

强制振動에서 減衰係數가 最大振幅에  
미치는 影響에 関하여

Damping effects on the maximum amplitude  
of forced vibration



指導教授 全孝重

權禱春 · 吳載煥 · 許辰旭

## 目 次

1. 머리말
2. 理論解析
  - [1] 自由振動解
  - [2] 定常振動解
  - [3] 共振點과 減衰係數와의 關係
3. 實驗裝置 與 實驗方法
  - [1] 實驗裝置
  - [2] 實驗方法
4. 實驗結果의 理論的 考察
  - [1] 固有振動數( $p$ )의 計算
  - [2] 對數減衰率( $\delta$ )의 計算
  - [3] 共振點에서의 強制力( $f$ )의 計算
  - [4] 強制振動振幅( $a$ )의 計算
5. 實驗結果와 理論的 計算結果의 比較 與 檢討
6. 結論
7. 參考文獻



## 2. 理論解析

實驗裝置의 運動方程式을 誘導하면 다음과 같다.

$$J\ddot{\theta} = \sum (\text{Torque}) \quad \text{이므로}$$

$$(m_1 d^2 + m_2 d^2 + \frac{1}{3} m_3 l^2) \ddot{\theta} = -ca^2 \dot{\theta} - kl^2 \theta + fd \sin \omega t \quad (1)$$

(1) 식을 정리하면

$$mb^2 \ddot{\theta} + ca^2 \dot{\theta} + kl^2 \theta = fd \sin \omega t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{ca^2}{mb^2} \dot{\theta} + \frac{kl^2}{mb^2} \theta = \frac{fd}{mb^2} \sin \omega t \quad (2)$$

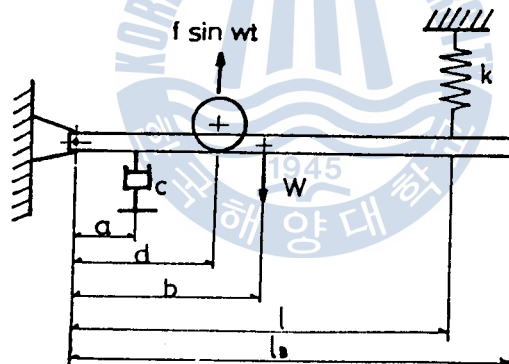


fig.1 Diagram of vibration system

(2) 식에서  $\frac{ca^2}{mb^2} = 2\mu$ ,  $\frac{kl^2}{mb^2} = p^2$  이라 하면,

$$\ddot{\theta} + 2\mu \dot{\theta} + p^2 \theta = \frac{fd}{mb^2} \sin \omega t \quad (3)$$

이 運動方程式의 解는 自由振動에 相當하는 一般解에 強制振動의 定常振動에 相當하는 特別解를 加하면 되므로 먼저 一般解를 구한 후에 特別解를 구하기로 하자.

(1) 自由振動解

自由振動解는 (3)식의 右邊을 0으로 놓고 풀면 된다.

$$\ddot{\theta} + 2\mu\dot{\theta} + p^2\theta = 0 \quad (4)$$

(4)식의 解를  $\theta = e^{st}$ 라 하면

$$\dot{\theta} = se^{st} \quad \ddot{\theta} = s^2e^{st}$$

이다. 이것을 (4)식에 代入하면

$$(s^2 + 2\mu s + p^2)e^{st} = 0 \quad (5)$$

(5)식이 항상 滿足하기 위해서는

$$s^2 + 2\mu s + p^2 = 0 \quad (6)$$

따라서,  $s = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - p^2}$

$$s_1 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - p^2}$$

$$s_2 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - p^2}$$

이때  $\mu$ 와  $p$ 의 관계에 따라 i)  $\mu < p$ ,  
ii)  $\mu = p$ , iii)  $\mu > p$ 의 세가지로 나누어 考察한다.

