

# 고레이놀즈수에 있어서 2차원 캐비티의 비정상 유동특성에 관한 연구

구 영 삼<sup>1)</sup>, 이 영 호<sup>2)</sup>

A Study on Unsteady Flow Characteristics in a 2-D  
Cavity at High Reynolds Numbers

Young-Sam Gu , Young-Ho Lee

## Abstract

The present study is aimed to apply the MAC(Maker And Cell) method to two dimensional polar and square cavities and to illuminate the unsteady flow characteristics of these flow fields.

A new discretization of convection term is made from the MAC method and the pressure correction algorithms of SOLA(SOLution Algorithm). Three kinds of Reynolds number,  $10^4$ ,  $3 \times 10^4$  and  $5 \times 10^4$  are selected for polar cavity and another Reynolds number  $7.5 \times 10^4$  is added for square cavity. Stability analysis and the pressure correction method of SOLA algorithms were discussed in detail on a cylindrical coordinates.

The results present that unsteady flow behavior appears over  $Re = 3 \times 10^4$  on both square and polar cavities. Furthermore, with increasing Reynolds numbers, vortices behaviors indicate more complicated flow phenomena. Especially in the case of square cavity, complicated unsteady flow feature is represented in separation region and the time mean flow shows that it keeps a coherent

1) 한국해양대학교 기계공학과 석사과정 열유체공학 전공

2) 한국해양대학교 기계공학과 부교수

structure together with a 4th eddy on lower corner over  $Re = 3 \times 10^4$ . Also polar cavity display the unsteady flow characteristics over  $Re = 3 \times 10^4$  but nearly steady state at  $Re = 10^4$ .

## 1. 서 론

무한벨트와 같은 덮개구동(lid-driven)에 의한 캐비티유동은 전형적인 밀폐흐름이며 경계조건이 단순하여 전산유체역학분야에서 자주 인용되고 있다. 대표적인 정방형캐비티의 경우 지금까지 많은 연구결과들이 발표되고 있으며 특히 새롭게 개발된 계산기법의 신뢰성을 확보하기 위하여 벤치마크 시험용으로서도 널리 채택되고 있는 대표적인 유동장이다. 그러나 지금까지 공표된 많은 연구내용을 보면 어느 경우에도 레이놀즈수는  $10^4$ 를 넘지 못하고 있으며 이것도 Ghia의 결과에 미치지 못하고 있음을 알 수가 있다. 즉 고레이놀즈수에 대하여 수치적인 안정성을 유지하면서 정확도를 유지할 수 있는 기법의 적용이 어려움을 잘 나타내고 있다. 이와 같은 배경으로부터 본 연구에서는 2차원 정방형 및 폴라캐비티 유동장을 대상으로 하여 고레이놀즈수에서의 비정상계산을 행하여 이에 관련된 유동특성을 체계적으로 규명하고자 하였다. 수치계산은 MAC의 대류항기법 및 SOLA에서의 압력속도완화법을 이용하였으며 특히 대류항의 이산화 방법으로서 기존의 등간격 격자상의 보존형기법을 개선하여 부등간격 격자상에서도 보존형을 유지할 수 있는 기법을 새롭게 제안하여 공간 해상도를 높이도록 하였다. 정방형캐비티에서는 네 가지의 레이놀즈수( $Re=10^4, 3 \times 10^4, 5 \times 10^4, 7.5 \times 10^4$ )를 대상으로 하였으며 폴라캐비티의 경우에는 세 가지의 레이놀즈수( $Re=10^4, 3 \times 10^4, 5 \times 10^4$ )를 상정하였다.

