \sin^2 a \ \sin b \sin c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin C \ \sin A \ \sin a \sin^2 b \sin c}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \end{cases}$$

$C=90°$ 이고 또 $(R-\mathrm{I})$을 代入하면

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\sin a\sin b}{\sin A\ \sin B\ \sin^2 c} \\ 1=\dfrac{\sin b}{\sin B\ \sin c} \\ 1=\dfrac{\sin a}{\sin A\ \sin c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin A\ \sin B\ \sin^2 c=\sin a\sin b \\ \sin B=\dfrac{\sin b}{\sin c} & \text{(公式—5)} \\ \sin A=\dfrac{\sin a}{\sin c} & \text{(公式—4)} \end{cases}$$

가 된다. 위에서 그 첫 式은 두째, 세째 式에서 誘導된다.

다음에 球面三角形 ABC의 極三角形 $A'B'C'$에서 (II)을 適用하면

$$\begin{cases} \dfrac{a'\times b'\cdot a'\times c'}{\sin b'\ \sin c'}=\cos A' \\ \dfrac{b'\times c'\cdot b'\times a'}{\sin c'\ \sin a'}=\cos B' \\ \dfrac{c'\times a'\cdot c'\times b'}{\sin a'\ \sin b'}=\cos C' \end{cases}$$

와 같고 여기에 (VI), (VII)을 代入하면

$$\frac{\dfrac{b\times c}{\sin a}\times\dfrac{c\times a}{\sin b}\cdot\dfrac{b\times c}{\sin a}\times\dfrac{a\times b}{\sin c}}{\sin(180°-B)\ \sin(180°-C)}=\cos(180°-a)$$

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

여고 여기에 (IV)를 適用하면

$$\begin{cases} \dfrac{\sin C\,c\cdot(-\sin B\,b)}{\sin B\ \sin C}=-\cos a \\ \dfrac{\sin A\,a\cdot(-\sin C\,c)}{\sin C\ \sin A}=-\cos b \\ \dfrac{\sin B\,b\cdot(-\sin A\,a)}{\sin A\ \sin B}=-\cos c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\cdot c=\cos a \\ a\cdot c=\cos b \\ a\cdot b=\cos c \end{cases}$$

이것은 事實이로되 아무 結論도 없다. (I)이 誘導되었을 따름이다. 따라서 方向을 바꾸어서 다음 關係式을 設定한다.

$$\begin{cases} a'\times b'\cdot a'\times c'=b'\cdot c'-(a'\cdot b')(a'\cdot c') \\ b'\times c'\cdot b'\times a'=c'\cdot a'-(b'\cdot c')(a'\cdot b') \\ c'\times a'\cdot c'\times b'=a'\cdot b'-(a'\cdot c')(b'\cdot c') \end{cases}$$

여기에 (Ⅵ)를 適用하여

$$\begin{cases} \dfrac{b\times c}{\sin a}\times\dfrac{c\times a}{\sin b}\cdot\dfrac{b\times c}{\sin a}\times\dfrac{a\times b}{\sin c}=\dfrac{c\times a}{\sin b}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}-\left(\dfrac{b\times c}{\sin a}\cdot\dfrac{c\times a}{\sin b}\right)\left(\dfrac{b\times c}{\sin a}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}\right) \\ \dfrac{c\times a}{\sin b}\times\dfrac{a\times b}{\sin c}\cdot\dfrac{c\times a}{\sin b}\times\dfrac{b\times c}{\sin a}=\dfrac{a\times b}{\sin c}\cdot\dfrac{b\times c}{\sin a}-\left(\dfrac{c\times a}{\sin b}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}\right)\left(\dfrac{b\times c}{\sin a}\cdot\dfrac{c\times a}{\sin b}\right) \\ \dfrac{a\times b}{\sin c}\times\dfrac{b\times c}{\sin a}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}\times\dfrac{c\times a}{\sin b}=\dfrac{b\times c}{\sin a}\cdot\dfrac{c\times a}{\sin b}-\left(\dfrac{b\times c}{\sin a}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}\right)\left(\dfrac{c\times a}{\sin b}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}\right) \end{cases}$$

여기에 $(R-\mathrm{IV})$, $(R-\mathrm{II})$를 適用하여

$$※\begin{cases} c\cdot\dfrac{b\times c}{\sin a}\times\dfrac{a\times b}{\sin c}=\dfrac{c\times a}{\sin b}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c} \\ \dfrac{c\times a}{\sin b}\times\dfrac{a\times b}{\sin c}\cdot(-c)=\dfrac{a\times b}{\sin c}\cdot\dfrac{b\times c}{\sin a} \\ \dfrac{a\times b}{\sin c}\times\dfrac{b\times c}{\sin a}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}\times\dfrac{c\times a}{\sin b}=-\left(\dfrac{b\times c}{\sin a}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}\right)\left(\dfrac{c\times a}{\sin b}\cdot\dfrac{a\times b}{\sin c}\right) \end{cases}$$

(Ⅳ), (Ⅱ)을 適用하여

$$\begin{cases} (-\sin B)(b\cdot c)=-\cos A \\ (-\sin A)(a\cdot c)=-\cos B \\ \sin B(-\sin A)(a\cdot b)=-(-\cos B)(-\cos A) \end{cases}$$

(Ⅰ)을 適用하면

$$\begin{cases} \sin B\ \cos a=\cos A \\ \sin A\ \cos b=\cos B \\ \cos c=\dfrac{\cos B}{\sin B}\ \dfrac{\cos A}{\sin A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin B\ \cos a=\cos A & \cdots\cdots(\text{公式}-6) \\ \sin A\ \cos b=\cos B & \cdots\cdots(\text{公式}-7) \\ \cos c=\cot A\ \cot B & \cdots\cdots(\text{公式}-8) \end{cases}$$

를 얻는다.

다음에 또 위의 ※表의 關係式에서

$$\begin{cases} c\cdot\dfrac{(b\times c\cdot b)a-(b\times c\cdot a)b}{\sin a\ \sin c}=\dfrac{a\times b}{\sin c}\cdot\dfrac{c\times a}{\sin b} \\ \dfrac{(c\times a\cdot b)a-(c\times a\cdot a)b}{\sin b\ \sin c}\cdot(-c)=\dfrac{a\times b}{\sin c}\cdot\dfrac{b\times c}{\sin a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c\cdot\dfrac{-(a\cdot b\times c)b}{\sin a\ \sin c}=\dfrac{a\times b}{\sin c}\cdot\dfrac{c\times a}{\sin b} \\ \dfrac{(a\cdot b\times c)a}{\sin b\ \sin c}\cdot(-c)=\dfrac{a\times b}{\sin c}\cdot\dfrac{b\times c}{\sin a} \end{cases}$$

$(R-\mathrm{I})$과 (Ⅱ)을 適用하여

$$\begin{cases} \dfrac{-\sin a\sin b}{\sin a\sin c}(b\cdot c)=-\cos A \\ \dfrac{\sin a\sin b}{\sin b\sin c}(-a\cdot c)=-\cos B \end{cases}$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$ 이므로

$$※\quad\begin{cases}\dfrac{\sin b}{\sin c}\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}=\cos A\\[2ex]\dfrac{\sin a}{\sin c}\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}=\cos B\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\sin b}{\sin c}\dfrac{\cos c}{\cos b}=\cos A\\[2ex]\dfrac{\sin a}{\sin c}\dfrac{\cos c}{\cos a}=\cos B\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan b\ \cot c=\cos A & \cdots\cdots(\text{公式}-9)\\ \tan a\ \cot c=\cos B & \cdots\cdots(\text{公式}-10)\end{cases}$$

가 誘導된다.

以上에서 求한 (公式−1), (公式−2), …, (公式−10)은 Napier 의 Rule 로써 暗記되는 基本公式임은 勿論이다.

다음에 또

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\\(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}\end{cases}$$

를 가져온다. 여기서 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$의 交角은 $90°+a$, $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}$의 交角은 $90°+b$이다. 위에서

$$\begin{cases}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}|^2=|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}|^2\\|(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}|^2=|(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}|^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 b\sin^2(90°+a)=(\cos c\ \boldsymbol{c}-\cos a\ \boldsymbol{a})\cdot(\cos c\ \boldsymbol{c}-\cos a\ \boldsymbol{a})\\\sin^2 a\sin^2(90°+b)=(\cos b\ \boldsymbol{b}-\cos c\ \boldsymbol{c})\cdot(\cos b\ \boldsymbol{b}-\cos c\ \boldsymbol{c})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 b\cos^2 a=\cos^2 c-\cos a\cos c(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\cos a\cos c(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\cos^2 a\\\sin^2 a\cos^2 b=\cos^2 b-\cos b\cos c(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-\cos b\cos c(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})+\cos^2 c\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 b\cos^2 a=\cos^2 c+\cos^2 a-2\cos a\cos c(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\\\sin^2 a\cos^2 b=\cos^2 b+\cos^2 c-2\cos b\cos c(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\end{cases}$$

$C=90°$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$이므로

$$\begin{cases}\sin^2 b\cos^2 a=\cos^2 c+\cos^2 a-2\cos a\cos c\ \dfrac{\cos c}{\cos a}\\[2ex]\sin^2 a\cos^2 b=\cos^2 b+\cos^2 c-2\cos b\cos c\ \dfrac{\cos c}{\cos b}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 b\cos^2 a=\cos^2 a-\cos^2 c\\\sin^2 a\cos^2 b=\cos^2 b-\cos^2 c\end{cases}\quad\cdots\cdots(\text{公式})$$

$$\begin{cases}\sin^2 b\cos^2 a=(1-\sin^2 a)-(1-\sin^2 c)\\\sin^2 a\cos^2 b=(1-\sin^2 b)-(1-\sin^2 c)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 b\cos^2 a=\sin^2 c-\sin^2 a\\ \sin^2 a\cos^2 b=\sin^2 c-\sin^2 b\end{cases} \cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

가 誘導된다. 그러나 이들 關係式은 또 다음과 같이 하여 求할 수도 있다. 即(Ⅱ)를 써서

$$\begin{cases}\sin^2 c-\sin^2 a=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2\\ \sin^2 c-\sin^2 b=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2\end{cases}$$

하여

$$\begin{cases}\sin^2 c-\sin^2 a=1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-1+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2\\ \sin^2 c-\sin^2 b=1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-1+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 c-\sin^2 a=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\\ \sin^2 c-\sin^2 b=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\end{cases}$$

$C=90°$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$ 이므로

$$\begin{cases}\sin^2 c-\sin^2 a=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\\ \sin^2 c-\sin^2 b=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 c-\sin^2 a=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\}\\ \sin^2 c-\sin^2 b=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})^2\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\}\end{cases}$$

다시 (Ⅴ)를 適用하여

$$\begin{cases}\sin^2 c-\sin^2 a=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2\\ \sin^2 c-\sin^2 b=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}|^2\end{cases}$$

(Ⅰ), (Ⅱ)를 適用하여

$$\begin{cases}\sin^2 c-\sin^2 a=\cos^2 a\sin^2 b\\ \sin^2 c-\sin^2 b=\cos^2 b\sin^2 a\end{cases} \cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

와 같다.

또 第一基本量을 쓰서

$$\begin{cases}\cos^2 a-\cos^2 c=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\\ \cos^2 b-\cos^2 c=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\end{cases}$$

$C=90°$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$이므로

$$\begin{cases}\cos^2 a-\cos^2 c=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\\ \cos^2 b-\cos^2 c=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos^2 a-\cos^2 c=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\}\\ \cos^2 b-\cos^2 c=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\}\end{cases}$$

(Ⅴ)를 適用하여

$$\begin{cases}\cos^2 a-\cos^2 c=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2\\ \cos^2 b-\cos^2 c=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2\end{cases}$$

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의해서

$$\begin{cases}\cos^2 a-\cos^2 c=\cos^2 a\sin^2 b\\ \cos^2 b-\cos^2 c=\cos^2 b\sin^2 a\end{cases}\quad\cdots\cdots\text{(公式)}$$

가 誘導된다.

다음에 또 第二基本量 (Ⅱ)를 써서

$$\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$$

(Ⅴ)를 適用하여

$$\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c=1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2+1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2-1+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

$C=90°$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$이므로

$$\begin{aligned}\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c&=1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\\&=1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\}\\&=\{1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2\}\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\}\\&=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2\\&=\sin^2 a\sin^2 b\end{aligned}$$

即

$$\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c=\sin^2 a\ \sin^2 b\quad\cdots\cdots\text{(公式)}$$

가 誘導된다.

다음에 또 (IV_1)의 第四基本量을 適用하여

$$\frac{\sin^2 A-\cos^2 B}{\sin^2 B}=\frac{\left|\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin b\sin c}\right|^2-\left(\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{\sin c\sin a}\right)^2}{\left|\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin c\ \sin a}\right|^2}$$

$$=\frac{\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin b\sin c}\cdot\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin b\ \sin c}-\left\{\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\sin c\ \sin a}\right\}^2}{\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin c\ \sin a}\cdot\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin c\ \sin a}}$$

$C=90°$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$이므로

$$=\frac{\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin^2 b\ \sin^2 c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-\dfrac{\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\}^2}{\sin^2 c\ \sin^2 a}}{\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin^2 c\ \sin^2 a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})}$$

$$=\frac{\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin^2 b\sin^2 c}-\dfrac{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\}^2}{\sin^2 c\ \sin^2 a}}{\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin^2 c\ \sin^2 a}}$$

$(R-\mathrm{I})$, (Ⅴ)를 適用하여

$$=\frac{\dfrac{\sin^2 a\ \sin^2 b}{\sin^2 b\ \sin^2 c}-\dfrac{\cos^2 b\ |\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^4}{\sin^2 c\ \sin^2 a}}{\dfrac{\sin^2 a\ \sin^2 b}{\sin^2 c\ \sin^2 a}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin^2 a}{\sin^2 c}-\dfrac{\cos^2 b\ \sin^2 a}{\sin^2 c}}{\dfrac{\sin^2 b}{\sin^2 c}}$$

$$= \frac{\sin^2 a - \cos^2 b\ \sin^2 a}{\sin^2 b}$$

$$= \frac{\sin^2 a\ (1-\cos^2 b)}{\sin^2 b}$$

$$= \sin^2 a$$

即

$$\frac{\sin^2 A - \cos^2 B}{\sin^2 B} = \sin^2 a$$

$$\sin^2 A - \cos^2 B = \sin^2 B\ \sin^2 a \quad \text{.........(公式)}$$

가 誘導된다.