i)  $\mu < p$

根號안은 陰이 되므로 고쳐쓰면

$$s_1 = -\mu - j\sqrt{p^2 - \mu^2}$$

$$s_2 = -\mu + j\sqrt{p^2 - \mu^2}$$

단,  $j = \sqrt{-1}$

簡單히 하기 위하여  $\sqrt{p^2 - \mu^2} = \delta$ 라 두면

$$s_1 = -\mu - j\delta$$

$$s_2 = -\mu + j\delta$$

따라서 一般解는

$$\theta = Ae^{(-\mu - j\delta)t} + Be^{(-\mu + j\delta)t}$$

$$\theta = e^{-\mu t} (Ae^{-j\delta t} + Be^{j\delta t})$$

$$\theta = e^{-\mu t} \{ (A+B) \cos \delta t - j(A-B) \sin \delta t \} \quad (7)$$

$A+B=C$ ,  $-j(A-B)=D$  라 하면

$$\theta = e^{-\mu t} (C \cos \delta t + D \sin \delta t) \quad (8)$$

이때 初期條件을  $t=0$ ,  $\theta=\theta_0$ ,  $\dot{\theta}=\dot{\theta}_0$  라 한다.

$$\dot{\theta} = e^{-\mu t} \{ -\mu(C \cos \delta t + D \sin \delta t) + (-C\delta \sin \delta t + D\delta \cos \delta t) \} \quad (9)$$

(8),(9) 식에 初期條件을 代入하여 係數  $C, D$  를 구하면

$$C = \theta_0, \quad D = \frac{\dot{\theta}_0 + \mu\theta_0}{\delta} \text{ 가 되며}$$

따라서

$$\theta = e^{-\mu t} \left\{ \theta_0 \cos \delta t + \frac{\dot{\theta}_0 + \mu\theta_0}{\delta} \sin \delta t \right\} \quad (10)$$

(10) 식의 一般的인 波形을 알아보기 위하여

$$\theta_0 = 0, \quad \frac{\dot{\theta}_0}{\delta} = \Theta \text{ 라 하면}$$

$$\theta = e^{-\mu t} \Theta \sin \delta t$$

이것을 그림으로 그리면 Fig. 2 와 같다.

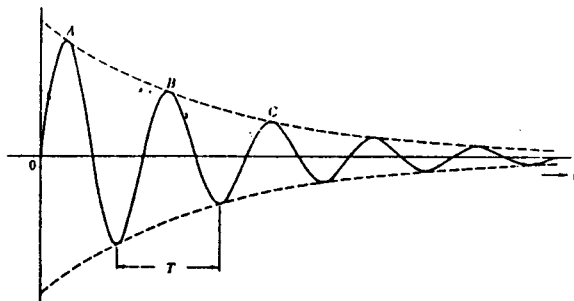


Fig. 2 Damped free vibrator

原點으로부터 시작하여 나타나는 最大振幅의 + 符號 (또는 - 符號) 의 各各의 잇달은 두개의 振幅은 그 比가  $e^{2\pi\mu/\delta}$  로 된다.  $2\pi/\delta$  는 週期  $T$  이므로  $e^{2\pi\mu/\delta} = e^{\mu T}$  로 되고 이것이 減衰振幅比이다.

粘性減衰가 있는 境遇에는 振幅이 等比級數的으로 작아지며 任意의 隣接한 두개의 振幅間의 比 ( $x_n/x_{n+1}$ ) 에 對數를 取하면

$$\delta = \log_e \frac{x_n}{x_{n+1}} = \mu T = \frac{2\pi(\mu/p)}{\sqrt{1-(\mu/p)^2}} \quad (11)$$

$$\text{또, } \frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{n\delta}$$

따라서, 對數減衰率 (logarithmic decrement)  $\delta$  는

$$\delta = \frac{1}{n} \log_e \frac{x_1}{x_{n+1}} \quad (12)$$

$$\mu = \delta/T \quad (13)$$

ii)  $\mu = p$

$s = -\mu$  의 等根이 되므로 (4)식의 또하나의 特別解를 구해야 한다.

