구면삼각형에 있어서의 약간의 공식의 초등적 증명과 정현법칙의 유도

金　　相　　輪

Elementary Proof of Some Formulae and Derivation of Sine Law in Spherical Triangle

Kim Sang Lyun

<目　次>

Abstract

In my previous article "A Study of Figures on Spherical Surface" (Journal of Merchant Marine College, 1973), thirteen formulas were derived in the rectangular spherical triangle. In the present work, the thirteen formulas have been proved by the method of spherical trigonometry. Also in a previous article "A Study of Figures on Spherical Surface(continued)" (Journal of Merchant Marine College, 1975), the sine law were not detailed, so the sine law haʌe been also clarified in the present work.

1. 序　　言

本論文은 本人이 前에 쓴 論文「球面圖形의 研究[1]」와「球面圖形의 研究(續)[2]」의 補充이다. 即「球面圖形의 研究」에 있어서는 다른 많은 公式과 함께 直角球面三角形에서 成立하는 13個의 公式이 誘導되었는데 이들의 球面三角法的 證明을 本稿에서 明白히 하였다. 또「球面圖形의 研究(續)」에서는 極三角形의 理論, cosine 法則 等을 導出하면서 sine 法則의 誘導를 빠뜨렸다. 따라서 本稿에서 sine 法則의 導出을 꾀하였다.

---

1) 金相輪, 球面圖形의 研究, 韓國海洋大學 論文集 第8輯, 1973.
2) 金相輪, 球面圖形의 研究(續), 韓國海洋大學 論文集 第10輯, 1975.

2. 直角球面三角形에 있어서의 13個의 公式의 球面三角法的인 證明

이들 13個의 公式은 모두 論文「球面圖形의 硏究」의 page (6)에서 page(13)사이에 나와 있고 거기서는 이들 公式이 벡터에 의해서 求해진 것이다. 따라서 이들을 球面三角法的으로 證明해 보는 것은 意義가 있다고 본다. 단 $C=90°$인 直角形의 경우이다.

① 公式 $\cos A=\dfrac{\cos a \sin b}{\sin c}$의 證明

(證明) $\cos A=\cot c \ \mathrm{tam}\ b$

$$=\frac{\cos c \sin b}{\sin c \cos b}$$

$$=\frac{\cos a \cos b \sin b}{\sin c \cos b} \quad (\cos c=\cos a \cos b\text{를 代入})$$

$$=\frac{\cos a \sin b}{\sin c} \ (\text{證了})$$

② 公式 $\cos B=\dfrac{\cos b \sin a}{\sin c}$의 證明

(證明) 省略

③ 公式 $\cos A \cos B=\dfrac{\cos c \sin a \sin b}{\sin^2 c}$의 證明

(證明) $\cos A=\cot c \ \mathrm{tam}\, b \quad \cos B=\cot c \ \tan a$

$\therefore \cos A \cos B=\cot^2 c \ \mathrm{tam}\, a \ \mathrm{tam}\, b$

$$=\frac{\cos^2 c \sin a \sin b}{\sin^2 c \cos a \cos b}$$

$$=\frac{\cos^2 c \sin a \sin b}{\sin^2 c \cos c} \quad (\cos c=\cos a \cos b\text{를 代入})$$

$$=\frac{\cos c \sin a \sin b}{\sin^2 c} \ (\text{證了})$$

④ 公式 $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{\cos a \sin b}{\cos b \sin a}$의 證明

(證明) $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{\cot c \tan b}{\cot c \tan a}=\dfrac{\tan b}{\tan a}=\dfrac{\sin b \cos a}{\cos b \sin a}$(證了)

⑤ 公式 $\sin^2 b \cos^2 a=\cos^2 a-\cos^2 c$의 證明

(證明) $\cos^2 a-\cos^2 c=\cos^2 a-\cos^2 a \cos^2 b=(1-\cos^2 b)\cos^2 a$ ($\cos c=\cos a \cos b$를 代入)

$=\sin^2 b \cos^2 a$ (證了)