다음에 또

$$\frac{\sin^2 c - \sin^2 b}{\cos^2 b\ \sin^2 c} = \frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2}{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - 1 + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2}{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2 - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

또

$$\sin^2 A = \left|\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin b\ \sin c}\right|^2$$

$$= \frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{\sin^2 a\ \sin^2 b}{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

$$= \frac{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

따라서

$$\frac{\sin^2 c - \sin^2 b}{\cos^2 b\ \sin^2 c} = \sin^2 A$$

即

$$\sin^2 c - \sin^2 b = \sin^2 A\ \cos^2 b\ \sin^2 c \quad \text{.........(公式)}$$

가 成立한다.

4. 二直角, 三直角 球面三角形

球面三角形 ABC에서 $A=90°$, $B=90°$일 때는 (Ⅲ)의 첫째, 두째 式은

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=0 \\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=0 \end{cases}$$

이 되고 따라서

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0 \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \quad \cdots\cdots ① \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②를 ①에 代入하고 또 ①을 ②에 代入하면

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\{1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})^2\}=0 \\ (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\{1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})^2\}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|^2=0 \\ (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|^2=0 \end{cases}$$

$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|^2=\sin^2 c \neq 0$ 이므로

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0 \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos a=0 \\ \cos b=0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a=b=90°$$

다음에 역시 (Ⅰ)에서

$$\cos C=\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}}{\sin a \ \sin b}$$

$$=\frac{1}{\sin a \ \sin b}\left\{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\right\}$$

$$=\frac{1}{\sin a \ \sin b}(\cos c-\cos b\cos a)$$

$a=b=90°$를 알았으므로

$$\cos C=\cos c$$

$$\therefore \quad C=c$$

卽

$A=B=90°$이면 $a=b=90°$이고 $C=c$이다(定理)는 事實이 證明된다.

다음에 또 $A=B=C=90°$일 때는 (Ⅰ)에서

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=0 \\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=0 \\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdots\cdots\cdots ① \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\cdots\cdots\cdots ② \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②, ③을 ①의 右邊에, ①, ③을 ②의 右邊에, ①, ②를 ③의 右邊에 代入하면

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-1\}=0 \\ (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-1\}=0 \\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-1\}=0 \end{cases}$$

그러나 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|, |\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}|$의 크기는 모두 1보다 작으므로

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \neq 1$$

이고 따라서

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0 \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0 \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \end{cases}$$

$$\cos a=\cos b=\cos c=0$$

$$\therefore\quad a=b=c=90^\circ$$

即

$A=B=C=90^\circ$이면 $a=b=c=90^\circ$이다(**定理**)는 事實이 證明된다.

5. 象限球面三角形

$c=90^\circ$인 象限球面三角形 ABC를 생각한다. ABC에서 $c=90^\circ$이면 極 三角形 $A'B'C'$에서는 $C'=90^\circ$가 된다. 따라서 直角三角形 $A'B'C'$에서 주어진 要素사이의 關係를 求하고 그것을 ABC의 要素로 變換하는 것이 從來의 方法이였다. 그리고 거기에 必要한 有力한 方法은 (Ⅶ)의 適用이였다. 그러나 여기서는 그러한 方法을 取하지 않고 基本量에서 直接 象限三角形의 基本公式을 誘導할려고 한다.

象限三角形 ABC에서 $c=90^\circ$이면 $\cos c=0, \sin c=1$이므로 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=1$이 된다. 이것은

$$1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$$

이므로 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$이면 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=1$이고 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\geqq 0$이므로 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=1$이 되며 逆으로 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=1$이면 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=1$이고 따라서 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=1$이 되고 따라서

$$1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=1$$

即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 이 된다. 말할 것도 없이 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$과 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=1$은 同値이다.

$c=90°$이면 (Ⅲ)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\sin b}=\cos A \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{\sin a}=\cos B \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}}{\sin a\ \sin b}=\cos C \end{cases}$$

여기서

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})}{\sin b}=\cos A \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\sin a}=\cos B \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})}{\sin a\ \sin b}=\cos C \end{cases}$$

이고 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$이므로

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{\sin b}=\cos A \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{\sin a}=\cos B \\[2ex] \dfrac{-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})}{\sin a\ \sin b}=\cos C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\cos a}{\sin b}=\cos A \\[2ex] \dfrac{\cos b}{\sin a}=\cos B \\[2ex] \dfrac{-\cos b\ \cos a}{\sin a\ \sin b}=\cos C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos a=\sin b\ \cos A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 5-1) \\ \cos b=\sin a\ \cos B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 5-2) \\ \tan a \tan b\ \cos C+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 5-3) \end{cases}$$

가 誘導된다. 이들은 $C'=90°$인 直角三角形 $A'B'C'$의 基本公式

$$\begin{cases} \sin B'\ \cos a'=\cos A' \\ \sin A'\ \cos b'=\cos B' \\ \cos c'=\cot A'\ \cot B' \end{cases} \qquad ((9)\ \text{page 의 公式—6, 7, 8})$$

에 (Ⅶ)을 適用한 結果이다.

다음에 ABC의 極三角形 $A'B'C'$에서 $C'=90°$이면

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'=\sin a'\sin b'$$

가 成立하고 여기에 (Ⅵ), (Ⅶ)을 適用하면

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}=\sin(\pi-A)\sin(\pi-B) \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}=\sin(\pi-A)\sin(\pi-B) \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\times\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}=\sin(\pi-A)\sin(\pi-B) \right.$$

(Ⅳ)를 適用하여

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\sin A\,\boldsymbol{a}=\sin A\ \sin B\\ &\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\cdot\sin B\,\boldsymbol{b}=\sin A\ \sin B\\ &\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\sin C\,\boldsymbol{c}=\sin A\ \sin B \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\sin A}{\sin a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=\sin A\ \sin B\\ &\frac{\sin B}{\sin b}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\sin A\ \sin B\\ &\frac{\sin C}{\sin c}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\sin A\ \sin B \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\sin a\sin B\\ &\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sin b\sin A\\ &\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{\sin A\ \sin B}{\sin C}, \text{ 단 } \sin c=\sin 90^\circ=1 \end{aligned}\right.$$

따라서

※ $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\sin a\sin B=\sin b\sin A=\frac{\sin A\sin B}{\sin C}$$

이고 여기서

$$\left\{\begin{aligned} &\sin a\ \sin C=\sin A &&\cdots\cdots(\text{公式 } 5-4)\\ &\sin b\ \sin C=\sin B &&\cdots\cdots(\text{公式 } 5-5) \end{aligned}\right.$$

를 얻는다. 이것은 $C'=90°$인 直角三角形 $A'B'C'$의 公式

$$\left\{\begin{aligned} &\sin A'\ \sin c'=\sin a'\\ &\sin B'\ \sin c'=\sin b' \end{aligned}\right. \qquad ((7)\text{page의 公式—4, 5})$$

에 (Ⅶ)을 適用한 結果이다.

또 基本量 (Ⅳ)는 $c=90°$이면

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin b}=\sin A\ \boldsymbol{a}\\ &\frac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin a}=\sin B\ \boldsymbol{b}\\ &\frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin a\ \sin b}=\sin C\ \boldsymbol{c} \end{aligned}\right.$$

가 된다. 따라서

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin b}=\sin A\ \boldsymbol{a}\\ &\frac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin a}=\sin B\ \boldsymbol{b}\\ &\frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin a\sin b}=\sin C\ \boldsymbol{c} \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{\sin b}=\sin A \\ \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{\sin a}=\sin B \\ \dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sin a\sin b}=\sin C \end{cases}$$

여기서

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\sin b\ \sin A=\sin a\sin B=\sin a\ \sin b\ \sin C$$

가 된다. 여기서 (公式 5−4), (公式 5−5)가 誘導된다. 또 (17) page의 ※表의 式과 比較하면

$$\frac{\sin A\ \sin B}{\sin C}=\sin a\sin b\ \sin C$$

即

$$\sin A\ \sin B=\sin a\ \sin b\ \sin^2 C$$

가 되고 이것은 (公式 5−4), (公式 5−5)를 邊 邊 곱한 結果가 된다. 또

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin B\ \sin a}\cdot\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin C\ \sin a\ \sin b} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin C\ \sin a\ \sin b}\cdot\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin A\ \sin b} \end{cases}$$

에서

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}}{\sin B\ \sin a}\cdot\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin C\sin a\sin b} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin C\ \sin a\ \sin b}\cdot\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin A\ \sin b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin B\ \sin C\ \sin^2 a\sin b} \\ 1=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin A\ \sin C\ \sin a\sin^2 b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\sin^2 a\ \sin^2 B}{\sin B\ \sin C\ \sin^2\ \sin b} \\ 1=\dfrac{\sin^2 b\ \sin^2 A}{\sin A\ \sin C\ \sin a\ \sin^2 b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin B=\sin b\ \sin C & \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }5-5) \\ \sin A=\sin a\ \sin C & \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }5-4) \end{cases}$$

다음에 $C'=90°$인 極三角形 $A'B'C'$에서는

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=(\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a}')(\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b}')$$

인 關係가 있었다. 여기에 (Ⅵ)을 適用하면

$$\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}=\left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\right)\left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\right)$$

(Ⅱ)을 適用하여

$$-\cos C=(-\cos B)(-\cos A)$$

$$\cos A\ \cos B+\cos C=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }5-6)$$

를 얻는다. 이것은 $C'=90°$인 三角形 $A'B'C'$의 (5)page의 (公式－1) $\cos c'=\cos a'\cos b'$ 에 (Ⅶ)을 適用한 結果이다.

$C'=90°$인 三角形 $A'B'C'$ 에서는

$$\begin{cases} \cos A'=\dfrac{1}{\sin b'\ \sin c'}\dfrac{\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a}'}|\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'|^2 \\[2ex] \cos B'=\dfrac{1}{\sin c'\ \sin a'}\dfrac{\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b}'}|\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'|^2 \end{cases}$$

이 成立한다((6) page ※表). 여기에 Ⅵ), (Ⅶ)를 適用하면

$$\begin{cases} \cos(\pi-a)=\dfrac{1}{\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)}\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}}\left|\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\right|^2 \\[4ex] \cos(\pi-b)=\dfrac{1}{\sin(\pi-C)\sin(\pi-A)}\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}\left|\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\right|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos a=\dfrac{1}{\sin B\sin C}\dfrac{-\cos C}{-\cos B}\sin^2 B \\[2ex] -\cos b=\dfrac{1}{\sin C\ \sin A}\dfrac{-\cos C}{-\cos A}\sin^2 A \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos a=\tan B\ \cot C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 5-7) \\ -\cos b=\tan A\ \cot C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 5-8) \end{cases}$$

위의 두 公式은 $C'=90°$인 三角形 $A'B'C'$의 公式

$$\begin{cases} \cos A'=\cot c'\ \tan b' \\ \cos B'=\cot c'\ \tan a' \end{cases} \quad ((6)\text{ page의 公式}-2,3)$$

에 (Ⅶ)를 適用한 結果이다.

다음에 또 $C'=90°$인 三角形 $A'B'C'$에서는

$$\begin{cases} \dfrac{\sin b'}{\sin c'}\dfrac{\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a}'}=\cos A' \\[2ex] \dfrac{\sin a'}{\sin c'}\dfrac{\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b}'}=\cos B' \end{cases}$$

가 成立한다((10) page ※表). 여기에 (Ⅵ). (Ⅶ)을 適用하면

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(\pi-B)}{\sin(\pi-C)}\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}}=\cos(\pi-a) \\[4ex] \dfrac{\sin(\pi-A)}{\sin(\pi-C)}\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}=\cos(\pi-b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin B}{\sin C}\,\dfrac{-\cos C}{-\cos B} = -\cos a \\ \dfrac{\sin A}{\sin C}\,\dfrac{-\cos C}{\cos A} = -\cos b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan B \ \cot C = -\cos a \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式}\ -9) \\ \tan A \ \cot C = -\cos b \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式}\ -10) \end{cases}$$

가 成立한다. 이들은 $C'=90°$인 三角形 $A'B'C'$의 公式

$$\tan b' \ \cot c' = \cos A'$$

$$\tan a' \ \cot c' = \cos B' \qquad ((10)\ \text{page의 公式}-9, 10)$$

에 (Ⅶ)을 適用한 結果이다.

6. 二象限, 三象限 球面三角形

三角形 ABC에서 $a=b=90°$일 때는 (Ⅱ)은

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\sin c} = \cos A \\ \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{\sin c} = \cos B \\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b} = \cos C \end{cases}$$

가 되고 따라서

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\sin c} = \cos A \\ \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})}{\sin c} = \cos B \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) = \cos C \end{cases}$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$이므로

$$\begin{cases} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \cos C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 90° \\ B = 90° \\ c = C \end{cases}$$

即 $a=b=90°$이면 $A=B=90°$이고 $c=C$이다(定理)는 것이 證明된다.

또 $a=b=c=90°$이면 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 이므로 $A=B=C=90°$가 되는 것은 위의 過程에서 쉽게 알 수 있다.

