球面上의 抛物線, 楕圓 및 双曲線의 考察

金　相　輪

A study of Parabola, Ellipse and Hyperbola on a unit Spherical Surface

Kim Sang-Lyun

目　次

Abstract

The author tried to seek, by means of latitude and longitude, the equations of Spherical Parabola, Ellipse and Spherical Hyperbola and their skeletal forms, appling the definition of Parabola, Ellipse and Hyperbola, the most generel curves on a plane, to those of a unit spherical surface, respectively. In its equation, Spherical Rectangular Coordinates were used, while longitude was expressed as x, latitude as y, i. e. $X=\cos y \cos x$, $Y=\cos y \sin x$, $Z=\sin y$.

1. 緖　　言

本稿는 本人이 1975年 4月에 發表한「球面圖形의 硏究 (續)[1]」의 續篇이다.「球面圖形의 硏究(續)」의 一部에서는 球面上의 大圈의 經緯度方程式이 考察되었는데 論文의 順序로서는 繼續해서 球面抛物線, 球面楕圓, 球面双曲線의 考察이 當然히 뒤따라야 했으나 거기에서 이루지 못했던 것을 本稿에서 補充해 두려는 것이다.

우선 上記 論文과의 連關上, 記號에 對하여 略記한다. 即 單位球面上의 點 P의 經度를 x, 緯

1) 球面圖形의 硏究(續), 韓國海洋大學論文集, 第10輯, 1975年 4月

度를 y라 하여 P點의 經緯度座標를 (x, y)로 하고 또 點 P의 直角座標를 (X, Y, Z)라 하면

$$X=\cos y\cos x \qquad Y=\cos y\sin x \qquad Z=\sin y$$

인 關係가 있다. 또 球面上의 點 $P_m(x_m, y_m)$, $m=0, 1, 2, \cdots\cdots$의 直角座標 (A_m, B_m, C_m)에 있어서도

$$A_m=\cos y_m\cos x_m \qquad B_m=\cos y_m\sin x_m \qquad C_m=\sin y_m$$

되는 關係가 있다. 또 點 $P(x, y)$, $P_m(x_m, y_m)$, $P_n(x_n, y_n)$, $m, n=0, 1, 2, \cdots$사이의 球面距離 PP_m 또는 P_mP_n는

$$\cos PP_m=XA_m+YB_m+ZC_m$$

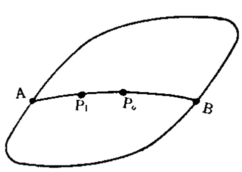
$$\cos P_mP_n=A_mA_n+B_mB_n+C_mC_n$$

로써 表示되고 本稿에서는 이들 公式이 많이 利用된다.

2. 定點에서 定大圈에 그은 垂直大圈弧의 크기

定點을 $P_1(x_1, y_1)$, 定大圈을 $XA_0+XB_0+ZC_0=0$이라고 하면 定大圈의 極은 $P_0(x_0, y_0)$이 된다. P_1, P_0을 이은 大圈은 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$과 直交하고 또 交點은 2개 있다. 이 交點을 A, B라고 하면 P_1A, P_1P_0B는 P_1에서 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$에 이르는 垂直大圈弧가 된다. 또 大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$은 球面을 두 半球面으로 나눈다.

Ⅰ). 大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$에 關해서 이 大圈의 極P_0이 P_1과 같은 半球面上에 놓일 때 (第1圖)



第 1 圖

$$P_1A=P_0A-P_0P_1=\frac{\pi}{2}-P_0P_1$$

$$\therefore\ \sin P_1A=\cos P_0P_1=A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1$$

$$P_1P_0B=P_0P_1+P_0B=P_0P_1+\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \sin P_1P_0B=\cos P_0P_1=A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1$$

따라서 Ⅰ)의 경우 點 $P_1(x_1, y_1)$에서 大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$에 그은 垂直大圈弧의 크기 s는

$$\sin s=A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

이 되고 그 하나가 $0\leqq s_1\leqq\frac{\pi}{2}$이면 他는 $s_2=\pi-s_1$이 된다.