### 2.1 계산방법

아래의 2차원 비압축성 점성유체에 대한 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식을 지배방정식을 대수조작하여 아래와 같이 표현할 수 있다. 단, 아래의 식은 대표속도와 길이 그리고 밀도로 무차원화 되었다.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{C_j} \frac{\partial v_i v_j}{\partial \xi_j} + R_i = -\frac{1}{C_j} \frac{\partial p}{\partial \xi_j} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{C_j^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi_j^2} + C_1 S_i \right] + g_i$$

$$\frac{1}{C_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi_j} + C_2 = 0$$

공간적 격자상에서 MAC의 중심차분법을 부분간격격자에 적용하기 위해 내분법에 의해 변수들을 보간하여 계산하였다. 그림1은 직각좌표계상에서의 변수배치와 정의를 나타내고 있다. 대류항에 대한 차분식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \partial u^2 / \partial x &\approx 2(u_R^2 - u_L^2) / (A+B), & \partial uv / \partial y &\approx (v_U u_U - v_D u_D) / D, \\ \partial uv / \partial y &\approx (v_U u_U - v_P u_P) / A, & \partial v^2 / \partial y &\approx 2(v_Q^2 - v_L^2) / (C+D), \end{aligned}$$

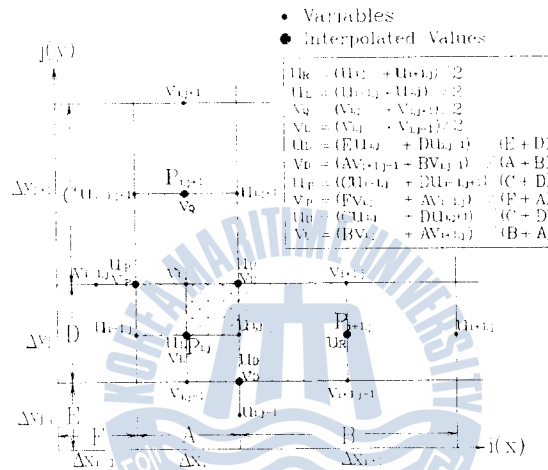


Fig. 1 Variable Allocation on the Square Cavity

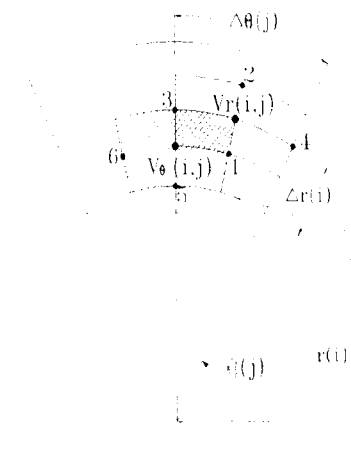


Fig. 2 Variables on the Grid

또한 확산항은 중심차분법으로 부등간격격자 보정을 행하여 다음과 같이 나타내고 압력항의 x방향 식은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \doteq \frac{2}{s(s+1)} \cdot \frac{u_{i+1,j} - (1+s)u_{i,j} + su_{i-1,j}}{A^2}, \quad s = B/A \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j} \doteq \frac{2}{A+B} (p_{i+1,j} - p_{i,j}) \quad (8)$$

## 2.2 안정성 해석

정방형에 대한 대류항의 인공점성을 알아보기 위해 부등간격에서 Hirt의 안정성해석 결과는 아래와 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - g_x = \left(\nu - \frac{\Delta t}{2} u^2 - G_1\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\nu - \frac{\Delta t}{2} v^2 - G_2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G_3$$

$$G_1 = (B-A)u + \frac{1}{2} (A^2 - AB - B^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} (B-A)(A^2 + B^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$G_2 = \frac{1}{8} \left\{ (C-E)v + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} (C+2D+E)D + \frac{D^2}{8} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (C-E) \right\}$$

$$G_3 = \frac{A-B}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

또한 시간 진행에 대한 안정성을 확보하기 위하여 운동방정식의 대류항과 점성항에 대하여 각각의 안정성해석을 실시해 보았다. 원통좌표계상에서의 그 결과는 다음과 같다.

$$C_r = \frac{v_r \Delta t}{\Delta r} \leq 1 \quad C_\theta = \frac{v_\theta \Delta t}{r \Delta \theta} \leq 1$$

$$\Delta t < \frac{2}{\nu \left( \frac{2}{r(i) \Delta r(i)} + \frac{4}{\Delta r(i)^2} + \frac{4}{r(i)^2 \Delta \theta(j)^2} + \frac{1}{r^2(i)} \right)}$$

여기서 변수들의 값은 최소격자의 값으로 취해야 한다. 윗식에서 알 수 있듯이 격자의 크기가 시간 진행의 허용값에 크게 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 즉, 격자의 최소 크기의 제곱에 관계하여 시간 진행이 결정되고 특히 식 분모에 있는 괄호안의 세 번째 항을 살펴보면 미소값의 4제곱에 상당하므로 격자 배치에 주의하여야 한다.