7. 一般 球面三角形

一般 球面三角形 ABC의 要素間의 關係를 考察한다. 우선 第四基本量(Ⅳ)를 變形하면

$$\begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin b\ \sin c}=\sin A\,\boldsymbol{a} \\ \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin c\ \sin a}=\sin B\,\boldsymbol{b} \\ \dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin a\ \sin b}=\sin C\,\boldsymbol{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\sin b\ \sin c\ \sin A \\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\sin a\ \sin c\ \sin B \\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sin a\ \sin b\ \sin C \end{cases}$$

勿論

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

이지마는 여기서 便宜上

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\sin b\ \sin c\ \sin A \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\sin c\ \sin a\ \sin B \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sin a\ \sin b\ \sin C \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots(7-1)$$

라고 해둔다. 即 左邊의 첫 文字와 右邊의 마지막 文字는 같은 文字의 小, 大 文字라고 約束해 두는 것이다. 또

$$\sin a\ \sin b\ \sin C=\sin b\ \sin c\ \sin A=\sin c\ \sin a\ \sin B$$

$$\therefore\ \frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

即 sine 法則이 誘導되었다. 이 sine 法則은

$$\frac{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|}{\left|\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin b\ \sin c}\right|}=\frac{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}{\left|\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin c\ \sin a}\right|}=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{\left|\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin a\ \sin b}\right|}=\boldsymbol{k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(7-2)$$

와 같이 쓸 수도 있다.

다음에 第三基本量 (Ⅱ)을 變形하면

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\sin b\ \sin c}=\cos A \\ \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\sin a\ \sin c}=\cos B \\ \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})}{\sin a\ \sin b}=\cos C \end{cases}$$

와 같이 되고 따라서

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\sin b\ \sin c\ \cos A \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+\sin c\ \sin a\ \cos B \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})+\sin a\ \sin b\ \cos C \end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots(7-3)$$

$$\begin{cases} \cos a=\cos b\ \cos c+\sin b\ \sin c\ \cos A \\ \cos b=\cos c\ \cos a+\sin c\ \sin a\ \cos B \\ \cos c=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b\ \cos C \end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

即 第一 cosine 法則을 얻는다.

三角形 ABC의 極三角形 $A'B'C'$에서 (Ⅲ)을 適用하면

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'}{\sin c'}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}'}{\sin b'}=\cos A' \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'}{\sin a'}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{a}'}{\sin c'}=\cos B' \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'}{\sin b'}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{b}'}{\sin a'}=\cos C' \end{cases}$$

가 되고 여기에 (Ⅵ), (Ⅶ)을 適用하면

$$※\quad\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\times\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}{\sin(\pi-C)}\cdot\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}}{\sin(\pi-B)}=\cos(\pi-a) \\[4ex] \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}}{\sin(\pi-A)}\cdot\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}}{\sin(\pi-C)}=\cos(\pi-b) \\[4ex] \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}}{\sin(\pi-B)}\cdot\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\times\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}{\sin(\pi-A)}=\cos(\pi-c) \end{cases}$$

(Ⅳ)를 適用하여

$$\begin{cases} \dfrac{\sin C\,\boldsymbol{c}}{\sin C}\cdot\dfrac{-\sin B\,\boldsymbol{b}}{\sin B}=-\cos a \\[2ex] \dfrac{\sin A\,\boldsymbol{a}}{\sin A}\cdot\dfrac{-\sin C\,\boldsymbol{c}}{\sin C}=-\cos b \\[2ex] \dfrac{\sin B\,\boldsymbol{b}}{\sin B}\cdot\dfrac{-\sin A\,\boldsymbol{a}}{\sin A}=-\cos c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos a \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\cos b \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\cos c \end{cases}$$

가 되어서 別다른 進展이 없고 또 위의 ※ 表의 式을 다음과 같이 變形하면

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}}{\sin a\ \sin b}}{\sin C}\cdot\dfrac{\dfrac{-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin a\ \sin c}}{\sin B}=-\cos a \\[4ex] \dfrac{\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{\sin b\ \sin c}}{\sin A}\cdot\dfrac{\dfrac{-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin b\ \sin a}}{\sin C}=-\cos b \\[4ex] \dfrac{\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}}{\sin c\ \sin a}}{\sin B}\cdot\dfrac{\dfrac{-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin c\ \sin b}}{\sin A}=-\cos c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})}{\sin B\ \sin C\ \sin^2 a\ \sin b\sin c}=\cos a \\[2ex] \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})}{\sin A\ \sin C\ \sin a\sin^2 b\sin c}=\cos b \end{cases}$$

$$\left\{\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\sin A\sin B\sin a\ \sin b\ \sin^2 c}=\cos\ c\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2=\sin B\ \sin C\ \sin^2 a\sin b\sin c\\(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2=\sin A\ \sin C\ \sin a\sin^2 b\sin c\\(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2=\sin A\ \sin B\ \sin a\sin b\sin^2 c\end{array}\right.$$

가 된다. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$에 차례로 $\sin a\sin b\sin C$, $\sin b\sin c\sin A$, $\sin c\sin a\sin B$를 代入하면

$$\left\{\begin{array}{l}\sin b\sin C=\sin c\sin B\\\sin c\sin A=\sin a\sin C\\\sin a\sin B=\sin b\sin A\end{array}\right.$$

가 되고 이것으로부터 sine 法則이 誘導된다. 그리고 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$에 어느 값을 代入하여도 sine 法則外에 導來되는 것은 없다.

다음에 또 極三角形 $A'B'C'$에서 (Ⅳ)를 適用하면

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'}{\sin c'}\times\dfrac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}'}{\sin b'}=\sin A'\ \boldsymbol{a}'\\[2ex]\dfrac{\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'}{\sin a'}\times\dfrac{\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{a}'}{\sin c'}=\sin B'\ \boldsymbol{b}'\\[2ex]\dfrac{\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'}{\sin b'}\times\dfrac{\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{b}'}{\sin a'}=\sin C'\ \boldsymbol{c}\end{array}\right.$$

이고 여기에 (Ⅵ), (Ⅶ)를 適用하여

※

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\times\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}{\sin(\pi-C)}\times\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}}{\sin(\pi-B)}=\sin(\pi-a)\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\\[4ex]\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}}{\sin(\pi-A)}\times\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}}{\sin(\pi-C)}=\sin(\pi-b)\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\\[4ex]\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}}{\sin(\pi-B)}\times\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\times\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}}{\sin(\pi-A)}=\sin(\pi-c)\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\end{array}\right.$$

(Ⅳ)를 適用하여

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\sin C\boldsymbol{c}}{\sin C}\times\dfrac{-\sin B\boldsymbol{b}}{\sin B}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\\[2ex]\dfrac{\sin A\boldsymbol{a}}{\sin A}\times\dfrac{-\sin C\boldsymbol{c}}{\sin C}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\\[2ex]\dfrac{\sin B\boldsymbol{b}}{\sin B}\times\dfrac{-\sin A\boldsymbol{a}}{\sin A}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{array}\right.$$

가 되어서 矛盾은 아니로데 아무 進展은 없다. 이것은 事實은 當然한 歸結이라 하겠다. 앞에서도 이런 경우가 자주 나타났지마는 여기서 이 理由를 따지면 (Ⅳ)를 適用한 結果에다가 다시 (Ⅳ)를 適用했기 때문일 것이다.

(23) page 의 ※表의 關係式을 變形하면

$$\begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}}{\sin C\ \sin a\ \sin b}\times\dfrac{-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin B\ \sin a\ \sin c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \\ \dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{\sin A\ \sin b\ \sin c}\times\dfrac{-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin C\ \sin a\ \sin b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} \\ \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}}{\sin B\ \sin c\ \sin a}\times\dfrac{-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin A\ \sin b\ \sin c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin B\ \sin C\ \sin^2 a\ \sin b\ \sin c}=1 \\ \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin A\ \sin C\ \sin a\ \sin^2 b\ \sin c}=1 \\ \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2}{\sin A\ \sin B\ \sin a\ \sin b\ \sin^2 c}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2=\sin B\ \sin C\ \sin^2 a\ \sin b\ \sin c \\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2=\sin A\ \sin C\ \sin a\ \sin^2 b\ \sin c \\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2=\sin A\ \sin B\ \sin a\ \sin b\ \sin^2 c \end{cases}$$

이것은 앞에서도 나온 結果이다.

三角形 ABC의 極三角形 $A'B'C'$에서 다음 關係式을 만든다.

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{c}'-(\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{a}')(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{c}') \\ \boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a}'-(\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b}')(\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{a}') \\ \boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'-(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{c}')(\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b}') \end{cases}$$

여기에 (Ⅵ), (Ⅶ)를 適用하여

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\times\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}=\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}-\left(\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\right)\left(\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\right) \\ \dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\right)\left(\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\right) \\ \dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\times\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}=\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}-\left(\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\right)\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\right) \end{cases}$$

(Ⅵ)을 適用하여

$$\begin{cases} \sin C\,\boldsymbol{c}\cdot(-\sin B)\boldsymbol{b}=(-\cos A)-(-\cos C)(-\cos B) \\ \sin A\,\boldsymbol{a}\cdot(-\sin C)\boldsymbol{c}=(-\cos B)-(-\cos A)(-\cos C) \\ \sin B\,\boldsymbol{b}\cdot(-\sin A)\boldsymbol{a}=(-\cos C)-(-\cos B)(-\cos A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin B\sin C(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})=\cos A+\cos B\cos C \\ \sin A\sin C(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=\cos B+\cos A\cos C \\ \sin B\sin A(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=\cos C+\cos B\cos A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\dfrac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{\cos B+\cos C\cos A}{\sin A\sin C} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B} \end{cases} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7\text{—}4)$$

$$\begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

卽 第二 cosine 法則이 誘導되었다.

다음에

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \\ \qquad =\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) \\ \qquad =\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \\ \qquad =\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}) \\ \qquad =\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \\ \qquad =\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) \\ \qquad =\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) \end{cases}$$

위의 右邊을 簡單히 하여

$$※\begin{cases} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\{1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 \\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\{1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 \\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\{1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2\}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2 \\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2\}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}|^2 \\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\{1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})^2\}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2 \\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\{1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2\}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|^2 \end{cases}$$

(Ⅰ), (Ⅱ)를 適用하여

$$\begin{cases} \sin c \sin b \cos A + \sin a \sin c \cos B \cos c = \cos a \sin^2 c \\ \sin a \sin c \cos B + \sin c \sin b \cos A \cos c = \cos b \sin^2 c \\ \sin a \sin c \cos B + \sin b \sin a \cos C \cos a = \cos b \sin^2 a \\ \sin b \sin a \cos C + \sin a \sin c \cos B \cos a = \cos c \sin^2 a \\ \sin b \sin a \cos C + \sin c \sin b \cos A \cos b = \cos c \sin^2 b \\ \sin c \sin b \cos A + \sin b \sin a \cos C \cos b = \cos a \sin^2 b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin b \cos A + \sin a \cos c \cos B = \sin c \cos a \\ \sin a \cos B + \sin b \cos c \cos A = \sin c \cos b \\ \sin c \cos B + \sin b \cos a \cos C = \sin a \cos b \\ \sin b \cos C + \sin c \cos a \cos B = \sin a \cos c \\ \sin a \cos C + \sin c \cos b \cos A = \sin b \cos c \\ \sin c \cos A + \sin a \cos b \cos C = \sin b \cos a \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

이들은 第三 cosine 法則이다.

極三角形 $A'B'C'$에서도 위의 ※表의 關係式은 成立한다. 卽

$$
\begin{cases}
\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{c}'+(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{a}')(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}')=(\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}')|\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'|^2\\
\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{a}'+(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{c}')(\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}')=(\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}')|\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'|^2\\
\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{a}'+(\mathbf{c}'\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{b}')(\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}')=(\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}')|\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'|^2\\
\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{b}'+(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{a}')(\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}')=(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}')|\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'|^2\\
\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{b}'+(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{c}')(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}')=(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}')|\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'|^2\\
\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{c}'+(\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{b}')(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}')=(\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}')|\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'|^2
\end{cases}
$$

와 같다. 여기에 (Ⅵ)을 適用하여

$$
\begin{cases}
\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}+\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\\
\qquad=\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\left|\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right|^2\\
\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}+\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\\
\qquad=\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\left|\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right|^2\\
\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}+\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\\
\qquad=\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\left|\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right|^2\\
\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}+\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\\
\qquad=\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\left|\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right|^2\\
\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}+\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\\
\qquad=\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\left|\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right|^2\\
\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}+\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\\
\qquad=\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\left|\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right|^2
\end{cases}
$$

여기에 (Ⅳ)를 適用하여

$$
\begin{cases}
\sin C\,\mathbf{c}\cdot(-\sin B)\mathbf{b}+\{\sin A\,\mathbf{a}\cdot(-\sin C)\mathbf{c}\}(-\cos C)=(-\cos A)\sin^2 C\\
\sin A\,\mathbf{a}\cdot(-\sin C)\mathbf{c}+\{\sin C\,\mathbf{c}\cdot(-\sin B)\mathbf{b}\}(-\cos C)=(-\cos B)\sin^2 C\\
\sin A\,\mathbf{a}\cdot(-\sin C)\mathbf{c}+\{\sin B\,\mathbf{b}\cdot(-\sin A)\mathbf{a}\}(-\cos A)=(-\cos B)\sin^2 A\\
\sin B\,\mathbf{b}\cdot(-\sin A)\mathbf{a}+\{\sin C\,\mathbf{c}\cdot(-\sin B)\mathbf{b}\}(-\cos B)=(-\cos C)\sin^2 B\\
\sin B\,\mathbf{b}\cdot(-\sin A)\mathbf{a}+\{\sin C\,\mathbf{c}\cdot(-\sin B)\mathbf{b}\}(-\cos B)=(-\cos C)\sin^2 B\\
\sin C\,\mathbf{c}\cdot(-\sin B)\mathbf{b}+\{\sin B\,\mathbf{b}\cdot(-\sin A)\mathbf{a}\}(-\cos B)=(-\cos A)\sin^2 B
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\sin B\sin C(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})-\sin A\sin C\cos C(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=\cos A\sin^2 C\\
\sin A\sin C(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\sin B\sin C\cos C(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})=\cos B\sin^2 C\\
\sin A\sin C(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\sin A\sin B\cos A(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})=\cos B\sin^2 A
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \sin A \sin B(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) - \sin A \sin C \cos A(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) = \cos C \sin^2 A \\ \sin A \sin B(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) - \sin B \sin C \cos B(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) = \cos C \sin^2 B \\ \sin B \sin C(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) - \sin A \sin B \cos B(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \cos A \sin^2 B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin B \cos a - \sin A \cos C \cos b = \cos A \sin C \\ \sin A \cos b - \sin B \cos C \cos a = \cos B \sin C \\ \sin C \cos b - \sin B \cos A \cos c = \cos B \sin A \\ \sin B \cos c - \sin C \cos A \cos b = \cos C \sin A \\ \sin A \cos c - \sin C \cos B \cos a = \cos C \sin B \\ \sin C \cos a - \sin A \cos B \cos c = \cos A \sin B \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

다음에 (25) page의 ※表의 式을 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$로써 나누어서 다음과 같은 關係式을 만든다.