Ⅱ). 大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$에 關해서 이 大圈의 極P_0이 P_1과 다른 半球面上에 있을 때 (第2圖)

$$P_1A=P_0P_1-P_0A=P_0P_1-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \sin P_1A=-\cos P_0P_1=-(A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1)$$

또 大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$의 $P_0(A_0, B_0, C_0)$이 아닌 다른 極을 $P'_0(-A_0', -B_0, -C_0)$라고 하면

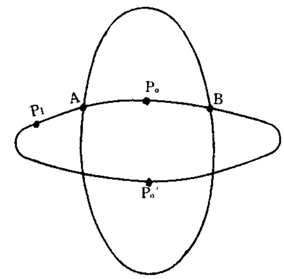
$$P_1P_0'B=AP_1P_0'B-P_1A=\pi-P_1A$$

$$\therefore\ \sin P_1P_0'B=\sin P_1A=-(A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1)$$

또 大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$에 關해서 點 P_1, 極 P_0'는 같은 半球面上에 있으므로 Ⅰ)에 의해서도

$$\sin P_1A=(-A_0)A_1+(-B_0)B_1+(-C_0)C_1$$

이 成立한다. 따라서 Ⅱ)의 경우 點 $P_1(x_1, y_1)$에서 大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$에 그은 垂直 大圈弧의 크기 s는



第 2 圖

$$\sin s=-(A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1)\ \cdots\cdots(2)$$

이고 그 하나가 $0\leqq s_1\leqq\frac{\pi}{2}$이면 他는 $s_2=\pi-s_1$이 된다.

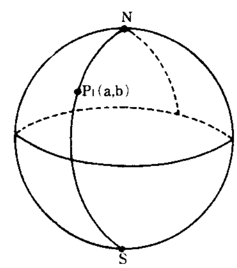
例1. 點 $P_1(a, b)$, $a, b>0$에서 赤道까지 그은 垂直大圈弧의 크기

赤道의 極을 $P_0=N(b, \frac{\pi}{2})$, b는 任意라 하면 P_0과 $P_1(a, b)$에서

$$A_0=\cos\frac{\pi}{2}\cos b=0 \qquad A_1=\cos b\cos a$$

$$B_0=\cos\frac{\pi}{2}\sin b=0 \qquad B_1=\cos b\sin a$$

$$C_0=\sin\frac{\pi}{2}=1 \qquad C_1=\sin b$$



第 3 圖

이들을 (1)式에 代入하면 $\sin s=\sin b$이고 따라서 $s=b$, $\pi-b$이다. 또 赤道의 極을 $P_0'=S(b, -\frac{\pi}{2})$라고 하면

$$A_0=\cos(-\frac{\pi}{2})\cos b=0 \qquad B_0=\cos(-\frac{\pi}{2})\sin b=0 \qquad C_0=\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$$

이므로 (2)式에서 $\sin s=-(-\sin b)=\sin b$ 이고 역시 $s=b$, $\pi-b$를 얻는다.

例2. 赤道와 本初子午線의 大圈까지의 垂直大圈弧의 크기가 같은 點의 軌跡

本初子午線의 極을 $P_0'(\frac{\pi}{2}, 0)$, 赤道의 極을 $P_0=N(b, \frac{\pi}{2})$라 하고 條件에 맞는 點을 $P(x, y)$, P에서 赤道와 本初子午線에 그은 垂直大圈弧를 各各 PA, PNA'; $PB, PP_0'B'$라고 하면 (第4圖)

$$PA=PB,\quad PNA'=PP_0'B' \left(\begin{array}{l}\text{두째式은 첫式이 成立}\\ \text{하면 當然히 成立한다}\end{array}\right)$$

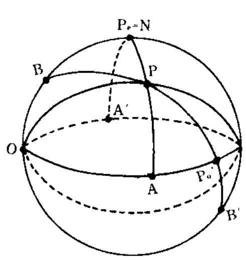
이므로 $\sin PA=\sin PB$에서

$$XA_0+YB_0+ZC_0=XA_0'+YB_0'+ZC_0'\ \cdots\cdots\ (3)$$

가 成立한다. (經度, 緯度가 負가 되는 곳에서도 (3)은 成立한다)

(3)은 求하는 軌跡의 하나이고 이것은 또

$$X(A_0-A_0')+Y(B_0-B_0')+Z(C_0-C_0')=0\ \cdots\cdots(3')$$



第 4 圖

과 같다. 여기서 P_0의 直角座標가 $(A_0, B_0\ C_0)$이고 P_0'의 直角座標가 $(A_0', B_0, 'C_0')$되는 것은 勿論이거니와 또 $A_0^2+B_0^2+C_0^2=1$, $A_0'^2+B_0^2+C_0'^2=1$, $A_0A_0'+B_0B_0'+C_0C_0'=0$이 되므로 (3')를 變形하여

$$X\frac{A_0-A_0'}{\sqrt{2}}+Y\frac{B_0-B_0'}{\sqrt{2}}+Z\frac{C_0-C_0'}{\sqrt{2}}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3'')$$

으로 하면 $\left(\frac{A-A_0'}{\sqrt{2}}, \frac{B-B_0'}{\sqrt{2}}, \frac{C_0-C_0'}{\sqrt{2}}\right)$는 球面上의 點이고 따라서 위의 式(3''), 따라서 (3'), (3)은 이 點을 極으로 하는 大圈이 된다. 即 軌跡은 大圈 (3'')이다.