⑥ 公式 $\sin^2 a \cos^2 b=\cos^2 b-\cos^2 c$의 證明

(證明) 省略

⑦ 公式 $\sin^2 b \cos^2 \mathrm{c}=\sin^2 c-\sin^2 a$의 證明

(證明) $\sin^2 c-\sin^2 a=(1-\cos^2 c)-(1-\cos^2 a)$

$=\cos^2 a-\cos^2 c$

$=\sin^2 b \cos^2 a$ (公式 ⑤를 代入)

⑧ 公式 $\sin^2 a \cos^2 b=\sin^2 c-\sin^2 b$의 證明

(證明) 省略

⑨ 公式 $\sin^2 c - \sin^2 a = \cos^2 a \sin^2 b$의 證明

(證明) $\sin^2 c - \sin^2 a = (1-\cos^2 c) - (1-\cos^2 a)$

$= \cos^2 a - \cos^2 c$

$= \cos^2 a - \cos^2 a \cos^2 b$ ($\cos c = \cos a \cos b$를 代入)

$= \cos^2 a (1-\cos^2 b)$

$= \cos^2 a \sin^2 b$ (證了)

⑩ 公式 $\sin^2 c - \sin^2 b = \cos^2 b \sin^2 a$의 證明

(證明) 省略

⑪ 公式 $\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 c = \sin^2 a\ \mathrm{sis}^2 b$

本 公式은 本人著 球面三角法 P. 52에 나와 있으므로 그 證明을 省略한다.

⑫ 公式 $\sin^2 A - \cos^2 B = \mathrm{sos}^2 B \sin^2 a$의 證明

(證明) $\sin^2 A - \cos^2 B = 1 - \cos^2 A - (1-\sin^2 B)$

$= \sin^2 B - \cos^2 A$ ($\cos A = \sin B \cos a$를 代入)

$= \sin^2 B - \sin^2 B \cos^2 a$

$= \sin^2 B \sin^2 a$ (證了)

⑬ 公式 $\sin^2 c - \sin^2 b = \sin^2 A \cos^2 b \sin^2 c$의 證明

(證明) $\sin^2 c - \sin^2 b = \cos^2 b \sin^2 a$ (公式 ⑩를 摘用)

$= \cos^2 b \sin^2 A \sin^2 c$ (證了) ($\sin a = \sin A\ \mathrm{sin} c$를 代入)

3. Sine 法則의 誘導

論文「球面圖形의 硏究(續)」P. 13에서

$$\cos S_{mn} = A_m A_n + B_m B_n + C_m C_n \cdots\cdots (4\text{-}17)$$

이고 또 P. 19에서

$$\sin S_{mn} = \sqrt{(B_m C_n - B_n C_m)^2 + (C_m A_n - C_n A_m)^2 + (A_m B_n - A_n B_m)^2} \cdots (4\text{-}27)$$

이 成立함을 알 수 있다. 여기서 우선 $\sin^2 S_{mn} + \cos^2 S_{mn} = 1$이 成立함을 確認해 두기로 한다. 即

$$\begin{aligned}\sin^2 S_{mn} + \cos^2 S_{mn} &= (B_m C_n - B_n C_m)^2 + (C_m A_n - C_n A_m)^2 + (A_m B_n - A_n B_m)^2 \\ &\quad + (A_m A_n + B_m B_n + C_m C_n)^2 \\ &= B_m^2 C_n^2 + B_n^2 C_m^2 + C_m^2 A_n^2 + C_n^2 A_m^2 + A_m^2 B_n^2 \\ &\quad + A_n^2 B_m^2 + A_m^2 A_n^2 + B_m^2 B_n^2 + C_m^2 C_n^2 \\ &= A_m^2 (A_n^2 + B_n^2 + C_n^2) + B_m^2 (A_n^2 + B_n^2 + C_n^2) \\ &\quad + C_m^2 (A_n^2 + B_n^2 + C_n^2) = A_m^2 + B_m^2 + C_m^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

와 같이 $\sin^2 S_{nm} + \cos^2 S_{mn} = 1$이 되는 것을 알 수 있다.

다음에 sine 法則을 誘導코저 한다.