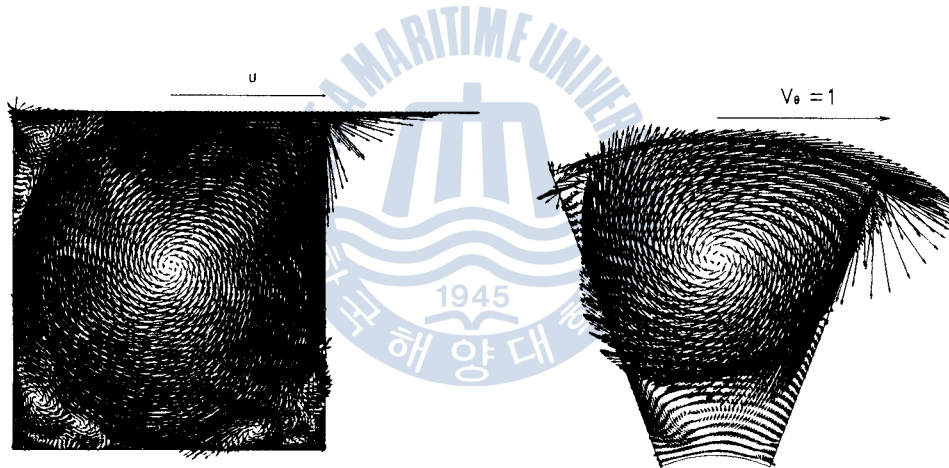
유동장내의 압력값들을 보정하고 연속식을 만족시키기 위하여 아래의 SOLA의 압력 보정 알고리즘을 적용하였다. 단, 여기서  $D(i,j)$ 는  $i, j$ 위치에서 연속식을 나타낸다.

$$\Delta P(i, j) = - \frac{D(i, j)}{2 \left( \frac{r(i)}{\Delta r(i)^2} + \frac{1}{r(i) \Delta \theta(j)^2} + \frac{1}{2 \Delta r(i)} \right) \Delta t}$$

### 3. 계산결과 및 고찰

그림3은 정방형 캐비티와 플라형 캐비티에서  $Re=3 \times 10^4$ 일 경우의 속도분포를 보여준다. 유동장의 각 모서리에서 와유동이 활발하며 비정상적인 유동특성을 알 수 있다. 정방형과 마찬가지로 비정상적인 유동현상을 관찰할 수 있었으며 유동장 하부벽면 근방에서의 흐름은 정방형과는 다른 특성을 보여준다. 이것은 플라형 유동장에서 반경방향의 길이와 원주방향의 길이의 비가 정방형과 달리 균형을 이루지 못한것에 기인한다. 즉, 반경방향의 길이를 지금보다 짧게 조절하면 유동장의 하부에서 정방형에서 보여두는 유동현상을 나타낼것으로 추정된다. 그림4는 중앙 단면에서 이 면에 수직한 속도성분을 나타내고 있다. 플라형과 정방형의 두 유동장에서 하부에 인근한 지역을 제외하면 모든 영역에서 증가한 양상을 보여주고 있다. 좌변에서 우변으로 나열된 반경방향의 속도와 수직방향의 속도 분포는 매우 유사한 패턴을 보여준다. 최대속도값의 크기와 위치 그리고 벽면에서의 발달과정은 두 유동장에서 레이놀즈수에 따라 변화하고있다. 플라캐비티의 원주방향속도벡터와 정방형캐비티의 수평방향 속도벡터는 서로 다른 분포를 나타낸다. 플라형의 하부에서는 유동의 박리를 나타내고 있으며 주와류의 위치에 따라 속도값들이 레이놀즈수값에 변함없이 거의 겹쳐있음을 알 수 있다. 두 유동장에서 최대속도값의 크기와 위치가 감소하면서 주와류의 중심으로 접근됨을 확인할 수 있으며 레이놀즈수의 증가에 따라 속도값들이 완만한 곡선을 이루고 있음을 알 수 있다. 또한 우변과 상면에서는 공통적으로 변곡점이 발생하고 있으며 플라형의 경우 하부에서도 유사한 특성이 나타나고 있다. 이러한 현상은 변곡점이 발생하는 앞부분 즉, 주와류의 회전이 진행되는 방향에 있는 모서리에서의 유동들이 주와류의 운동을 방해함으