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}} + \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}} = \dfrac{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}} \\ \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}} + \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}} = \dfrac{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}} \\ \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}} + \dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}} = \dfrac{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}} \\ \dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}} + \dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}} = \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}} \\ \dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}} + \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}} = \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}} \\ \dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}} + \dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}} = \dfrac{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|^2}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}} \end{cases}$$

(Ⅱ)과 (7−1)을 適用하여

$$\begin{cases} \dfrac{\sin b \sin c \cos A}{\sin b \sin c \sin A} + \dfrac{\sin c \sin a \cos B \cos c}{\sin c \sin a \sin B} = \dfrac{\cos a \sin^2 c}{\sin c \sin a \sin B} \\ \dfrac{\sin c \sin a \cos B}{\sin c \sin a \sin B} + \dfrac{\sin b \sin c \cos A \cos c}{\sin b \sin c \sin A} = \dfrac{\cos b \sin^2 c}{\sin b \sin c \sin A} \\ \dfrac{\sin c \sin a \cos B}{\sin c \sin a \sin B} + \dfrac{\sin a \sin b \cos C \cos a}{\sin a \sin b \sin C} = \dfrac{\cos b \sin^2 a}{\sin a \sin b \sin C} \\ \dfrac{\sin a \sin b \cos C}{\sin a \sin b \sin C} + \dfrac{\sin c \sin a \cos B \cos a}{\sin c \sin a \sin B} = \dfrac{\cos c \sin^2 a}{\sin c \sin a \sin B} \\ \dfrac{\sin a \sin b \cos C}{\sin a \sin b \sin C} + \dfrac{\sin b \sin c \cos A \cos b}{\sin b \sin c \sin A} = \dfrac{\cos c \sin^2 b}{\sin b \sin c \sin A} \\ \dfrac{\sin b \sin c \cos A}{\sin b \sin c \sin A} + \dfrac{\sin a \sin b \cos C \cos b}{\sin a \sin b \sin C} = \dfrac{\cos a \sin^2 b}{\sin a \sin b \sin C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot A + \dfrac{\cos B}{\sin B} \cos c = \dfrac{\cot a \sin c}{\sin B} \\ \cot B + \dfrac{\cos A}{\sin A} \cos c = \dfrac{\cot b \sin c}{\sin A} \\ \cos B + \dfrac{\cos C}{\sin C} \cos a = \dfrac{\cot b \sin a}{\sin C} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\cot C+\frac{\cos B}{\sin B}\cos a=\frac{\cot c\sin a}{\sin B}\\
&\cot C+\frac{\cos A}{\sin A}\cos b=\frac{\cot c\sin b}{\sin A}\\
&\cot A+\frac{\cos C}{\sin C}\cos b=\frac{\cot a\sin b}{\sin C}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\cot A\sin B+\cos B\cos c=\cot a\sin c\\
&\cot B\sin A+\cos A\cos c=\cot b\sin c\\
&\cot B\sin C+\cos C\cos a=\cot b\sin a\\
&\cot C\sin B+\cos B\cos a=\cot c\sin a\\
&\cot C\sin A+\cos A\cos b=\cot c\sin b\\
&\cot A\sin C+\cos C\cos b=\cot a\sin b
\end{aligned}\right. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

이것은 四隣要素의 公式이다.

ABC의 極三角形 $A'B'C'$에서도 다음 關係가 成立한다.

$$\left|\begin{aligned}
&\frac{\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{c}'}{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}+\frac{(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{a}')(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}')}{\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'}=\frac{(\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}')|\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'|^2}{\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'}\\
&\frac{\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{a}'}{\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'}+\frac{(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{c}')(\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}')}{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}=\frac{(\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}')|\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'|^2}{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}\\
&\frac{\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{a}'}{\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'}+\frac{(\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{b}')(\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}')}{\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}=\frac{(\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}')|\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'|^2}{\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}\\
&\frac{\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{b}'}{\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}+\frac{(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{a}')(\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}')}{\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'}=\frac{(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}')|\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'|^2}{\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'}\\
&\frac{\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{b}'}{\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}+\frac{(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{c}')(\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}')}{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}=\frac{(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}')|\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'|^2}{\mathbf{a}',\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}\\
&\frac{\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{c}'}{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}+\frac{(\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}'\times\mathbf{b}')(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}')}{\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}=\frac{(\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}')|\mathbf{a}\times\mathbf{c}|^2}{\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}
\end{aligned}\right.$$

여기에 (Ⅵ)을 適用하여

$$\left|\begin{aligned}
&\frac{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}+\frac{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\\
&\qquad=\frac{\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\left|\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right|^2}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}\\
&\frac{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}+\frac{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\\
&\qquad=\frac{\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\left|\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right|^2}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}
\end{aligned}\right.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}+\frac{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}\right]\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\\
&\qquad=\frac{\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\left|\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right|^2}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}\\
&\left[\frac{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}+\frac{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}\right]\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\\
&\qquad=\frac{\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\left|\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right|^2}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}}\\
&\left[\frac{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}+\frac{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}\right]\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\\
&\qquad=\frac{\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\left|\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right|^2}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}\\
&\left[\frac{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}}+\frac{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}\right]\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\\
&\qquad=\frac{\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\left|\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right|^2}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}}
\end{aligned}
\right.
$$

여기에 (IV)를 適用하여

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sin C\,\mathbf{c}\cdot(-\sin B)\mathbf{b}}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\sin A\,\mathbf{a}}+\frac{\sin A\,\mathbf{a}\cdot(-\sin C)\,\mathbf{c}}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\sin B\,\mathbf{b}}(-\cos C)=\frac{(-\cos A)\sin^2 C}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\sin B\,\mathbf{b}}\\
&\frac{\sin A\,\mathbf{a}\cdot(-\sin C)\,\mathbf{c}}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\sin B\,\mathbf{b}}+\frac{\sin C\,\mathbf{c}\cdot(-\sin B)\mathbf{b}}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\sin A\,\mathbf{a}}(-\cos C)=\frac{(-\cos B)\sin^2 C}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\sin A\,\mathbf{a}}\\
&\frac{\sin A\,\mathbf{a}\cdot(-\sin C)\mathbf{c}}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\sin B\,\mathbf{b}}+\frac{\sin B\,\mathbf{b}\cdot(-\sin A)\mathbf{a}}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\sin C\,\mathbf{c}}(-\cos A)=\frac{(-\cos B)\sin^2 A}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\sin C\,\mathbf{c}}\\
&\frac{\sin B\,\mathbf{b}\cdot(-\sin A)\mathbf{a}}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\sin C\,\mathbf{c}}+\frac{\sin A\,\mathbf{a}\cdot(-\sin C)\mathbf{c}}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\sin B\,\mathbf{b}}(-\cos A)=\frac{(-\cos C)\sin^2 A}{\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\sin B\,\mathbf{b}}\\
&\frac{\sin B\,\mathbf{b}\cdot(-\sin A)\mathbf{a}}{\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\sin C\,\mathbf{c}}+\frac{\sin C\,\mathbf{c}\cdot(-\sin B)\mathbf{b}}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\sin A\,\mathbf{a}}(-\cos B)=\frac{(-\cos C)\sin^2 B}{\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\sin A\,\mathbf{a}}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\left\{ \frac{\sin C\, \boldsymbol{c}\cdot(-\sin B)\boldsymbol{b}}{\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot \sin A\ \boldsymbol{a}} + \frac{\sin B\, \boldsymbol{b}\cdot(-\sin A)\boldsymbol{a}}{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot \sin C\, \boldsymbol{c}}(-\cos B) = \frac{(-\cos A)\sin^2 B}{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot \sin C\, \boldsymbol{c}} \right.$$

위에서 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 이고 또 sine 法則을 쓰면 分母는 兩邊이 모두 다 같아 진다. 따라서

$$\left\{\begin{array}{l}
\sin B\sin C(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-\sin C\sin A\cos C(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=\cos A\sin^2 C\\
\sin C\sin A(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\sin B\sin C\cos C(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\cos B\sin^2 C\\
\sin C\sin A(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\sin A\sin B\cos A\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\cos B\sin^2 A\\
\sin A\sin B(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\sin C\sin A\cos A\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=\cos C\sin^2 A\\
\sin A\sin B(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\sin B\sin C\cos B(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\cos C\sin^2 B\\
\sin B\sin C(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-\sin A\sin B\cos B(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\cos A\sin^2 B
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\sin B\cos a-\sin A\cos C\cos b=\cos A\sin C\\
\sin A\cos b-\sin B\cos C\cos a=\cos B\sin C\\
\sin C\cos b-\sin B\cos A\cos c=\cos B\sin A\\
\sin B\cos c-\sin C\cos A\cos b=\cos C\sin A\\
\sin A\cos c-\sin C\cos B\cos a=\cos C\sin B\\
\sin C\,\mathrm{sos}\, a-\sin A\,\mathrm{sos}\, b\cos c=\cos A\sin B
\end{array}\right. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\sin B}{\sin b}\sin b\cos a-\sin A\cos C\cos b=\cos A\sin C\\
\dfrac{\sin A}{\sin a}\sin a\cos b-\sin B\cos C\cos a=\cos B\sin C\\
\dfrac{\sin C}{\sin c}\sin c\cos b-\sin B\cos A\cos c=\cos B\sin A\\
\dfrac{\sin B}{\sin b}\sin b\cos c-\sin C\cos A\cos b=\cos C\sin A\\
\dfrac{\sin A}{\sin a}\sin a\cos c-\sin C\cos B\cos a=\cos C\sin B\\
\dfrac{\sin C}{\sin c}\sin c\cos a-\sin A\cos B\cos c=\cos A\sin B
\end{array}\right.$$

여기에 sine 法則을 適用해서

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\sin A}{\sin a}\sin b\cos a-\sin A\cos C\cos b=\cos A\sin C\\
\dfrac{\sin B}{\sin b}\sin a\cos b-\sin B\cos C\cos a=\cos B\sin C\\
\dfrac{\sin B}{\sin b}\sin c\cos b-\sin B\cos A\cos c=\cos B\sin A\\
\dfrac{\sin C}{\sin c}\sin b\cos c-\sin C\cos A\cos b=\cos C\sin A
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin C}{\sin c}\sin a\cos c-\sin C\cos B\cos a=\cos C\sin B\\[2ex]\dfrac{\sin A}{\sin a}\sin c\cos a-\sin A\cos B\cos c=\cos A\sin B\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cot a\sin b-\cos C\cos b=\cos A\sin B\\ \cot b\sin a-\cos C\cos a=\cot B\sin C\\ \cot b\sin c-\cos A\cos c=\cot B\sin A\\ \cot c\sin b-\cos A\cos b=\cot C\sin A\\ \cot c\sin a-\cos B\cos a=\cot C\sin B\\ \cot a\sin c-\cos B\cos c=\cot A\sin B\end{array}\right. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式})$$

위의 式은 앞의 四隣要素의 公式에 双對의 原理를 適用한 結果이다.