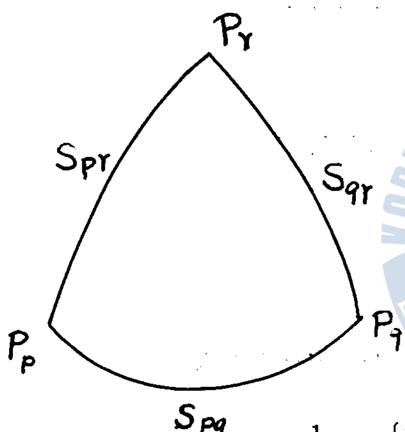
「球面圖形의 研究(續)」의 P. 19에 있는 關係式 $|\overrightarrow{CP}_m\times\overrightarrow{CP}_n|=\sin S_{mn}$

$$\overrightarrow{CP}_{mn}=\frac{\overrightarrow{CP}_m\times\overrightarrow{CP}_n}{\overrightarrow{CP}_m\times\overrightarrow{CP}_n}=\frac{1}{\sin S_{mn}}\{(B_m\ C_n-B_n\ C_m)i$$
$$+(C_m\ A_n-C_n\ A_m)j+(A_m\ B_n-A_n\ B_m)k\}$$

에서

$$\overrightarrow{CP}_{mn}=\frac{\overrightarrow{CP}_m\times\overrightarrow{CP}_n}{\sin S_{mn}}$$

이 誘導되고 이것을 利用하는 것이 sine 法則을 誘導하는데에 便利하다. 球中心이 C인 單位 球面上의 三角形 $P_p\ P_q\ P_r$를 생각한다. 단 기호는 論文「球面圖形의 研究(續)」에 따른 것이고 S_{pq}, S_{pr}, S_{qr}은 各各 三角形의 大圈弧 P_pP_q, P_pP_r, P_qP_r의 길이이고 또 點 P_{pq}, P_{pr}, P_{qr}은 各各 大圈弧 P_pP_q, P_pP_r P_qP_r의 極를 나타낸다. 이때



$$\overrightarrow{CP}_{pq}=\frac{\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_q}{|\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_q|}=\frac{\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_q}{\sin S_{pq}}$$

$$\overrightarrow{CP}_{pr}=\frac{\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_r}{|\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_r|}=\frac{\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_r}{\sin S_{pr}}$$

이 成立하고 따라서

$$\overrightarrow{CP}_{pq}\times\overrightarrow{CP}_{pr}=\frac{1}{\sin S_{pq}\ \sin S_{pr}}\ (\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_q)\times(\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_r)$$
$$=\frac{1}{\sin S_{pq}\ \sin S_{pr}}\left[\left\{\overrightarrow{CP}_p\cdot(\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_r)\right\}\overrightarrow{CP}_q\right.$$
$$\left.-\left\{\overrightarrow{CP}_q\cdot(\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_r)CP_p\right\}\right]$$
$$=\frac{-1}{\sin S_{pq}\ \sin S_{pr}}\left\{\overrightarrow{CP}_q\cdot(\overrightarrow{CP}_p\times\overrightarrow{CP}_r)\right\}\overrightarrow{CP}_p$$

같이하여

$$\overrightarrow{CP}_{qp}=\frac{\overrightarrow{CP}_q\times\overrightarrow{CP}_p}{\sin S_{pq}},\qquad \overrightarrow{CP}_{qr}=\frac{\overrightarrow{CP}_q\times\overrightarrow{CP}_r}{\sin S_{qr}}$$

에서

$$\overrightarrow{CP}_{qp}\times\overrightarrow{CP}_{qr}=\frac{-1}{\sin S_{pq}\ \sin S_{qr}}\left\{\overrightarrow{CP}_p\cdot(\overrightarrow{CP}_q\times\overrightarrow{CP}_r)\right\}\overrightarrow{CP}_q$$

또

$$\overrightarrow{CP}_{rq}=\frac{\overrightarrow{CP}_r\times\overrightarrow{CP}_q}{\sin S_{rq}},\quad \overrightarrow{CP}_{rp}=\frac{\overrightarrow{CP}_r\times\overrightarrow{CP}_p}{\sin S_{rp}}$$