特別解를  $\theta = F(t)e^{-\mu t}$  로 보고 (4)식의 右邊에 代入하여 알맞는 特別解를 구한다.

$$\dot{\theta} = \frac{dF}{dt} e^{-\mu t} - \mu F e^{-\mu t} \quad (14)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2F}{dt^2} e^{-\mu t} - 2\mu \frac{dF}{dt} e^{-\mu t} + \mu^2 F e^{-\mu t} \quad (15)$$

따라서 (4)식은

$$\frac{d^2F}{dt^2} e^{-\mu t} - 2\mu \frac{dF}{dt} e^{-\mu t} + \mu^2 F e^{-\mu t} + 2\mu \frac{dF}{dt} e^{-\mu t} - 2\mu^2 F e^{-\mu t} + p^2 F e^{-\mu t} = 0 \quad (16)$$

지금  $\mu = p$  이기 때문에

$$\frac{d^2F}{dt^2} e^{-\mu t} = 0, \quad \text{즉} \quad \frac{d^2F}{dt^2} = 0$$

이것을 滿足하는 풀이 중 常數以外的 가장 簡單한 것은  $F(t) = t$  이기 때문에

$$\theta = t e^{-\mu t}$$

가 되며 이것을 特別解로 擇하면 (4)식의 一般解는

$$\theta = (A+Bt) e^{-\mu t} \tag{17}$$

初期條件을  $t=0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$  라 한다.

$$\dot{\theta} = e^{-\mu t} (B - A\mu - B\mu t) \tag{18}$$

(17), (18)식에 初期條件을 代入하면 係數 A, B를 구하면

$$A = \theta_0, \quad B = \dot{\theta}_0 + \mu\theta_0$$

따라서 
$$\theta = e^{-\mu t} \{ \theta_0 + (\dot{\theta}_0 + \mu\theta_0)t \} \tag{19}$$

이 運動은 非週期運動이며 時間이 經過하면  $\theta$ 는 結局 0이 된다.

그러나 減衰가  $\mu < p$ 의 領域에 들어가면 減衰振動이 되기 때문에 이와 같은 뜻으로 臨界減衰라 한다.

振動系의 減衰의 程度를 생각할 때 臨界減衰를 基準으로 하여 이것에 對한 比로 나타내면 減衰比  $\zeta$ 는

$$\zeta = \frac{\mu}{\mu_c} = \frac{(ca^2/2mb^2)}{(C_c a^2/2mb^2)} = \frac{c}{C_c} \tag{20}$$

$$\mu_c = p = \sqrt{kl^2/mb^2} = \frac{l}{b} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{21}$$

$$C_c = \frac{\mu_c}{a^2/2mb^2} = \frac{\sqrt{kl^2/mb^2}}{a^2/mb^2} = \frac{lb}{a^2} \sqrt{4km} \tag{22}$$

$$\frac{\mu}{p} = \frac{ca^2/2mb^2}{p} = \frac{(c/C_c)(C_c a^2/2mb^2)}{p} = \zeta \tag{23}$$

여기서,  $\mu_c$ ; 臨界減衰時의  $\mu$   
 $C_c$ ; 臨界減衰係數

iii)  $\mu > p$

이 境遇는 無週期運動이므로 考察을 省略하기로 한다:



(2) 定常振動解

定常振動解로서 微分方程式 (3)의 特別解를 구하면 되며 이 特別解는 加振力의 振動數를 갖는 調和振動이 일어날 것으로 豫想되므로 다음과 같이 놓을 수 있을 것이다.

$$\theta = C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (24)$$

(24)식이 特別解가 되기 위한 係數 C, D의 條件을 구한다.

$$\dot{\theta} = -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t$$

$$\ddot{\theta} = -C\omega^2 \cos \omega t - D\omega^2 \sin \omega t$$

이것을 (4)식에 代入하면

$$-C\omega^2 \cos \omega t - D\omega^2 \sin \omega t + 2\mu(-C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t) + p^2(C \cos \omega t + D \sin \omega t) = \frac{fd}{mb^2} \sin \omega t \quad (25)$$