다음에

$$\left\{\begin{array}{l}\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin c}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\sin b}\right)\\[2ex]\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{1-\cos B}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\sin a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{\sin c}\right)\\[2ex]\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1-\cos C}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\sin b}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}}{\sin a}\right)\end{array}\right.$$

에서

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin b\sin c-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}{\sin b\sin c}\right\}$$

$$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin c\sin a-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\sin c\sin a}\right\}$$

$$\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin a\sin b-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})}{\sin a\sin b}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}\right\}\\[2ex]\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin c\sin a-\cos b+\cos a\cos c}{\sin c\sin a}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\cos(a-c)-\cos b}{\sin c\sin a}\right\}\\[2ex]\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin a\sin b-\cos c+\cos a\cos b}{\sin a\sin b}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\cos(a-b)-\cos c}{\sin a\sin b}\right\}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\sin\dfrac{a+b-c}{2}\sin\dfrac{a-b+c}{2}}{\sin b\sin c}=\dfrac{\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin b\sin c}\\[3ex]\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\sin\dfrac{a+b-c}{2}\sin\dfrac{-a+b+c}{2}}{\sin c\sin a}=\dfrac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}\\[3ex]\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\sin\dfrac{a-b+c}{2}\sin\dfrac{-a+b+c}{2}}{\sin a\sin b}=\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-a)}{\sin a\sin b}\\[3ex]\qquad\text{단 } s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\end{array}\right.$$

또

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1+\cos A}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\sin c\sin b}\right) \\ \cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{1+\cos B}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{\sin a\sin c}\right) \\ \cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1+\cos C}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}}{\sin b\sin a}\right) \end{cases}$$

에서

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c} \\ \cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a} \\ \cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b} \end{cases}$$

가 誘導된다. 이들은 半角의 公式이다. 같은 방법으로 半邊의 公式도 求할 수 있다

例 $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin c}=\dfrac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}$ 의 證明

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin c}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\sin c}$$

$$=\frac{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}$$

(7-2)를 適用하여

$$=\frac{k\left|\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\sin b\sin c}\right|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,k\left|\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{\sin c\sin a}\right|}{k\left|\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})}{\sin a\sin b}\right|}$$

$$=\frac{\left|\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{\sin b\sin c}\right|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\left|\dfrac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sin c\sin a}\right|}{\left|\dfrac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\sin a\sin b}\right|}$$

(7-1), (7-4)를 適用하여

$$=\frac{\sin A\dfrac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin A\sin C}+\dfrac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{\cos B+\cos A\cos C+\cos A+\cos B\cos C}{\sin^2 C}$$

$$=\frac{(\cos A+\cos B)(1+\cos C)}{1-\cos^2 C}$$

$$=\frac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}\ (\text{證了})$$

例 $\dfrac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin C}$ 의 證明

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin C}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{\left|\frac{(a\times b)\times(a\times c)}{\sin b\sin c}\right|\left(\frac{b\times c\cdot b\times a}{\sin c\sin a}\right)+\left(\frac{a\times b\cdot a\times c}{\sin b\sin c}\right)\left|\frac{(b\times c)\times(b\times a)}{\sin c\sin a}\right|}{\left|\frac{(c\times a)\times(c\times b)}{\sin a\sin b}\right|}$$

(7−2)를 適用하여

$$=\frac{\frac{1}{k}|b\times c|\frac{c\cdot a-(b\cdot c)(a\cdot b)}{\sin c\sin a}+\frac{b\cdot c-(a\cdot b)(a\cdot c)}{\sin b\sin c}\frac{1}{k}|c\times a|}{\frac{1}{k}|a\times b|}$$

$$=\frac{\sin a\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin c\sin a}+\frac{\cos a-\cos c\cos b}{\sin b\sin c}\sin b}{\sin c}$$

$$=\frac{\cos b-\cos a\cos c+\cos a-\cos c\cos b}{\sin^2 c}$$

$$=\frac{(\cos a+\cos b)(1-\cos c)}{1-\cos^2 c}$$

$$=\frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}\ (\text{證了})$$

8. 記號法

第一基本量, 第二基本量은 그 記法이 簡單하나 第三, 四基本量은 複雜하다, 지금 第三基本量을

$$\begin{cases} a. =\cos A=\dfrac{a\times b\cdot a\times c}{\sin b\sin c} \\ b. =\text{cso } B=\dfrac{b\times c\cdot b\times a}{\sin c\sin a} \\ c. =\cos C=\dfrac{c\times a\cdot c\times b}{\sin a\sin b} \end{cases}$$

라 記號하고 또 第四基本量을

$$\begin{cases} a_\times=\sin A=\left|\dfrac{(a\times b)\times(a\times c)}{\sin b\sin c}\right| \\ b_\times=\sin B=\left|\dfrac{(b\times c)\times(b\times a)}{\sin c\sin a}\right| \\ c_\times=\sin C=\left|\dfrac{(c\times a)\times(c\times b)}{\sin a\sin b}\right| \end{cases}$$

로써 나타내기로 하자. 그러면

sine 法則은

$$\frac{|b\times c|}{a_\times}=\frac{|c\times a|}{b_\times}=\frac{|a\times b|}{c_\times}=k \qquad \cdots\cdots(8-1)$$

이고 또 第一 cosine 法則은

$$\begin{cases} b\cdot c=(c\cdot a)(a\cdot b)+|c\times a||a\times b|a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}|b. \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})+|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|c. \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8-2)$$

이며 第二 cosine 法則은

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\dfrac{a_{\cdot}+b_{\cdot}c_{\cdot}}{b_{\times}c_{\times}} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{b_{\cdot}+c_{\cdot}a_{\cdot}}{c_{\times}a_{\times}} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{c_{\cdot}+a_{\cdot}b_{\cdot}}{a_{\times}b_{\times}} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8-3)$$

가 된다. 이들을 利用한 計算의 例로서 81 page의 例를 가져오면

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin c}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\sin c}$$

$$=\frac{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}$$

(8－1), (8－3)을 適用하여

$$=\frac{ka_{\times}\dfrac{b_{\cdot}+a_{\cdot}b_{\cdot}}{c_{\times}a_{\times}}+\dfrac{a_{\cdot}+b_{\cdot}c_{\cdot}}{b_{\times}c_{\times}}kb_{\times}}{kc_{\times}}$$

$$=\frac{b_{\cdot}+a_{\cdot}b_{\cdot}+a_{\cdot}+b_{\cdot}c_{\cdot}}{c_{\times}^{2}}$$

$$=\frac{(a_{\cdot}+b_{\cdot})(1+c_{\cdot})}{c_{\times}^{2}}$$

$$=\frac{(\cos A+\cos B)(1+\cos C)}{\sin^{2}C}$$

$$=\frac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}$$

가 된다.

다음에 sine 法則을

$$\frac{a_{\times}}{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|}=\frac{b_{\times}}{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}=m$$

라고 놓으면

$$a_{\times}=m|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|,\quad b_{\times}=m|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|$$

이고 또

$$m=\frac{a_{\times}+b_{\times}}{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|},\quad m=\frac{a_{\times}-b_{\times}}{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|-|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}$$

또 第二 cosine 法則으로 부터

$$\boldsymbol{a}_{\cdot}+\boldsymbol{b}_{\cdot}\boldsymbol{c}_{\cdot}=\boldsymbol{b}_{\times}\boldsymbol{c}_{\times}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=m|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|\boldsymbol{c}_{\times}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$\boldsymbol{b}_{\cdot}+\boldsymbol{c}_{\cdot}\boldsymbol{a}_{\cdot}=\boldsymbol{c}_{\times}\boldsymbol{a}_{\times}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=m|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}_{\times}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$$

이 두 式을 邊邊 加하면

$$(\boldsymbol{a}_{\cdot}+\boldsymbol{b}_{\cdot})(1+\boldsymbol{c}_{\cdot})=m\boldsymbol{c}_{\times}\sin(a+b)$$

$$=\frac{\boldsymbol{a}_{\times}\pm\boldsymbol{b}_{\times}}{|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\pm|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{c}_{\times}\sin(a+b)$$

$$\therefore \quad \frac{\boldsymbol{a}_{\times}\pm\boldsymbol{b}_{\times}}{\boldsymbol{a}_{\cdot}+\boldsymbol{b}_{\cdot}}=\frac{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\pm|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}{\sin(a+b)}\,\frac{1+\boldsymbol{c}_{\cdot}}{\boldsymbol{c}_{\times}}$$

$$\text{即} \quad \frac{\sin A\pm\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{\sin a\pm\sin b}{\sin(a+b)}\,\frac{1+\cos C}{\sin C}$$

이것을 變形하여

$$\begin{cases} \tan\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cot\dfrac{C}{2} \\[2ex] \tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}\cot\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

를 얻을 수 있다. 即 Napier 의 比例式을 얻는다.

9. 結　　言

以上으로 벡터를 利用하여 球面三角法의 重要한 公式을 거의 다 求하였다. 그 求法 過程을 돌이켜 생각하면 公式의 導出이 때로는 매우 秩序있고 또 明快 하였고 때로는 複雜한 過程을 거쳐야 했고 또 어떤 경우는 매우 無理한 過程을 밟아야 했다. 그리고 半角의 公式의 앞 部分(實狀 이것이 本稿의 大部分을 占하지마는)은 벡터의 初步的인 計算이라고 할 수 있으나 半角의 公式의 導出과 記號法의 方法은 아무래도 三角法의 方法 그대로라고 아니할 수 없다. 그러나 어쨋던 球面三角法을 벡터에 의해서 考察하는 作業을 여기에서 一段落지게 한 氣分이다.

參考文獻

1. 金相輪 : 球面三角法, 韓國海洋大學 海事圖書出版部, 1969.
2. 金相輪 : 「벡터에 의한 球面三角法의 公式의 誘導에 관한 考察」, 한국해양대학 논문집, 제5집, 1971.
3. 金相輪 : 「直角球面三角形의 10個의 公式의 誘導에 관한 考察」, 한국해양대학 논문집, 제6집, 1972.

其二, 經緯度座標 球面幾何의 考察

No. 2 A Study of Spherical geometry by coordinates of longitude and latitude.

Abstract

The author tries to study spherical geometry according to the style of analytic geometry by establishing a system of rectangular coordinates consisted of the prime meridian and the equator on the earth and also establishing (x, y) as the coordinates of the point P which consisted of the longitude x and the latitude y of the point P on the earth to find our herewith the distance between the two points on the earth, the coordinates of the point which divides the arc of great circle into the ratio $m:n$, the equation of the circle, the equation of the great circle, and the equation of the locus of the points under a certain condition on the earth.

1. 緖 言

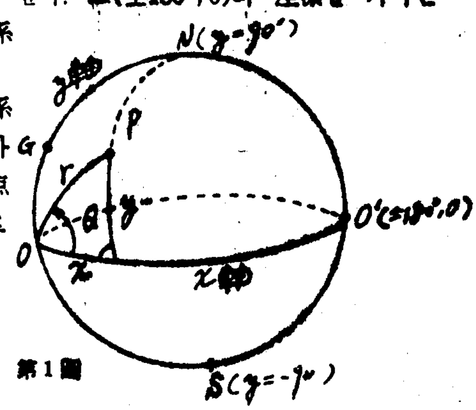
地球面上의 点의 經度, 緯度를 x, y 座標로 하는 直角座標系를 地球面上에 設定하고 그 座標를 活用하여 地球面上의 解析幾何를 考察하려는 것이 本稿의 目的이다.

2. 經緯度座標와 極座標

地球를 球라고 看做하고 Greenwich 를 지나는 本初子午線을 y 軸, 地球赤道를 x 軸으로 定하면 x, y 軸은 直交한다. 그 交点 O을 原点으로 하고 x, y 軸으로 되는 直角座標系를 생각하여 地球面上의 点 P의 座標를(x, y)라고 할때 x는 P의 經度를, y는 P의 緯度를 나타내는 것으로 約束한다. 이 때 緯度는 点 P가 北緯度이면 y는 正, 南緯度이면 y는 負라고 約束하고 또 經度도 P点이 東經이면 x는 正, 西經이면 x는 負라고 約束한다. 그러면

$$-90° \leqq y \leqq 90°, \quad -180° \leqq x \leqq 180°$$

인 關係가 있다. 原点 O의 座標는$(0, 0)$이고 또 北極 N의 x座標는 不定이며 y座標는 $+90°$가 되고 南極 S도 그 x座標는 不定이고 y座標는 $-90°$가 된다. 點$(\pm 180°, 0)$의 座標를 가지는 点 O'를 裏点이라고 이름 붙이기로 한다. 이 直角座標系를 經緯度座標系라고 부르기로 한다.

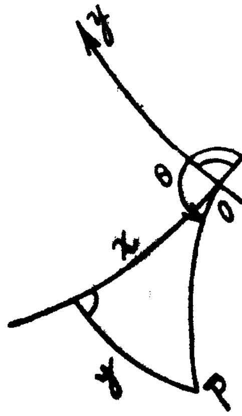


第1圖

다음에 球面上에 点 P가 주어질 때 P를 經緯度座標系의 原点 O와 大圓으로 맺을 때 $OP=r$라 하고, 또 OP가 x軸의 正의 方向과 만드는 角을 θ라고 할 때 (r, θ)를 点 P의 極座標라고 부르기로 한다. 단 r는 恒常 正으로 取하고 $0° \leqq \theta \leqq 360°$로 定하기로 한다. 이 때

$$\cos r = \cos x \cos y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\tan\theta = \frac{\tan y}{\sin x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$



第2圖

$$\tan x = \tan r \cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots③$$

$$\sin y = \sin r \sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots④$$

인 關係式이 点 P의 位置 如何에 關係없이 即 x, y가 各各 正이건 負이건 항상 成立한다. 또

$$\cos y = \cos r \cos x + \sin r \sin x \cos\theta \quad \cdots\cdots⑤$$

인 關係도 成立한다. ③, ④에서

$$\cos\theta = \cot r \tan x, \qquad \sin\theta = \frac{\sin y}{\sin r}$$

이고 따라서

$$\frac{\sin^2 y}{\sin^2 r} + \frac{\cos^2 r \sin^2 x}{\sin^2 r \cos^2 x} = 1$$

여기에 ①式 $\cos r = \cos x \cos y$를 代入하고 簡單히 하여

$$\sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y = \sin^2 r \quad \cdots\cdots\cdots⑥$$

을 얻을 수 있다. 그러나 위의 ⑥은 ①式을 제곱하여 얻을 수도 있다.