에서

$$\overrightarrow{CP}_{rq}\times\overrightarrow{CP}_{rp}=\frac{-1}{\sin S_{qr}\ \sin S_{pr}}\left\{\overrightarrow{CP}_p\cdot(\overrightarrow{CP}_q\times\overrightarrow{CP}_r)\right\}\overrightarrow{CP}_r$$

이 成立하고 따라서 다음 공식이 成立한다.

$$\left|\overrightarrow{CP}_{pq}\times\overrightarrow{CP}_r\right|=\frac{1}{\sin S_{pq}\ \sin S_{pr}}\left|\overrightarrow{CP}_p\cdot\ \overrightarrow{CP}_q\times\overrightarrow{CP}_r\right|$$

$$\left|\vec{CP}_{qp}\times\vec{CP}_{qr}\right| = \frac{1}{\sin S_{pq}\ \sin S_{qr}}\left|\vec{CP}_p\cdot\ \vec{CP}_q\times\vec{CP}_r\right|$$

$$\left|\vec{CP}_{rq}\times\vec{CP}_{rp}\right| = \frac{1}{\sin S_{qr}\ \sin S_{pr}}\left|\vec{CP}_p\cdot\ \vec{CP}_q\times\vec{CP}_r\right|$$

따라서

$$\sin P_p=\frac{1}{\sin S_{pq}\ \sin S_{pr}}\left|\vec{CP}_p\cdot\vec{CP}_q\times\vec{CP}_r\right|$$

$$\sin P_q=\frac{1}{\sin S_{pq}\ \sin S_{qr}}\left|\vec{CP}_p\cdot\vec{CP}_q\times\vec{CP}_r\right|$$

$$\sin P_r=\frac{1}{\sin S_{qr}\ \sin S_{pr}}\left|\vec{CP}_p\cdot\vec{CP}_q\times\vec{CP}_r\right|$$

이 成立하고 結局

$$\begin{aligned}\left|\vec{CP}_p\cdot\vec{CP}_q\times\vec{CP}_r\right| &=\sin S_{pq}\ \sin S_{pr}\ \sin P_p\\ &=\sin S_{pq}\ \sin S_{qr}\ \sin P_q\\ &=\sin S_{qr}\ \sin S_{pr}\ \sin P_r\end{aligned}$$

이 誘導된다. 이 첫째 둘째式에서

$$\sin S_{pr}\ \sin P_p=\sin S_{qr}\ \sin P_q$$

即

$$\frac{\sin S_{pr}}{\sin P_q}=\frac{\sin S_{qr}}{\sin P_p}$$

둘째 셋째式에서

$$\sin S_{pq}\ \sin P_q=\sin S_{pr}\ \sin P_r$$

即

$$\frac{\sin S_{pr}}{\sin P_q}=\frac{\sin S_{pq}}{\sin P_r}$$

이므로 sin 法則

$$\frac{\sin\ S_{qr}}{\sin\ P_p}=\frac{\sin S_{pr}}{\sin P_q}=\frac{\sin S_{pq}}{\sin P_r}$$

이 成立한다.

5. 結　　言

論文「球面圖形의 硏究」와「球面圖形의 硏究(續)」는 續字만 없으면 完全히 그 題目이 같고 그 속에 다룬 內容도 같은 것이 많다. 그러나 그들 方法은 完全히 다르다. 따라서 위의 두 論文은 球面上의 幾何를 다루는데 있어서 그들 各各의 方法 即 두 가지의 方法을 提示한 것이라 할 수 있고 또 極三角形의 理論, sine 法則, 第一sosine 法則을 가지고 다른 많은 定理를 誘導할 수 있으므로 上記 두 論文과 本稿를 가지고 이들 方法에 의한 球面三角法의 理論 展開의 可能性이 確立되었다고 할 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

1. 金相輪, 球面三角法 韓國海洋大學 海事圖書出版部, 1969.
2. 金相輪, 球面圖形의 研究, 韓國海洋大學 論文集 第8輯, 1973.
3. 金相輪, 球面圖形의 研究(續) 韓國海洋大學 論文集 第10輯, 1975.