또 하나의 軌跡이 있고 그것은 第5圖에서 보는 바와 같이 本初子午線의 大圈의 極을 P_0''라고 했는데 P_0''는 球中心에 관한 P_0'의 對稱點이고 그 直角座標는 $(-A_0', -B_0', -C_0')$이다.

$\sin PA=\sin PB$에서

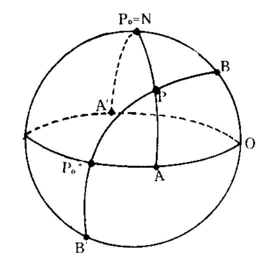
$$XA_0+YB_0+ZC_0=-(XA_0'+YB_0'+ZC_0') \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

이 成立하고 이것은 또 하나의 軌跡이며 역시 大圈을 나타낸다. 따라서 本例의 軌跡의 方程式은 두개의 大圈의 方程式

$$XA_0+YB_0+ZC_0=\pm(XA_0'+YB_0'+ZC_0') \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

또는

$$(XA_0+YB_0+ZC_0)^2=(XA_0'+YB_0'+ZC_0')^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$



第 5 圖

이다.　　$P_0=N(b, \frac{\pi}{2})$, $P_0'=(\frac{\pi}{2}, 0)$에서

$A_0=0, B_0=0, C_0=1$; $A_0'=\cos0\cos\frac{\pi}{2}=0$, $B_0'=\cos0\sin\frac{\pi}{2}=1$, $C_0'=\sin0=0$이고 이들을 (6)에 代入하면

$$Z^2=Y^2$$

이고 따라서

$$Z=Y \text{ or } Z=-Y$$

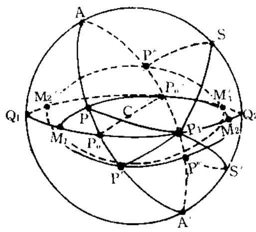
$$\sin y=\cos y\sin x \qquad \text{or} \qquad \sin y=-\cos y\sin x$$

를 얻는다. 이 軌跡의 經緯度方程式은 더 簡單한 形으로 變形되겠으나 이대로 둔다. 또 本例는 球面三角法에 의해서도 簡單히 풀이 된다.

3. 球面抛物線

球面上에서 定點까지의 球面距離와 定大圈에의 垂直大圈弧의 크기가 같은 點의 軌跡을 球面抛物線이라고 말한다. 지금 定點을 $P_1(x_1, y_1)$, 定大圈을 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$이라 하고 條件에 맞는 點을 $P(x, y)$라고 한다.

定大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$의 極$P_0(x_0, y_0)$ (P_0은 定大圈에 관해서 P_1과 같은 半球面上에 있다



第 6 圖

고 한다)을 지나는 하나의 大圈을 그렸을 때 이 大圈은 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$과 直交한다. 그들 交點을 A, A'라고 하자(第6圖). P_0을 지나서 그려진 이 大圈上에서 球面抛物線의 條件을 滿足하는 點은 P, P', P'', P'''의 4개가 있다. 即

$PA=PP_1$, $P'A'=P'P_1$, $P''P_0'A'=P''SP_1$, $P'''P_0'A=P'''S'P_1$ 이다. 단 P_0'는 球中心 C에 관한 P_0의 對稱點이고 定大圈의 다른 極이된다. 또 定大圈과 P_0, P_1을 지나는 大圈의 交點을 Q_1, Q_2라고 한다. 求하는 軌跡은 두개의 曲線이고 그 하나는 P_0Q_1의 中點 M_1, P_1Q_2의 中點M_2와 P, P'를 지나는 閉曲線이고, 다른 하나는 $Q_1P_0'Q_2P_1$의 中點 M_1', $Q_2P_0'Q_1P_1$의 中點 M_2'와 $P,''P'''$를 지나는 閉曲線이다.