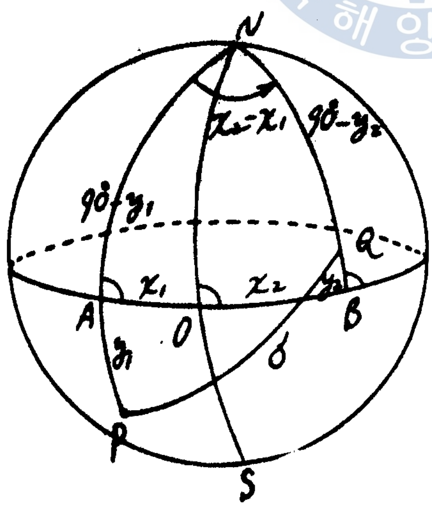
3. 二点 $P(x_1, y_1)$, (x_2, y_2)間의 球面距離

P, Q 間의 球面距離를 σ 라고 하면 第3圖의 球面三角形 NPQ에서

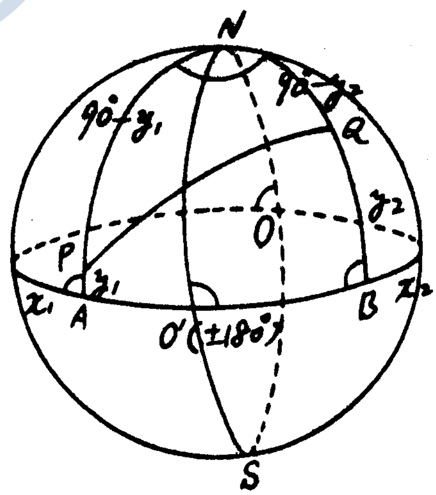
$$\cos\sigma = \cos(90°-y_1)\cos(90°-y_2) + \sin(90°-y_1)\sin(90°-y_2)\cos(x_2-x_1)$$

따라서

$$\cos\sigma = \sin y_1 \sin y_2 + \cos y_1 \cos y_2 \cos(x_2-x_1) \quad \cdots\cdots\cdots⑦$$



第3圖



第4圖

를 얻는다.

裏点의 附近에서는 第4圖의 경우

$$AB = \angle PNQ = (180° - x_1) + (180° + x_2) = 360° + (x_2 - x_1)$$

이 되므로 ⑦式은 이때에도 成立한다. ⑦은 언제던지 成立한다. 단 여기서 注意할 것은 $|AB| = \angle PNQ$는 그 크기가 180°보다 작아야 하고 또 이때 當然히 $PQ < 180°$가 된다.

또 特別히 二点이 $(m, 0)$, $(0, n)$이면 ⑦에서 다음 式이 成立한다.

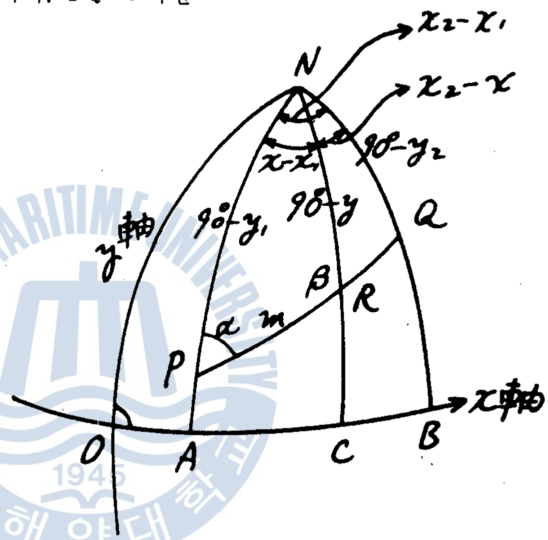
$$\cos\sigma = \cos m \cos n$$

4. 二点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 $m:n$로 內,外分하는 点의 座標

PQ를 $m:n$로 內分하는 点을 $R(x, y)$라고 하자. $PQ = \sigma$이면

$$PR = \frac{m}{m+n}\sigma, \quad QR = \frac{n}{m+n}\sigma$$

이다.



第 5 圖

三角形 NPR (第5圖)에서

$$\frac{\sin(90° - y)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{m}{m+n}\sigma}{\sin(x - x_1)}$$

三角形 NPQ에서

$$\frac{\sin(90° - y_2)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\sigma}{\sin(x_2 - x_1)}$$

따라서

$$\sin\alpha = \frac{\sin(x - x_1)\cos y}{\sin\frac{m}{m+n}\sigma} = \frac{\sin(x_2 - x_1)\cos y_2}{\sin\sigma}$$

$$\therefore \quad \cos y = \frac{\sin(x_2 - x_1)\sin\frac{m}{m+n}\sigma\cos y_2}{\sin(x - x_1)\sin\sigma}$$

또 三角形 NPR에서

$$\frac{\sin(90° - y_1)}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{m}{m+n}\sigma}{\sin(x - x_1)}$$

三角形 NRQ에서

$$\frac{\sin(90° - y_2)}{\sin(180° - \beta)} = \frac{\sin\frac{n}{m+n}\sigma}{\sin(x_2 - x)}$$

따라서

$$\sin\beta = \frac{\sin(x - x_1)\cos y_1}{\sin\frac{m}{m+n}\sigma} = \frac{\sin(x_2 - x)\cos y_2}{\sin\frac{n}{m+n}\sigma}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(x - x_1)}{\sin(x_2 - x)} = \frac{\sin\frac{m}{m+n}\sigma\cos y_2}{\sin\frac{n}{m+n}\sigma\cos y_1}$$

지금

$$\frac{\sin\frac{m}{m+n}\sigma\cos y_2}{\sin\frac{n}{m+n}\sigma\cos y_1}=H_1$$

이라 놓으면

$$\sin(x-x_1)=H_1\sin(x_2-x)$$

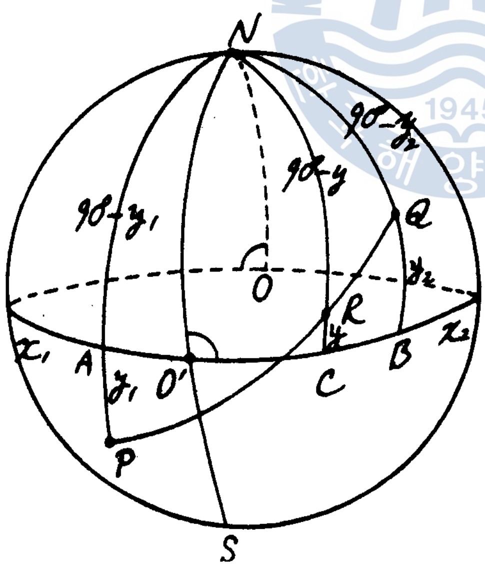
$$\sin x\cos x_1-\cos x\sin x_1=H_1(\sin x_2\cos x-\cos x_2\sin x)$$

$$\therefore\quad \tan x=\frac{\sin x_1+H_1\sin x_2}{\cos x_1+H_1\cos x_2}$$

即 內分点 P의 座標는

$$\left\{\begin{aligned}\tan x&=\frac{\sin x_1+H_1\sin x_2}{\cos x_1+H_1\cos x_2},\\ \cos y&=\frac{\sin(x_2-x_1)\sin\frac{m}{m+n}\sigma\cos y_2}{\sin(x-x_1)\sin\sigma},\\ H_1&=\frac{\sin\frac{m}{m+n}\sigma\cos y_2}{\sin\frac{n}{m+n}\sigma\cos y_1}\end{aligned}\right.\quad\cdots\cdots⑧$$

가 된다.



第 6 圖

裏点의 附近에서도 위의 關係는 不變이다. 即 第 6圖의 경우는

$$AC=\angle ANC=(180°-x_1)+(180°+x)$$
$$=360°+(x_2-x_1)$$
$$CB=\angle RNQ=x_2-x$$
$$AB=\angle PNQ=(180°-x_1)+(180°+x_2)$$
$$=360°+(x_2-x_1)$$

이 되고 公式의 誘導에는 아무 變함이 없다.

$P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$의 中点의 座標(x,y)는 ⑧에서

$$\left\{\begin{aligned}\tan x&=\frac{\sin x_1\cos y_1+\sin x_2\cos y_2}{\cos x_1\cos y_1+\cos x_2\cos y_2}\\ \cos y&=\frac{\sin(x_2-x_1)\sin\frac{\sigma}{2}\cos y_2}{\sin(x-x_1)\sin\sigma}\\ H_1&=\frac{\cos y_2}{\cos y_1}\end{aligned}\right.\quad\cdots\cdots⑨$$

가 된다. 그리고 第5, 6圖에서 $AB<180°$되어야 하는 것은 말할 必要도 없다.

PQ를 $m:n$로 外分하는 点 $R(x,y)$에 있어서는 $m>n$일 때

$$PR=\frac{m}{m-n}\sigma,\quad RQ=\frac{n}{m-n}\sigma$$

이 되고 또 $m<n$이면

$$PR=\frac{m}{n-m}\sigma,\quad RQ=\frac{n}{n-m}\sigma$$

가 되나 內分의 경우와 똑 같은 過程을 거쳐서

$$\tan x=\frac{\sin x_1-H_2\sin x_2}{\cos x_1-H_2\cos x_2}$$

$$\cos y=\frac{\sin(x_2-x_1)\sin\frac{m}{m-n}\sigma\cos y_2}{\sin(x-x_1)\sin\sigma} \quad\cdots\cdots\cdots ⑩$$

$$H_2=\frac{\sin\frac{m}{m-n}\sigma\ \cos y_2}{\sin\frac{n}{m-n}\sigma\ \cos y_1}$$

가 成立한다.

外分의 경우에 $m:n$의 比는 任意로 주어질 수는 없고 制限을 받게 된다. 即

$m>n$ 이면 $-180°<x-x_1<180°$라야 하고

$m<n$ 이면 $-180°<x_2-x<180°$가 되어야 한다.

또 裏点의 附近에서는

$m>n$ 이면 $-180°<360°+x-x_1<180°$

$m<n$ 이면 $-180°<360°+x_2-x<180°$가 되어야 한다. 그러나 $m:n$의 값에 直接 制限을 주지는 못했다. 다음 機會에 미루는 바이다.

5. 球面上의 圓 또는 大圓의 方程式

5—1. 原点을 極으로 하고 球面半徑이 r (<180°)인 圓 또는 大圓

$$\cos x\ \cos y=\cos r \quad\cdots\cdots\cdots ⑪$$

또는 이 兩邊을 제곱하여

$$\sin^2 y+\sin^2 x\ \cos^2 y=\sin^2 r \quad\cdots\cdots\cdots ⑫$$

는 圓의 方程式이고 大圓은 $r=90°$이므로 ⑪에서 $\cos x\ \cos y=0$이고 $\cos y\neq 0$이므로 $\cos x=0$에서

$$x=\pm 90° \quad\cdots\cdots\cdots ⑬$$

이것이 大圓의 方程式이다. 또 ⑫에서도 ⑬이 求해진다.

5—2. 点 (a, b)를 極으로 하고 球面半徑이 r (<180°)인 圓 또는 大圓

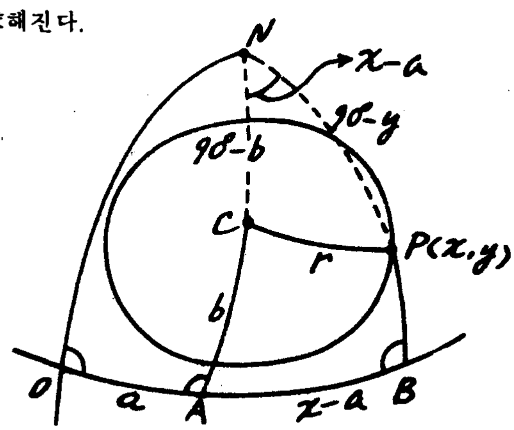
三角形 NCP (第7圖)에서

$$\cos r=\cos(90°-b)\cos(90°-y)+\sin(90°-b)\sin(90°-y)\cos(x-a)$$

$$\therefore\ \sin b\ \sin y+\cos b\ \cos y\ \cos(x-a)=\cos r \quad\cdots\cdots\cdots ⑭$$

이것이 求하는 小圓의 方程式이다. $r=90°$이면 大圓의 方程式이 되고 그것은

$$\sin b\ \sin y+\cos b\ \cos y\ \cos(x-a)=0$$



第7圖

이고 이것을 簡單히 하여

$$\tan y + \cot b \cos(x-a) = 0 \qquad \cdots\cdots ⑮$$

이 된다. ⑮도 中心 (a, b)가 어디에 位置할 때라도 成立한다.

5—3. 子午線의 方程式

이것은 明白히

$$x = x_1, \quad -180° \leqq x_1 \leqq 180° \qquad \cdots\cdots ⑯$$

이다. 이것은 또 圓의 方程式 ⑮에

$$a = -(90° - x_1), \quad b = 0$$

을 代入하여 얻을 수 있다.

5—4. 距等圈(等緯度圈)의 方程式

北極을 極으로 하고 $90° - y_1$을 球面半徑으로 하는 圓은 距等圈이 되므로 이 距等圈의 方程式은

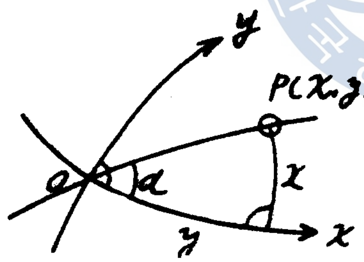
$$y = y_1, \qquad -90° \leqq y_1 \leqq 90° \qquad \cdots\cdots ⑰$$

가 된다. 이 式은 圓의 方程式 ⑭에서 $(0° \leqq a \leqq 180°)$

$$r = 90° - y_1, \quad b = 90°, \quad a \text{ 는 任意}$$

로 놓아서 얻을 수 있다.

5—5. 原點을 지나고 x軸과 $a°$ $(0° \leqq a° \leqq 180°)$로써 相交하는 大圓의 方程式



第 8 圖

$$\sin x = \cot a \tan y$$

에서

$$\tan y = \tan a \sin x \qquad \cdots\cdots ⑱$$

이다.

⑱에서 $a = 0°$이면 $y = 0$ (x軸), $a = 90°$이면 $x = 0$ (y軸), $a = 180°$이면 $y = 0$ (x軸), $a = 270°$이면 $x = 0$ (y軸), $a = 360°$이면 $y = 0$ (x軸)을 얻는다.