(25)식을 整理하면

$$\{(p^2 - \omega^2)C + 2\mu\omega D\} \cos \omega t + \{-2\mu\omega C + (p^2 - \omega^2)D\} \sin \omega t = \frac{fd}{mb^2} \sin \omega t \quad (26)$$

(26)식의 左邊과 右邊의  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ 의 係數를 比較하면 다음 結果를 얻을 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} (p^2 - \omega^2)C + 2\mu\omega D &= 0 \\ -2\mu\omega C + (p^2 - \omega^2)D &= \frac{fd}{mb^2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{-2\mu\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \cdot \frac{fd}{mb^2} \\ D &= \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \cdot \frac{fd}{mb^2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

그러므로 特別解는

$$\theta = \frac{fd}{mb^2 \{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2\}} \cdot \{-2\mu\omega \cos \omega t + (p^2 - \omega^2) \sin \omega t\} \quad (29)$$

지금까지의 結果를 綜合하면 方程式의 解는 다음과 같이 整理된다.

i)  $p > \mu$

$$\theta = Ae^{-\mu t} \cos \delta t + Be^{-\mu t} \sin \delta t + \frac{fd}{mb^2 \{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2 \omega^2\}} \cdot \{-2\mu \omega \cos \omega t + (p^2 - \omega^2) \sin \omega t\}$$

ii)  $p = \mu$

$$\theta = (A + Bt)e^{-\mu t} + \frac{fd}{mb^2 \{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2 \omega^2\}} \cdot \{-2\mu \omega \cos \omega t + (p^2 - \omega^2) \sin \omega t\}$$

여기서 強制振動項인 (29) 식만을 注目하여 보자

(29) 식을  $\theta = \theta_m \sin(\omega t - \varphi)$  의 形式으로 고쳐 쓰면

$$\theta_m = \frac{fd}{mb^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2 \omega^2}} \quad (30)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\mu \omega}{p^2 - \omega^2} \quad (31)$$

(30), (31) 식을  $\omega/p$ ,  $\mu/\mu_c = \zeta$  (단  $\mu_c = p$ ) 를 利用하여 無次元의 形式으로 나타내면 다음과 같다.

$$\theta_m = \frac{fd}{kl^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + (2\zeta \omega/p)^2}} \quad (32)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta \omega/p}{1 - \omega^2/p^2} \quad (33)$$

(32) 식에서  $fd/kl^2 = \theta_{st}$  라 두면

$$\frac{\theta_m}{\theta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + (2\zeta \omega/p)^2}} \quad (34)$$

(34) 식은 強制振動의 振幅이  $f$  에 의한 靜的 變位 몇 배인가를 나타내는 倍率이며 이것을 振幅倍率 또는 動倍率이라 한다.

(3) 共振點과 減衰係數와의 關係.

$\theta_m/\theta_{st}$ 의 極大値는  $\theta_m/\theta_{st}$ 을  $\omega/p$ 에 關하여 微分하고 이것을 0이라 놓음으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta_m/\theta_{st} &= \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + (2\zeta\omega/p)^2}} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta_m}{\theta_{st}}\right) &= \frac{d}{dt}\left\{\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + (2\zeta\frac{\omega}{p})^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + (2\zeta\frac{\omega}{p})^2\right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot \left\{2\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)\left(-2\frac{\omega}{p}\right) + 8\zeta^2\frac{\omega}{p}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + (2\zeta\frac{\omega}{p})^2\right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot \left\{4\frac{\omega}{p}\left(-\frac{\omega^2}{p^2} - 1\right) + 8\zeta^2\frac{\omega}{p}\right\} \\ &= \left\{\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + (2\zeta\frac{\omega}{p})^2\right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot \left\{2\frac{\omega}{p}\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right) - 4\zeta^2\frac{\omega}{p}\right\} \quad (35) \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta_m}{\theta_{st}}\right) = 0$ 에서  $\frac{\theta_m}{\theta_{st}}$ 이 最大이며, (35)식의 右邊의 分母는 0이 아니므로 分子가 0이면 된다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } 2\frac{\omega}{p}\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right) - 4\zeta^2\frac{\omega}{p} &= 0 \\ 1 - \frac{\omega^2}{p^2} - 2\zeta^2 &= 0 \\ \frac{\omega^2}{p^2} &= 1 - 2\zeta^2 \end{aligned}$$