定大圈 $XA_0+YB_0+ZC_0=0$에 관해서 條件을 滿足하는 點P가 이 定大圈의 極 P_0과 같은 半球面上에 있얼 때는 $PA=PP_1$, $\sin PA=\sin PP_1$에서

$$XA_0+YB_0+ZC_0=\sin PP_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

이 成立하고 또 定大圈에 관해서 P가 極 P_0과 다른 半球面上에 있을 때는 ($P,'P''$의 경우) $\sin PA=\sin PP_1$에서

$$-(XA_0+YB_0+ZC_0)=\sin PP_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{b})$$

이 成立한다. $(a), (b)$에서

$$XA_0+YB_0+ZC_0=\pm\sin PP_1$$

$$\therefore\ (XA_0+YB_0+ZC_0)^2=\sin^2 PP_1=1-\cos^2 PP_1=1-(XA_1+YB_1+ZC_1)^2$$

$$\therefore\ (XA_0+YB_0+ZC_0)^2+(XA_1+YB_1+ZC_1)^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

(7)式은 求하는 球面抛物線의 方程式이고 이것은 (a), (b)로서 表示된 두 개의 閉曲線을 나타낸다. 勿論 (7)은 (a), 또는 (b)를 제곱해서도 얻어지나 그렇게 해서는 眞意의 파악이 어려울 것이다.

또 第6圖에서

$$P_0A=P_0P+PA=P_0P+P_1A \qquad \therefore\ P_0P+P_1A=\frac{\pi}{2}$$

$$P_0A'=P_0P'+P'A'=P_0P'+P_1P' \qquad \therefore P_0P'+P_1P'=\frac{\pi}{2}$$

即 抛物線上의 點 P(또는 P')는 P_0, P_1에서의 距離의 合의$\frac{\pi}{2}$되는 球面楕圓上의 點이 된다.

($P_0P_1<\frac{\pi}{2}$됨은 當然하다) 또

$$P_0AP''+P_1SP''=P_0AP''+P''P_0'A'=\frac{3}{2}\pi$$

$$P_0A_1P'''+P_1S'P'''=P_0\ A_1P'''+P_1P_0'A=\frac{3}{2}\pi$$

即 또 하나의 球面抛物線은 二點 P_0, P_1에서의 距離의 合이$\frac{3}{2}\pi$ 되는 球面楕圓이 된다. 다음에

또

$$P_0{}'AP=\frac{\pi}{2}+PA=\frac{\pi}{2}+P_1P \qquad \therefore\ P_0{}'AP-PP_1=\frac{\pi}{2}$$

$$P_0{}'A'P'=\frac{\pi}{2}+P'A'=\frac{\pi}{2}+P'P \qquad \therefore P_0{}'A'P'-PP'=\frac{\pi}{2}$$

$$P_0A'P''=\frac{\pi}{2}+P''A'=\frac{\pi}{2}+P''SP_1 \qquad \therefore\ P_0A'P''-P''SP_1=\frac{\pi}{2}$$

$$P_0AP'''=\frac{\pi}{2}+P'''A=\frac{\pi}{2}+P'''S'P_1 \qquad \therefore\ P_0AP'''-P'''S'P_1=\frac{\pi}{2}$$

되는 關係가 있으므로 球面抛物線上의 點 P(또는 P')는 $P_0{}'$와 P_1에서

$$P_0{}'P-P_1P=\frac{\pi}{2}$$

되는 點의 軌跡이 되고, 다른 하나의 球面抛物線上의 點P (P'' 또는 P''')는 P_0, P_1에서

$$P_0P-P_1P=\frac{\pi}{2}$$

되는 點의 軌跡이 된다. 이들 軌跡은 球面双曲線이 된다.

따라서 球面抛物線은 球面楕圓, 球面双曲線이 된다.

例1. 點 $P_1(a,0)$까지의 球面距離와 赤道에의 垂直大圈弧의 크기가 같은 點의 軌跡

赤道의 極을 $P_0=N(b,\frac{\pi}{2})$라 하면

$$A_0=0,\quad B_0=0,\quad C_0=1$$

또 $P_1(a,0)$에서

$$A_1=\cos 0\ \cos a=\cos a,\qquad B_1=\cos 0\ \sin a=\sin a,\qquad C_1=\sin 0=0$$