로써 나타나는 것으로 짐작된다. 한편 플라형의 경우 주와류의 위치가 유동장의 중심 위치에 벗어나 있는 것을 알 수 있다. 그림5는 유동장 전체의 운동에너지를 시간 진행에 따라 나타내었다. 두가지 유동장에서 어느 경우나  $Re=10^4$ 의 경우 거의 정상상태에 있고  $Re=3 \times 10^4$ 이상에서는 비정상적인 유동현상을 확인할 수 있다. 그러나  $Re=3 \times 10^4$ 이상의 경우에도 일정한 값을 두고 변동성분들이 중첩된 효과를 나타내고 있으며 단조증가나 감소하는 현상을 나타내지는 않는다. 또한, 레이놀즈수 증가에 따라 유동장의 운동에너지 값은 낮아진다. 특별히 플라형 유동장에서  $Re=5 \times 10^4$ 이고 무차원 시간  $T = 1006$ 일 때에 운동에너지가 상당히 큰값을 가지는 것이 구별되는 사항이다. 이러한 사실로부터  $Re=10^4$ 인 경우에는 두 유동장에서 공급되는 에너지와 소산되는 에너지가 정확히 균형을 이루지만  $Re=3 \times 10^4$ 이상에서는 그와 같은 균형이 제한된 범위에서 변화한다는 것을 알 수가 있다. 이러한 사실은 앞선연구결과들과 일치하는 것이다