또 大圓의 方程式 ⑮에

$$a = 90°, \quad b = a - 90°$$

를 代入하면 ⑱을 얻는다. 이 a, b의 값은 三角形 OAC (第9圖)에서

$$\frac{\sin 90°}{\sin 90°} = \frac{\sin(-b)}{\sin(90° - a)}$$

가 成立하고 여기서

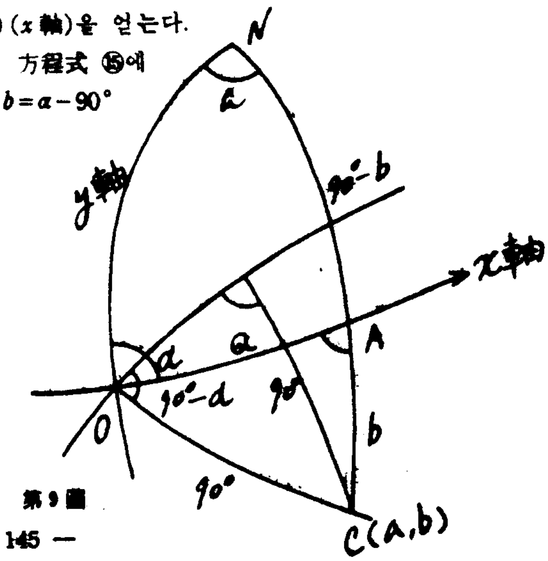
$$b = a - 90°$$

가 되고 또 三角形 NOC에서

$$\frac{\sin 90°}{\sin a} = \frac{\sin(90° - b)}{\sin(180° - a)}$$

가 成立하고 여기서

$$a = 90°$$



第 9 圖

가 誘導된다.

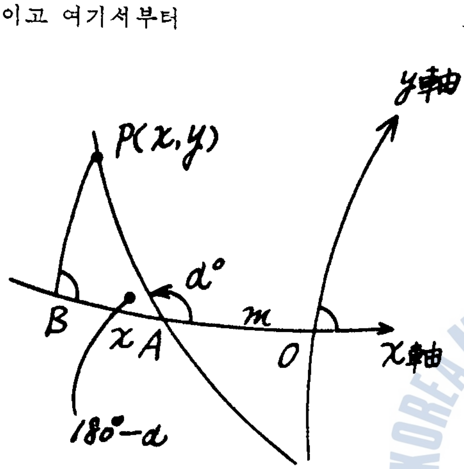
또 ⑱에서 $x=\pm180°$이면 $y=0$이 되고 이 大圓은 $(\pm180°, 0)$을 通過하는 것을 알 수 있다. 이것은 方程式의 正當性의 한 檢證이다.

5—6. x 軸上의 截片이 $m(-90°<m<90°)$이고 x 軸과 $\alpha°$ $(0°\leq\alpha°\leq180°)$로써 相交하는 大圓.

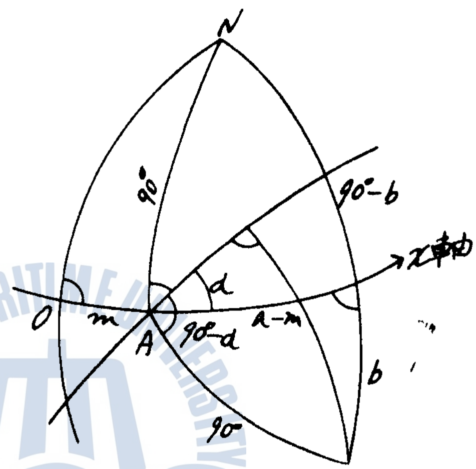
三角形 PAB (第10圖)에서

$$\sin(m-x)=\cot(180°-\alpha)\tan y$$

이고 여기서부터



第10圖



第11圖

$$\tan y=\tan\alpha\ \sin(x-m) \quad \cdots\cdots ⑲$$

가 誘導된다. 이것이 求하는 大圓의 方程式이다.

第11圖의 三角形 CAD에서

$$\frac{\sin 90°}{\sin 90°}=\frac{\sin(-b)}{\sin(90°-\alpha)}$$

가 成立하고 여기로부터

$$b=\alpha-90°$$

또 三角形 NAC에서

$$\frac{\sin 90°}{\sin(a-m)}=\frac{\sin(90°-b)}{\sin(180°-\alpha)}$$

가 成立하고 여기서

$$a=m+90°$$

가 誘導된다.

따라서

$$a=m+90°,\ b=\alpha-90°$$

를 大圓의 方程式 ⑮에 代入하면 ⑲가 誘導된다. ⑲에서 또 $x=\pm180°$이면 $\tan y=\tan\alpha\sin m$ 되는 点 y를 通過한다. 또 $x=m\pm180°$이면 $y=0$이 되고 따라서 ⑲의 大圓은 $(m\pm180°, 0)$을 지난다.

5—7. y 軸上의 截片이 $n(-90°<n<90°)$이고 x 軸과 $\alpha°(0°\leq\alpha°\leq180°)$로써 相交하는 大圓

이 大圓이 x軸과 A에서 相交한다 하고 A의 座標를$(p, 0)$이라고 하면 x軸上의 截片이 p이고 x軸과의 交角이 $\alpha°$인 大圓의 方程式은 ⑲에서

$$\tan y = \tan\alpha \ \sin(x-p) \qquad \cdots\cdots ⓐ$$

이고 이 大圓은 $x=0$이면 $y=n$이므로

$$\tan n = \tan\alpha \ \sin(-p)$$

卽

$$\sin p = -\cot\alpha \ \tan n \qquad \cdots\cdots ⓑ$$

이 成立한다. 따라서

$$\cos p = \sqrt{1-\sin^2 p} = \sqrt{1-\cot^2\alpha\tan^2 n} \qquad \cdots\cdots ⓒ$$

가 된다.

ⓐ에 ⓑ, ⓒ를 代入하여 ⓐ를 展開하여

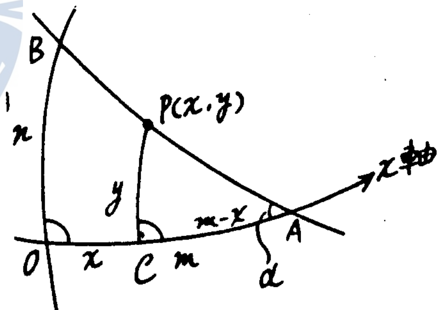
$$\tan y = \tan\alpha \ \sin(x-p)$$
$$= \tan\alpha\{\sin x \ \cos p - \cos x \ \sin p\}$$
$$\tan y = \tan\alpha\{\sin x \ \sqrt{1-\cot^2\alpha \ \tan^2 n} + \cos x \ \cot\alpha \ \tan n\} \qquad \cdots\cdots ⑳$$

이것이 求하는 大圓의 方程式이다.

$x=\pm180°$이면 $y=-n$가 되고 이 大圓은 $(\pm180°, -n)$를 지나는 것을 알 수 있다.

위에서 x軸上의 截片 p의 cosine 卽 cos p를 正이되게 取했으나 그것은 x軸上의 截片은 언제던지 그 絶對値가 90°보다 작게 되는 족을 截片으로 取하므로써 그 cosine의 값을 正이 되게 할 수 있는 것이다.

5—8. x軸上, y軸上의 截片이 各各 m, n인 大圓



第12圖

第12圖의 三角形 ACP에서

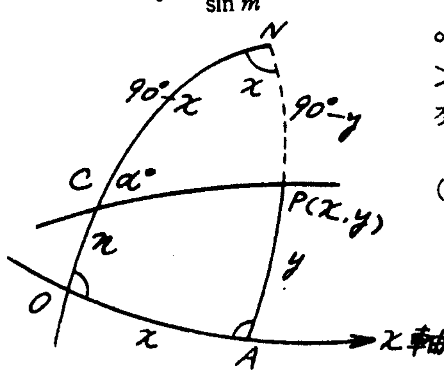
$$\sin(m-x) = \cot\alpha \ \tan y$$

三角形 AOB에서

$$\sin m = \cot\alpha \ \tan n$$

$$\therefore \ \frac{\sin(m-x)}{\sin m} = \frac{\tan y}{\tan n}$$

$$\therefore \ \tan y = \frac{\tan n}{\sin m}\sin(m-x) \qquad \cdots\cdots ㉑$$



第13圖

이것은 求하는 大圓의 方程式이다. 위에서는 $m<0$, $n>0$으로 取했으나 m, n의 正, 負에 關係없이 成立하는 것은 勿論이다.

또 $x=180°$, $-180°$일때 y의 값은 同一하고 또 点 $(\pm180°, -n)$을 지나는 것도 쉽게 알 수 있다.

5—9. y軸上의 截片이 $n\,(-90°<n<90°)$이고 y軸과 $\alpha°$로써 相交하는 大圓

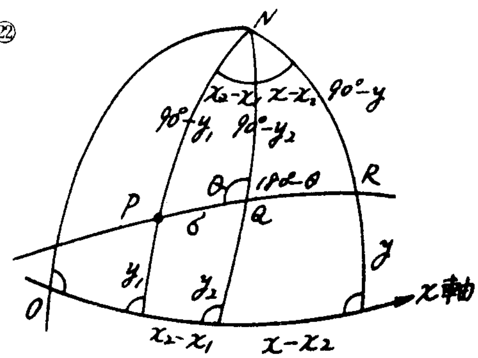
第13圖의 三角形 NCP에서 四隣要素의 公式을 適用하면

$$\cos(90°-n)\cos x=\cot(90°-y)\sin(90°-n)-\cot\alpha\ \sin x$$

$$\therefore\ \sin n\cos x=\tan y\cos n-\cot\alpha\sin x$$

$$\therefore\ \tan y=\tan n\cos x+\frac{\cot\alpha}{\cos n}\sin x\cdots\cdots\cdots ㉒$$

이것이 求하는 大圓의 方程式이다. ㉒에서 이 大圓은 $(\pm180°, -n)$을 通過하는 것을 알 수 있다. 또 $n<0$ 일때도 ㉒의 關係가 成立하는 것은 勿論이다.



第14圖

5—10. 二点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 지나는 大圓

$PQ=\sigma$ 라고 할때 x_2-x_1 의 絕對値는 180°보다 작고 따라서 $\sigma<180°$되는 것은 勿論이다.

第14圖의 三角形 NPQ에서 四隣要素의 公式을 適用하면

$$\cos(90°-y_2)\cos(x_2-x_1)=\cot(90°-y_1)\sin(90°-y_2)-\cot\theta\sin(x_2-x_1)$$

$$\therefore\ \sin y_2\ \cos(x_2-x_1)=\tan y_1\ \cos y_2-\cot\theta\sin(x_2-x_1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⓐ$$

또 NQR에서도

$$\cos(90°-y_2)\cos(x-x_2)=\cot(90°-y)\sin(90°-y_2)-\cot(180°-\theta)\sin(x-x_2)$$

$$\therefore\ \sin y_2\ \cos(x-x_2)=\tan y\ \cos y_2+\cot\theta\ \sin(x-x_2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⓑ$$

ⓑ에서

$$\cot\theta=\frac{\sin y_2\ \cos(x-x_2)-\tan y\cos y_2}{\sin(x-x_2)}$$

이것을 ⓐ에 代入하여

$$\sin y_2\cos(x_2-x_1)=\tan y_1\cos y_2-\frac{\sin y_2\cos(x-x_1)-\tan y\cos y_2}{\sin(x-x_2)}\sin(x_2-x_1)$$

이것을 簡單히 하여

$$\tan y=\tan y_2\cos(x-x_2)+\left\{\frac{\tan y_2\cos(x_2-x_1)}{\sin(x_2-x_1)}\right\}\sin(x-x_2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉓$$

이것이 球하는 大圓의 方程式이다.

大圓㉓은 点$(x_2\pm180°, -y_2)$, $(x_1\pm180°, -y_1)$을 지나는 것을 쉽게 알 수 있다.

또 ㉓에서 二点이 $(m, 0)$, $(0, n)$이면 x, y軸上의 截片이 m, n인 大圓 ㉑을 求할 수 있다. 또 二点이 만일 (x_1, y_1), (x_1, y_2)이면 ㉓을 變形한 式 即 $\sin(x_2-x_1)$을 兩邊에 곱한式에서 子午線의 方程式 $x=x_1$을 얻을 수 있다.

5—11. 点 $P(x_1, y_1)$을 지나고 y軸上의 截片이 n인 大圓

二点(x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 大圓의 方程式 ㉓에서 $x_2=0$, $y_2=n$를 代入하면

$$\tan y=\tan n\cos x+\left\{\frac{\tan n\cos(-x_1)-\tan y_1}{\sin(-x_1)}\right\}\sin x$$

$$\therefore\ \tan y=\tan n\cos x-\frac{\tan n\cos x_1-\tan y_1}{\sin x_1}\sin x\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉔$$

이것은 求하는 大圓의 方程式이고 点$(\pm180°, -n)$를 지나는 것을 쉽게 알수 있다.

5—12. 点 $P(x_1, y_1)$을 지나고 x 軸과 $\alpha°(0°<\alpha°<180°)$로써 相交하는 大圓

x 軸上의 截片이 m 이고 x 軸과의 交角이 $\alpha°$인 大圓의 方程式은 ⑲에서

$$\tan y = \tan\alpha \sin(x-m)$$

이 大圓은 点(x_1, y_1)을 지나므로

$$\tan y_1 = \tan\alpha \sin(x_1-m)$$

따라서

$$\tan y = \tan\alpha \sin(x-m) \quad \cdots\cdots ㉕$$

$$\text{단 } \tan y_1 = \tan\alpha \sin(x_1-m)$$

이것은 求하는 大圓의 方程式이 된다.

이 大圓은 点$(x_1 \pm 180°, -y_1)$을 지난다.