이들을 (7)式에 代入하면

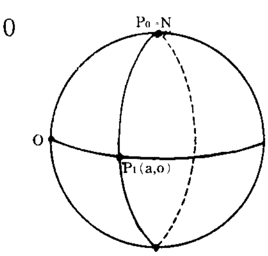
$$Z^2+(X\cos a+Y\sin a)^2=1$$

$$(X\cos a+Y\sin a)^2=1-\sin^2 y=\cos^2 y$$

$$\cos^2 y\{(\cos x\cos a+\sin x\sin a)^2-1\}=0$$

$$y=\frac{\pi}{2}\ \text{ or }\ (\cos x\cos a+\sin x\sin a)^2=1$$

$$\therefore\ y=\frac{\pi}{2},\ x=a\ \text{ or }\ x=a\pm\pi$$



第 7 圖

本例의 解는 위의 計算을 거칠 것 없이 第7圖에서 幾何的으로 明白하다.

例2. 點 $P_1(a,0)$까지의 球面距離와 本初子午線의 大圈에 이르는 垂直大圈弧의 크기가 같은 點의 軌跡

本初子午線의 大圈의 極 $P_0=(\frac{\pi}{2},0)$과 $P_1(a,0)$에서

$$A_0=\cos 0\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad B_0=\cos 0\sin\frac{\pi}{2}=1,\ C_0=\sin 0=0$$

$$A_1=\cos 0\cos a=\cos a,\quad B_1=\cos 0\sin a=\sin a,\quad C_1=\sin 0=0$$

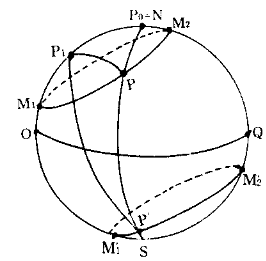
이들을 (7)式에 代入하면

$$Y^2+(X\cos a+Y\sin a)^2=1$$

$$\therefore\ \cos^2 y\sin^2 x+(\cos y\cos x+\cos y\sin x\sin a)^2=1$$

이것이 求하는 球面拋物線의 方程式이고 그 概形은 本文의 說明에서 明白하다.

例3.[1)] 點 $P_1(0,a)$까지의 球面距離와 赤道에 이르는 垂直大圈弧의 크기가 같은 點의 軌跡



第 8 圖

赤道의 極 $P_0=N(b,\frac{\pi}{2})$와 $P_1(0,a)$에서

$$A_0=0,\ B_0=0,\ C_0=1$$

$$A_1=\cos a\cos 0=\cos a,\quad B_1=\cos a\sin 0=0,\quad C_1=\sin a$$

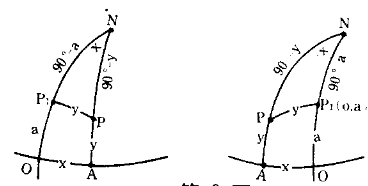
이고. 이들을 (7)式에 代入하면

$$Z^2+(X\cos a+Z\sin a)^2=1$$

$$(\cos y\cos x\cos a+\sin y\sin a)^2=1-Z^2=\cos^2 y$$

$$\therefore\ \cos y=\pm(\cos y\cos x\cos a+\sin y\sin a)$$

이것이 求하는 球面拋物線의 方程式이다. 이 式도 適當히 變形하면 더 簡單한 것이 되겠으나 여기서는 이대로 둔다. 또 이 方程式은 球面三角法에 의해서도 다음과 같이 풀이된다. 即 第9圖에서



第 9 圖

$PA=PP_1=y$이므로 三角形 NPP_1에서

$$\cos y=\cos(90^\circ-y)\cos(90^\circ-a)+\sin(90^\circ-y)\sin(90^\circ-a)\cos(\pm x)$$

$$\therefore\ \cos y=\sin y\sin a+\cos y\cos a\cos x$$

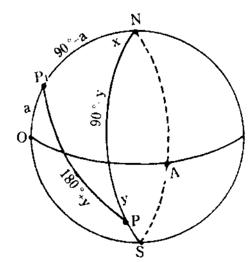
또 第10圖에서 $y<0,\ NP=90^\circ-y,$

$PSA=180^\circ+y$ 이고 또 $PP_1=PSA$이다.

三角形 NP_1P에서

$$\cos(180^\circ+y)=\cos(90^\circ-a)\cos(90^\circ-y)+\sin(90^\circ-a)\sin(90^\circ-y)\cos x$$

$$\therefore\ \cos y=-(\cos y\cos x\cos a+\sin y\sin a)$$



第 10 圖

4. 球面楕圓

球面上의 두 定點까지의 球面距離의 合이 一定$(2a)$한 點의 軌跡을 球面楕圓이라고 말한다.