(A) Square Cavity

(B) Polar Cavity

Fig. 3 Instantaneous Velocity Distribution at  $Re = 3 \times 10^4$

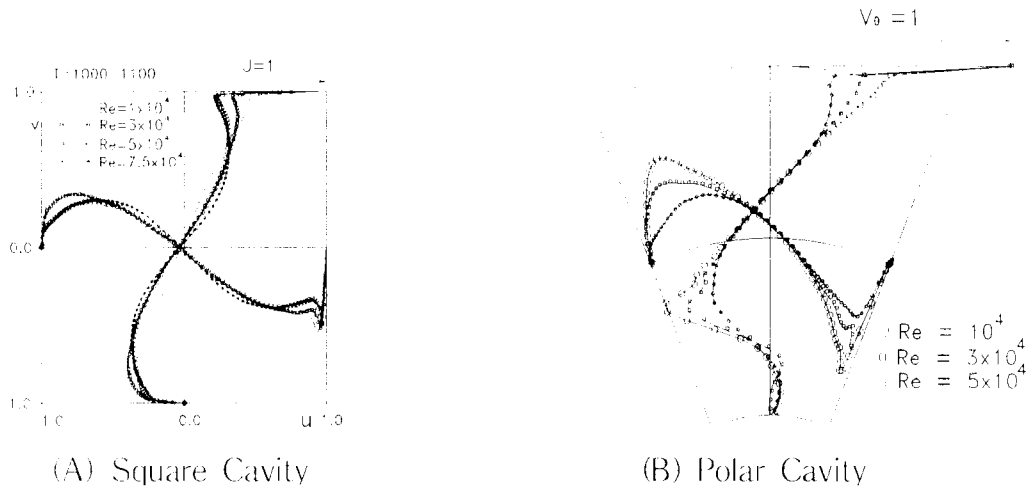


Fig. 4 Time Mean Velocity Profile on Central line

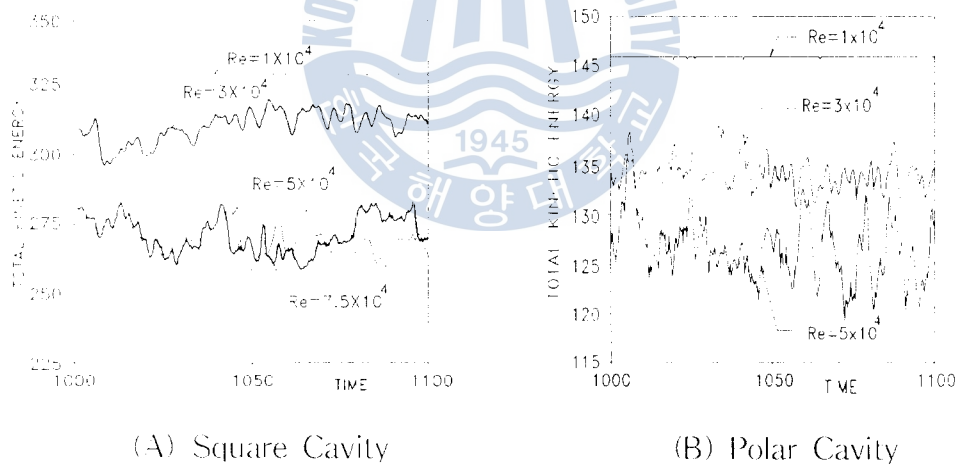


Fig. 5 Time Variation of Total Kinetic Energy

### 4. 결 론

코레이놀즈수에서 2차원의 정방형 캐비티와 폴라형 캐비티를 유동장으로 하여 비정상적인 유동현상을 수치해석을 통해 관찰해 보았다. 계산 결과 두 가지의 캐비티 유동

장은 모두  $Re=3 \times 10^4$  이상에서 비정상적인 유동특성을 나타내며 이것은 Huser의 결과와 일치하였다. 특히 고레이놀즈수에 대하여 본스킴은 다른 기법에 비교하여 수렴성이 우수한 것으로 인식된다. 정방형 캐비티와 폴라형 캐비티에서 레이놀즈수에 따른 속도값의 시간평균은 대체로 비슷한 패턴을 가지는 것으로 관측되었으나 폴라형에 비하여 정방형은 레이놀즈수의 증가에 따른 모서리 부근 고차와류의 움직임이 보다 활발하였다. 이것은 폴라형의 유동장에서 형성된 주와류의 크기에 비해 반경방향이 긴 유동장으로 형성되었기 때문으로 생각된다. 그로 인하여 폴라형의 하부에서 양쪽 모서리에 형성된 고차와류는 하나의 유선도에 포함되는 현상이 나타나고 주와류의 직접적인 영향이 유동장 하부 벽면까지는 미치지 못하게 되었다. 중앙 단면에서 레이놀즈수에 따른 속도벡터의 분포는 점점 완만한 곡선으로 형성되었으며 최대값의 위치나 그 크기가 변동하였다.

캐비티의 공간해상도가 정해진 후에 시간 진행은 레이놀즈수에 관계하여 비례하는 것으로  $\Delta t < 2/\nu [2/r(i)\Delta r(i) + 4/\Delta r(i)^2 + 4/r(i)^2 \Delta \theta(j)^2 + 1/r^2(i)]$ 와 같이 나타났다. 하지만 연속방정식의 조건을 만족하기 위한 반복계산의 수가 레이놀즈수의 증가에 따라 많아짐으로 고레이놀즈일수록 실제 계산시간은 더 오래 걸렸다.

## 참고 문헌

1. U. Ghia, K. N. Ghia & C. T. Shin, High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, J. Comp. Phys. Vol. 48, 1982, pp.387-410.
2. A. Huser & S. Biringen, Calculation of Two-Dimensional Shear-Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers, Int. J. of Numerical Methods in Fluids, Vol. 14, 1992, pp.1087-1109.
3. R. Verstappen, J. G. Wissink, A. E. P. Veldman, Direct Numerical Simulation of Driven Cavity Flows, Applied Scientific Research, Vol. 51, 1993, pp.377-381.
4. C. W. Hirt, Heuristic Stability Theory for Finite-Difference, J. Comp. Phys. Vol. 2, 1968, pp.339-355.
5. 이영호, 최장운, 구영삼, 2차원 정방형캐비티의 비정상 유동특성, 대한기계학회 전산유체역학분과회 학술대회 논문집, 1994, pp.149-167.
6. C. A. J. Fletcher, Computational Techniques for Fluid Dynamics, Springer-Verlag Pub., 1987.