5—13. 原点을 極으로 하는 圓周上의 点 $A(x_1, y_1)$을 지나서 이 圓에 接하는 大圓

이 大圓上에 任意点 $P(x, y)$를 取하고 또 原点 O와 A, P의 球面距離를 r, R라 하고 또 $AP=\sigma$이면

$$\cos x_1 \cos y_1 = \cos r \cdots\cdots ⓐ$$

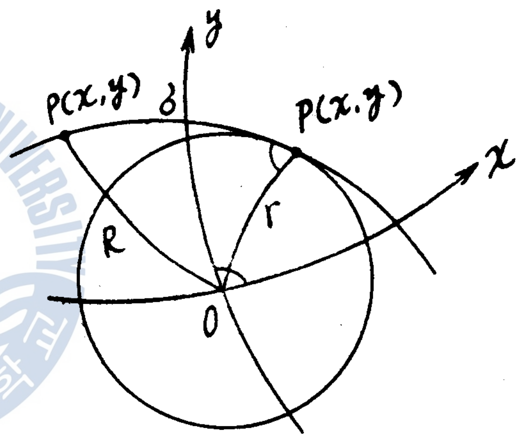
$$\cos x \cos y = \cos R \cdots\cdots ⓑ$$

$$\cos\sigma \cos r = \cos R \cdots\cdots ⓒ$$

$$\cos\sigma = \sin y_1 \sin y + \cos y_1 \cos y_1 \cos y \cos(x-x_1) \cdots ⓓ$$

이 成立한다. ⓐ, ⓑ, ⓓ를 ⓒ에 代入하면

$$\cos x \cos y = \cos x_1 \cos y_1 \{\sin y_1 \sin y + \cos y_1 \cos y \cos(x-x_1)\}$$



第15圖

이것을 簡單히 하면

$$\tan y = \frac{1}{\sin y_1 \cos x_1 \cos y_1}\cos x - \cot y_1 \cos(x-x_1) \quad \cdots\cdots ㉖$$

이 된다. 이것은 求하는 大圓의 方程式이다. ㉖의 大圓은 点$(x_1 \pm 180°, -y_1)$을 지난다.

5—14. 点 $C(a, b)$를 極으로 하는 圓周上의 一点 $A(x_1, y_1)$을 지나고 이 圓에 接하는 大圓

第15圖에서

$$\sin b \sin y_1 + \cos b \cos y_1 \cos(x_1-a) = \cos r \quad \cdots\cdots ⓐ$$

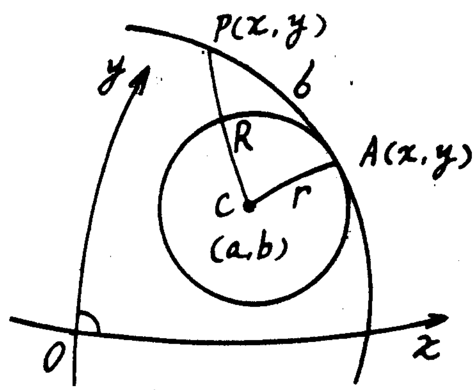
$$\cos\sigma \cos r = \cos R \cdots\cdots ⓑ$$

$$\sin b \sin y + \cos b \cos y \cos(x-a) = \cos R \cdots ⓒ$$

$$\cos\sigma = \sin y_1 \sin y + \cos y_1 \cos y \cos(x-x_1) \quad \cdots\cdots ⓓ$$

ⓐ, ⓒ, ⓓ를 ⓑ에 代入하면

$$\{\sin y_1 \sin y + \cos y_1 \cos y \cos(x-x_1)\}$$
$$\times \{\sin b \sin y_1 + \cos b \cos y_1 \cos(x_1-a)\}$$
$$= \sin b \sin y + \cos b \cos y \cos(x-a)$$



第16圖

이것을 整理하면

$$\tan y=\frac{\cos b}{\sin y_1\{\sin b\sin y_1+\cos b\ \cos y_1\cos(x_1-a)\}-\sin b}\cos(x-a)$$
$$+\frac{\cos y_1\{\sin b\ \sin y_1+\cos b\ \cos y_1\ \cos(x_1-a)\}}{\sin b-\sin y_1\{\sin b\sin y_1+\cos b\cos y_1\cos(x_1-a)\}}\cos(x-x_1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots㉗$$

이것이 求하는 大圓의 方程式이다. 이 方程式에서 $x=180°, -180°$일때 y의 값은 同一하다. 또 ㉗에서 $a=0$, $b=0$이면 ㉖을 얻는다.

6. 球面上의軌跡의方程式

6—1. 二点 $A(-c, 0)$, $B(c, 0)$을 定角(θ)으로 보는 点의 軌跡 단 $2c<180°$, $\theta<180°$

第17圖의 三角形 PAC에서

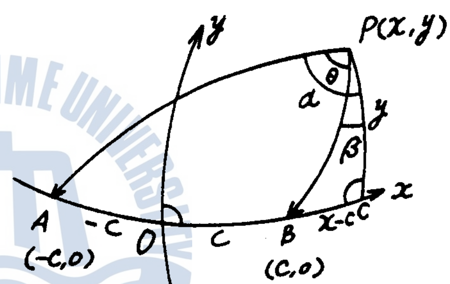
$$\sin y=\cot\alpha\ \tan(x+c)$$

三角形 PCB에서

$$\sin y=\cot\beta\ \tan(x-c)$$

따라서

$$\tan\alpha=\frac{\tan(x-c)}{\sin y},\ \tan\beta=\frac{\tan(x-c)}{\sin y}$$



第17圖

이고 따라서

$$\tan\alpha\ \tan\beta=\frac{\tan(x+c)\tan(x-c)}{\sin^2 y}$$

$$1+\tan\alpha\ \tan\beta=\frac{\sin^2 y+\tan(x+c)\tan(x-c)}{\sin^2 y}$$

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\tan(x+c)-\tan(x-c)}{\sin y}$$

$$\therefore\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y+\tan(x+c)\tan(x-c)}\ \frac{\tan(x+c)-\tan(x-c)}{\sin y}$$

$\alpha-\beta=\theta$이므로

$$\tan\theta=\frac{\sin y\{\tan(x+c)-\tan(x-c)\}}{\sin^2 y+\tan(x+c)\tan(x-c)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots㉘$$

이것이 求하는 軌跡의 方程式이다. 關係式 ㉘은 P가 어느 位置에 있어도 成立한다. θ의 크기에 對해서는 더 究明함이 必要하다.

6—2. 一點 $M(0, a)$와 x軸에 이르는 距離가 같은 點의 軌跡, 단 $-90°<a<90°$

$PM=\sigma$이면 $\cos\sigma=\cos y$인 關係이다. σ는 二点 P, M間의 球面距離이므로

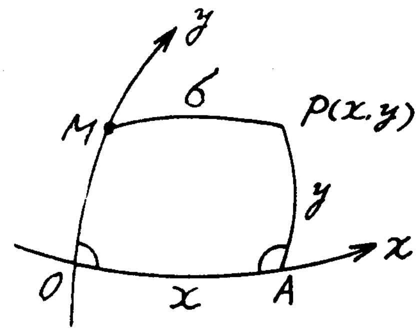
$$\sin a\ \sin y+\cos a\ \cos y\ \cos x=\cos y$$

이것을 變形하여

$$\tan y=\frac{1}{\sin a}-\cot a\ \cos x\ \cdots\cdots\cdots\cdots㉙$$

이것이 求하는 軌跡의 方程式이다. ㉙에서 $x=0$이면 $y=\frac{a}{2}$가 되고 또 $x=180°$이면

$y=90°-\frac{a}{2}$이고 $x=-180°$이면 y는 역시 $90°-\frac{a}{2}$가 된다. 即 $\left(\pm180°, 90°-\frac{a}{2}\right)$를 지난다. 이것은 $\left(\pm180°, -\frac{a}{2}\right)$를 지나지 않으므로 大圓이 되지 않는다.



第18圖

6—3. x 軸, y 軸에 이르는 距離가 같은 點의 軌跡

第19圖의 三角形 NBP에서

$$\sin BP=\sin x\ \sin(90°-y)$$

即

$$\sin BP=\sin x\ \cos y$$

$PB=PA$이므로 $\sin BP=\sin PA$

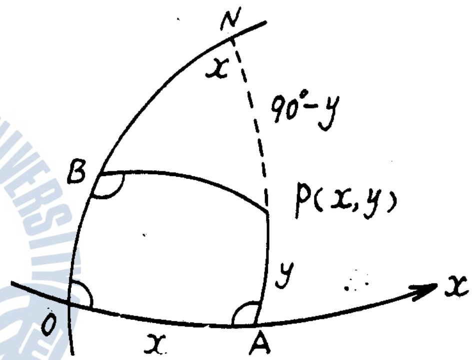
따라서 $\sin x\ \cos y=\sin y$이고

$$\tan y=\sin x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ㉚$$

를 얻는다. ㉚는 $x<0, y<0$일때도 成立한다. 이것은 大圓의 方程式 ⑮ $\tan y+\cot b\ \cos(x-a)=0$에서 $a=90°$, $b=-45°$ 또는 $a=-90°$, $b=45°$를 代入한 것과 같으므로 大圓의 方程式이 된다.

또 $P(x, y)$에서 $x<0, y>0$이거나 $x>0$, $y<0$되는 第20圖의 경우는

$$\tan y=-\sin x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ㉛$$



第19圖

가 誘導된다. 이것도 $a=-90°$, $b=-45°$ 또는 $a=90°$, $b=45°$ 일때의 大圓의 方程式⑮이고 따라서 軌跡은 大圓을 나타낸다.

6—4. 二點 $A(-c, 0)$, $B(c, 0)$에서의 距離의 合이 a되는 點의 軌跡. 단 $2c<180°$

第21圖에서 $AP=p$, $BP=q$라고 놓으면 ⑦에 의해서

$$\cos p=\cos y\ \cos(x+c) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⓐ$$

$$\cos q=\cos y\ \cos(x-c) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⓑ$$

이고 $p+q=a$이므로

$$\sin(p+q)=\sin a$$

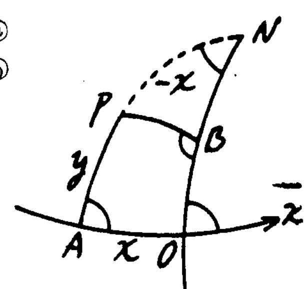
$$\sin p\ \cos q+\cos p\ \sin q=\sin a$$

$$\sin p\ \cos q=\sin a-\cos p\ \sin q$$

兩邊을 제곱하여

$$\sin^2 p\ \cos^2 q=\sin^2 a+\cos^2 p\ \sin^2 q-2\sin a\ \cos p\ \sin q$$

$$2\sin a\ \cos p\ \sin q=\sin^2 a+\cos^2 p\ \sin^2 q-\sin^2 p\ \cos^2 q$$



第20圖

다시 兩邊을 제곱하여 ⓐ, ⓑ와 또

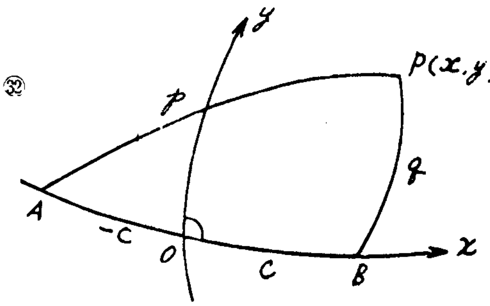
$$\sin^2 p=1-\cos^2 p, \qquad \sin^2 q=1-\cos^2 q$$

를 代入하면

$$4\sin^2 a\cos^2 y\cos^2(x+c)\{1-\cos^2 y\cos^2(x-c)\}$$
$$=\{\sin^2 a+\cos^2 y\cos^2(x+c)-\cos^2 y\cos^2(x-c)\}^2 \cdots ㉜$$

을 얻는다. 단 여기서

1. $a=360°-2c$ 이면 軌跡은 裏点 $O'(\pm180°, 0)$을 지나는 大圓弧 AOB 이고
2. $a=2c$ 이면 軌跡은 原点 $O(0, 0)$를 지나는 大圓弧 AOB가 되고
3. 第22圖에서 $AO<AP_1<AP_2<\cdots<AP_{n-1}<AP_n<AO'$ 이므로 一般的으로는 $2c<a<360°-2c$ 인 關係가 있어야 한다.



第21圖

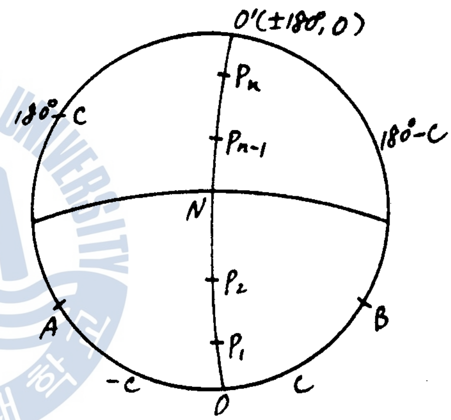
6—5. 二點 $A(-c, 0)$, $B(c, 0)$에서의 距離의 差가 a 인 點의 軌跡 단 $2c<180°$

이때 $a<2c$ 이고 前節과 같이 하여

$$4\sin^2 a\cos^2 y\cos^2(x+c)\{1-\cos^2 y\cos^2(x-c)\}$$
$$=\{\sin^2 a+\cos^2 y\cos^2(x+c)-\cos^2 y\cos^2(x-c)\}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ㉝$$

이 成立한다.

1. $a=0$ 이면 軌跡은 y 軸이고
2. 一般으로는 $0\leqq a<2c$ 인 條件이 必要하다.



第22圖

7. 結 言

以上으로 地球面上에서 成立하는 33個의 公式을 誘導하였다. 이들은 航海學等에 應用될 것 같다. 그러나 아쉬운 것은 여러 條件下의 大圓의 方程式이 若干은 試圖하였다고는 하나 全體的으로 通用되는 하나의 方程式에서 求해내는 것을 찾아내지 못한 点이다. 이것이 다음에 또 考察해야 할 內容이다.

參考文献

並川能正(神戶商船大學); 笠原包道(海軍海技大學校);「球面上の 解析幾何學と その應用」, 日本航海學會誌 第33號, 昭和40年 7月.