따라서  $\frac{\omega}{p} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ 에서 (36)

$\frac{\theta_m}{\theta_{st}}$ 은 最大點에 達하고 이것을 (34)식에 代入

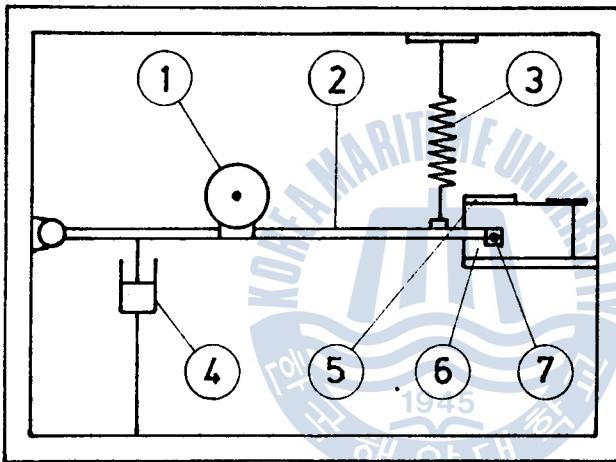
$$\begin{aligned} \text{하면 } \left(\frac{\theta_m}{\theta_{st}}\right)_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{\{1 - (1 - 2\zeta^2)\}^2 + 4\zeta^2(1 - 2\zeta^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\zeta^2(1 - \zeta^2)}} \\ &= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \end{aligned}$$

또는  $(\theta_m)_{\max} = \frac{\theta_{st}}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$

### 3. 實驗裝置 및 實驗方法

#### (1) 實驗裝置

實驗裝置는 萬能振動實驗裝置인 Tecquipment 會社製 TM 16 을 使用하였다. 本 論文에서 使用한 것은 그 중의 一部인 減衰強制振動實驗裝置이며 各部名稱 및 實物寫眞이 Fig. 3 과 Fig. 4 에 보이 고 있다.



1	Moter
2	Beam
3	Spring
4	Dashpot
5	Recording drum
6	Recording paper
7	Recording pen

fig.3 Schematic diagram of equipment



fig. 4 Photo of equipment

(2) 實驗方法

i) 減衰量의 調節

實驗에서 必要한 몇 가지 流体의 對數減衰率을 얻기 위하여 粘度가 서로 다른 기름을 4種類 사용하였으며, 또한 대슈포트(Dashpot)에 뚫려있는 구멍의 數를 調節하여 減衰의 量을 調節하였다. 使用된 기름은 特性은 Table 1 과 같다.

Table.1 Spec. of oil

Kind of oil	Visco (sec)	Spec.w (kg/m <sup>3</sup> )
Light oil (A oil)	36	0.841
Bunker-A (B oil)	206	0.879
Mobile (C oil)	936	0.937
T.T oil (D oil)	1338	0.904

ii) 強制力을 發生키는 모우리의 回轉數 調整

實驗裝置中의 精密速度制衡器에 의해 모우리의 回轉數를 調整하였으며, 共振點, 近處에서는 各 各의 減衰에 있어서의 正確한 共振點을 찾기 위하여 回轉數의 增分間隔을 0.5 rpm 程度로 維持하였다.

iii) 振幅의 記錄方法

測定하고자 하는 回轉數에서의 振幅은 기록판 (Fig. 3 ⑦)에 의해서 一定한 回轉數로 回轉하는 圓筒形 드럼에 감겨지는 記錄紙에 記錄된다. 이때 正確한 振幅을 記錄하기 위하여 測定回轉數에서 振動系가 어느 程度 安定된 狀態로 維持될 때까지 기다려 記錄을 始作하며 記錄된 것 중 最大值를 取하여 그때의 振幅으로 한다.

iv) 스프링 定數의 測定  
 使用된 스프링의 特性은 다음 Table 2 와 같다.