---

1). 並川, 笠原兩教授는 本例題를 다루어서 그것이 二點에서의 距離의 合이 $\frac{\pi}{2}$되는 球面楕圓이 되는 것을 지적하고 있다. 球面上の 解析幾何と その應用, 並川能正, 笠原包道, 日本航海學會誌, 第33號 昭和40年7月

두 定點을 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 條件에 맞는 點을 $P(x, y)$라 하고 또 $PP_1=s_1$, $PP_2=s_2$, $P_1P_2=s_{12}<\pi$라 하면 $s_1+s_2=2a$, $2a>s_{12}$이 成立한다.

$$2a=s_1+s_2 \quad \cdots\cdots\cdots (a)$$

$$\cos 2a=\cos(s_1+s_2)=\cos s_1\cos s_2-\sin s_1\sin s_2$$

$$\cos 2a-\cos s_1\cos s_2=-\sin s_1\sin s_2$$

$$(\cos 2a-\cos s_1\cos s_2)^2=(-\sin s_1\sin s_2)^2 \quad \cdots\cdots\cdots (b)$$

$$\cos^2 2a-2\cos 2a\cos s_1\cos s_2+\cos^2 s_1\cos^2 s_2=\sin^2 s_1\sin^2 s_2$$
$$=(1-\cos^2 s_1)(1-\cos^2 s_1)$$

$$\cos^2 s_1+\cos^2 s_2-2\cos 2a\cos s_1\cos s_2=\sin^2 2a \quad \cdots\cdots\cdots (c)$$

단 $2a>s_{12}$

反對로 (c)가 成立하면 (b)가 成立하고 따라서

$$\cos 2a-\cos s_1\cos s_2=\pm\sin s_1\sin s_2$$

$\cos 2a=\cos(s_1-s_2)$ 또는 $\cos 2a=\cos(s_1+s_2)$

그런데 條件 $2a>s_{12}>s_1-s_2$에서 (a)가 成立한다. 단 $2a<\pi$라고 한다.

따라서 (c)에서

$$(XA_1+YB_1+ZC_1)^2+(XA_2+YB_2+ZC_2)^2$$
$$-2\cos 2a(XA_1+YB_1+ZC_1)(XA_2+YB_2+ZC_2)=\sin^2 2a \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

단 $2a>s_{12}$ 則 $\sin a>\sin\frac{1}{2}s_{12}$

이 成立하고 이것은 球面楕圓의 方程式이 된다.

球面楕圓의 槪形은 P_1P_2의 中點을 M라 할때 P_1MP_2 大圈上에서 $MQ_1=MQ_2=a$ 되게 取한 點 Q_1, Q_2를 지나는 閉曲線이 된다. 이때 $P_1Q_1=P_2Q_2=a-\frac{s_{12}}{2}$이다. 또 M을 지나 P_1P_2에 垂直한 大圈이 이 球面楕圓과 만나는 點을 N라 하면

$$MN=\cos^{-1}\frac{\cos a}{\cos\frac{s_{12}}{2}}$$

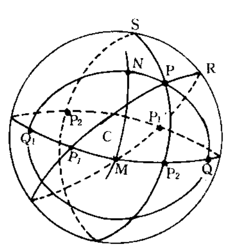
이 되고 MQ_1은 一般으로 MN와 같지않다. 따라서 長軸, 短軸이 생각되고 또 球面楕圓은 平面曲線이 아님을 알 수 있다.

다음에 球中心 C에 관한 P_1, P_2의 對稱點을 P'_1, P_2'라고 하면 (第11圖) 다음 關係가 있다.

$$P_1P+P_2P=s_1+s_2=2a$$

$$P_0'RP+P_2'SP=2\pi-(s_1+s_2)=2\pi-2a$$

($2a>\pi$일때는 이 경우가 利用된다.)



第 11 圖

$$P_1'RP - P_2P = \pi - s_1 - s_2 = \pi - 2a$$
$$P_2'SP - P_1P = \pi - s_2 - s_1 = \pi - 2a$$

따라서 P_1, P_2에서의 距離의 合이 $2a$되는 球面楕圓上의 點은 P_1', P_2'에서의 距離의 合이 $2\pi - 2a$, $P_1'P - P_2P = \pi - 2a > 0$, 또 $P_2'P - P_1P = \pi - 2a$ 되는 球面楕圓 또는 球面双曲線上의 點이 된다. 即 球面楕圓은 球面双曲線이 된다. 또 (8)式에서 $2a = \frac{\pi}{2}$ 이면 球面抛物線 (7)이 된다. 단 이때는

$$(XA_1 + YB_1 + ZC_1)^2 + (XA_2 + YB_2 + ZC_2)^2 = 1$$

이고 $P_1(A_1, B_1, C_1)$을 極으로 하는 大圈과 點$P_2(A_2, B_2, C_2)$에 이르는 距離가 같은 點의 軌跡이 될 것이다.