Table.2 Spec. of spring

卷 數	18
平均直徑	45.0 (mm)
素線直徑	2.5 (mm)

스프링 定數를 測定하는 測定裝置의 各部名稱  
 을 Fig. 5 에 보이고 있다.

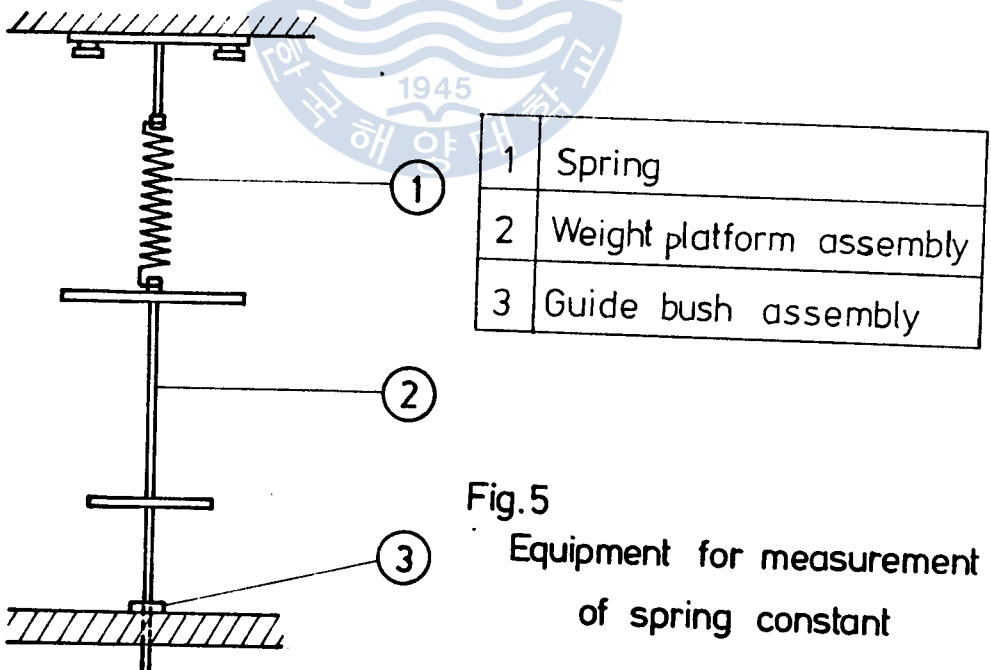


Fig.5  
 Equipment for measurement  
 of spring constant

먼저 플랫폼에 한개當 重量이 0.4 kgf인 웨이트를 加하면서 그때 마다의 變位를 버어너 다이알 게이지 (vernier dial gage) 로 測定한다. 荷重이 스프링에 加할 수 있는 最大值에 達하면 이번에는 웨이트를 한개씩 들어내면서 그때 마다의 變位를 測定한다. 그리고 兩者의 平均値를 그때의 荷重에 對한 變位로 取하고 이것에 의하여 各各 荷重狀態에 서의 스프링 定數를 計算한다. 이 計算値들을 平均하여 最終的인 스프링 定數를 測定 및 計算結果는 Table .3과 같다.

Table 3 Measurement of spring const.

No.	Weight (Kgf)	Loading (mm)	Unloading (mm)	平均變位 (mm)	스프링 定數 (Kgf/mm)
1	0.4	10.71	10.75	10.73	0.03727
2	0.8	21.69	21.75	21.72	0.03683
3	1.2	32.40	31.54	31.97	0.03753
4	1.6	43.32	43.32	43.32	0.03693
5	2.0	54.02	54.14	54.08	0.03698
6	2.4	64.93	64.99	64.96	0.03694
7	2.8	75.70	75.72	75.71	0.03698
8	3.2	86.40	86.42	86.41	0.03703
스프링 定數의 合					0.29652
스프링 定數의 平均値					0.03706

#### 4. 實驗結果의 理論的 考察

本 論文에서 使用한 實驗裝置를 理論的으로 解析하면 다음과 같이 된다.