例. $P_1(-c, 0)$, $P_2(c, 0)$에서의 球面距離의 合이 $2a < \pi$되는 球面楕圓

$$A_1 = \cos 0 \cos(-c) = \cos c,\quad B_1 = \cos 0 \sin(-c) = -\sin c,\quad C_1 = \sin 0 = 0$$
$$A_2 = \cos 0 \cos c = \cos c,\quad B_1 = \cos 0 \sin c = \sin c,\quad C_2 = \sin 0 = 0$$

이들을 (8)式에 代入하여

$$(X\cos c - Y\sin c)^2 + (X\cos c + Y\sin c)^2 - 2\cos 2a(X\cos c - Y\sin c)(X\cos c + Y\sin c) = \sin^2 2a$$
$$(\cos y \cos x \cos c - \cos y \sin x \sin c)^2 + (\cos y \cos x \cos c + \cos y \sin x \sin c)^2 - 2\cos 2a \cos^2 y(\cos^2 x \cos^2 c - \sin^2 x \sin^2 c) = \sin^2 2a$$

여기서 $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$, $\sin^2 2a = 4\sin^2 a - 4\sin^4 a$ 또 cos는 모두 sin으로 고쳐서 簡單히 하면

$$\sin^2 x \sin^2 y(\sin^2 a - \sin^2 c) - \sin^2 x(\sin^2 a - \sin^2 c) - \sin^2 y \sin^2 a(1 - \sin^2 c) + \sin^2 a(\sin^2 a - \sin^2 c) = 0$$

를 얻는다. $\sin^2 a > \sin^2 c$이므로

$$\sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 x - \frac{\sin^2 a \cos^2 c}{\sin^2 a - \sin^2 c} \sin^2 y + \sin^2 a = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

단 $\sin a > \sin c$, $-a \leqq x \leqq a$

를 얻고 이것은 求하는 球面楕圓의 方程式이다. 並川, 笠原兩氏도 本例를 取扱하였는데 〈7page 脚注〉 그 것은

$$\sin^2 x + \frac{\sin^2 a \cos^2}{\sin^2 a - \sin^2 c} \sin^2 y = \sin^2 a$$

이다. 그러나 위式의 x는 本稿에서 말하는 經度가 아니고 $\sin x$대신에 $\sin x \cos y$로 하면 (9)式과 一致한다.

5. 球面双曲線

球面上의 두 定點에서의 球面距離의 差가 一定$(2a)$한 點의 軌跡을 球面双曲線이라고 말한다.

두 定點을 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 條件을 滿足하는 點을 $P(x, y)$라 하고 또 $P_1P=s_1$, $P_2P=s_2$, $P_1P_2=s_{12}$라 하면 $s_{12}<\pi$이며 $s_{12}>2a$라야 한다. 即 $2a<\pi, 2a<s_{12}$이다.

球面楕圓의 경우와 같이하여

$$\begin{aligned}&(XA_1+YB_1+ZC_1)^2+(XA_2+YB_2+ZC_2)^2\\&\quad-2\cos 2a(XA_1+YB_1+ZC_1)(XA_2+YB_2+ZC_2)=\sin^2 2a\\&\qquad \text{단 } 2a<s_{12} \qquad\qquad (10)\end{aligned}$$

이 求해지고 이것은 球面双曲線의 方程式이다.

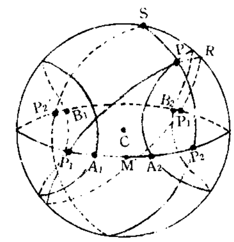
P_1, P_2의 球中心 C에 관한 對稱點을 P_1', P_2'라고 하면(第12圖)

$$P_1P-P_2P=s_1-s_2=2a$$

$$P_1'RP-P_2'SP=(\pi-s_1)-(\pi-s_2)=s_2-s_1=2a$$

$$P_1'RP+P_2P=\pi-s_1+s_2=\pi-(s_1-s_2)=\pi-2a$$

$$P_2'SP+P_1P=\pi-s_2+s_1=\pi-(s_2-s_1)=\pi-2a$$

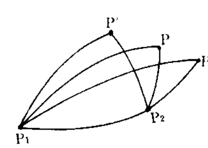


第 12 圖

인 關係가 있다. 따라서 P_1, P_2에서의 球面距離의 差가 $2a$인 點의 軌跡은 P_1', P_2'에서의 球面距離의 差가 $2a$, P_1', P_2에서의 距離의 合이 $\pi-2a$, 또 P_2', P_1에서의 距離의 合이 $2a$되는 點의 軌跡이 되고 球面双曲線은 球面楕圓이 된다.

P_1, P_2를 지나는 大圈上에서 P_1P_2의 中點을 M이라 할때 $MA_1=MA_2=a$되게 A_1, A_2를 取하면 A_1, A_2는 球面双曲線上의 點이고 또 P_1', P_2'에서 $\frac{s_{12}}{2}-a$ 되게 B_2, B_1을 取하면 B_2, B_1도 球面双曲線上의 點이 된다. 따라서 球面双曲線의 概形은 A_1, B_1; A_2, B_2를 지나는 두개의 閉曲線이 된다. 그것은 P_2, P_1'; P_1, P_2'를 焦點으로 하는 두개의 楕圓이라고도 볼 수 있다.

P가 球面双曲線上의 點이고 $P_1P-P_2P=s_1-s_2=2a$가 될 때 第13圖의 P', P''點처름 P_2P', P_1P''가 P_2P 또는 P_1P와 相交하는 點은 双曲線上의 點이 될 수 없다. 그것은 $P_1P'-P_2P', P_1P''-P_2P''$가 $2a$와 같게 될 수 없기 때문이다. 그 反面에 第14圖의 P'''點은 球面双曲線上의 點이 될 수 있는 것이다. 이러한 理由로서 點 B_2에 관해서는

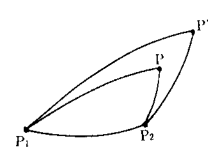


第 13 圖

$$P_1P_2'B_2-P_2P_1'B_2=\pi-\left(\frac{s_{12}}{2}-a\right)-\left\{\pi-s_{12}+\left(\frac{s_{12}}{2}-a\right)\right\}=2a$$

이고 또 點 B_1에 관해서도

$$P_2P_1'B_1-P_1P_2'B_1=2a$$



第14圖

가 되어서 B_1, B_2가 球面双曲線上의 點이 되는 것이 確認된다.

例. 球面上의 두 定點 $P_1(-c, 0), P_2(c, 0)$에서의 球面距離의 差가 $2a$인 球面双曲線의 方程式

球面楕圓의 例題와 같이 하여

$$\sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 x + \frac{\sin^2 a \cos^2 c}{\sin^2 c - \sin^2 a} \sin^2 y + \sin^2 a = 0$$

단 $\sin c > \sin a$

를 얻는다.

6. 結 言

以上으로 平面에서는 매우 大衆的인 曲線인 抛物線, 楕圓, 双曲線의 定義를 球面上에 옮겨와서 이들 曲線의 一般的인 경우의 方程式을 經度, 緯度로써 表示하였고 또 曲線의 概形을 따져 보았다. 方程式의 誘導에 있어서는 X, Y, Z 또는 A_m, B_m, C_m을 利用하는 것이 計算이 簡單하고 또 實際의 適用도 쉬울 것 같다. 또 $A_mA_n + B_mB_n + C_mC_n$의 幾何的인 뜻도 더욱 明白해졌다. 即 그 하나는 $\cos P_mP_n$의 크기였는데 그외에 또 點P_m을 極으로 하는 大圈에 點 P_n에서 그언 垂直大圈弧의 크기의 sin이 되는 것이 明白해졌다.

다음에 또 球面抛物線, 球面楕圓, 球面双曲線이 獨立된 따로 따로의 曲線이 아니고 모두 서로 關連되는 하나의 曲線이 되는 것이 考察되었다.

7. 參考 文献

1. 球面圖形의 研究, 金相輪 韓國海洋大學論文集, 第8輯, 1973年
2. 球面圖形의 研究(續), 金相輪, 韓國海洋大學 論文輯 第10輯, 1975年
3. 球面上の 解析幾何學と その應用, 並川能正, 笠原包道, 日本航海學會誌, 第33號, 昭和40年 7月
4. 航海數學, 並川能正, 昭和39年 4月, 海文堂