##### (1) 固有振動數의 計算

運動方程式에 의해서 다음과 같이 固有振動數를 計算할 수 있다.

$$P = \sqrt{kl^2 / mb^2} \quad (\text{rad/sec})$$

여기서

$$mb^2 = (W_1 a^2 + W_2 d^2 + W_3 l_B^2 / 3) / g$$
$$= (0.724 \times 275^2 + 2.861 \times 185^2 + 1.965 \times 750^2 / 3) / 9800$$
$$\doteq 53.17 \quad (\text{kg} \cdot \text{mm}^2)$$

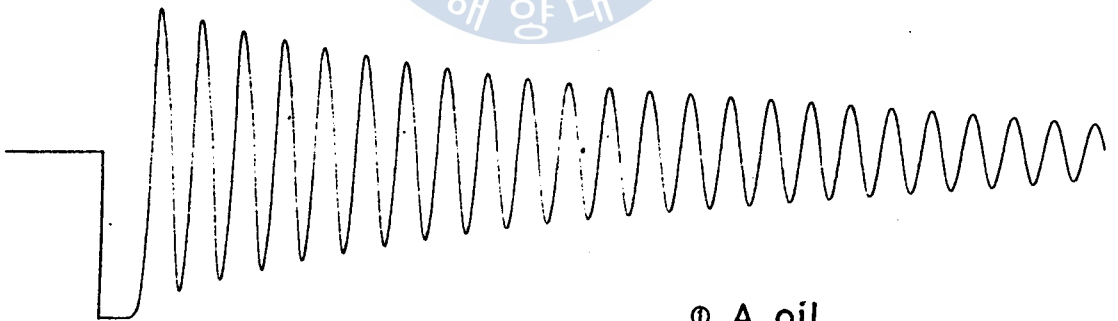
$$k = 0.03706 \quad (\text{kgf/mm})$$

따라서

$$P = \sqrt{0.03706 \times 635^2 / 53.17}$$
$$\doteq 16.765 \quad (\text{rad/sec})$$
$$= 160.1 \quad (\text{rpm})$$

(2) 對數減衰率 (logarithmic decrement ;  $\delta$ ) 의 計算

實驗에 의해서 測定된 各各의 減衰自由振動의 波形은 Fig. 6 과 같다.





먼저 플랫폼에 한개當 重量이 0.4 kgf인 웨이트를 加하면서 그때 마다의 變位를 버어너에 다이알 게이지 (vernier dial gage) 로 測定한다. 荷重이 스프링에 加할 수 있는 最大值에 達하면 이번에는 웨이트를 한개씩 들어내면서 그때 마다의 變位를 測定한다. 그리고 兩者의 平均値를 그때의 荷重에 對한 變位로 取하고 이것에 의하여 各各 荷重狀態에 서의 스프링 定數를 計算한다. 이 計算値들을 平均하여 最終的인 스프링 定數를 구한다. 測定 및 計算結果는 Table .3과 같다.

Table 3 Measurement of spring const.

No.	Weight (Kgf)	Loading (mm)	Unloading (mm)	平均變位 (mm)	스프링 定數 (Kgf/mm)
1	0.4	10.71	10.75	10.73	0.03727
2	0.8	21.69	21.75	21.72	0.03683
3	1.2	32.40	31.54	31.97	0.03753
4	1.6	43.32	43.32	43.32	0.03693
5	2.0	54.02	54.14	54.08	0.03698
6	2.4	64.93	64.99	64.96	0.03694
7	2.8	75.70	75.72	75.71	0.03698
8	3.2	86.40	86.42	86.41	0.03703
스프링 定數의 合					0.29652
스프링 定數의 平均値					0.03706

#### 4. 實驗結果의 理論的 考察

本 論文에서 使用한 實驗裝置를 理論的으로 解析하면 다음과 같이 된다.

##### (1) 固有振動數의 計算

運動方程式에 의해서 다음과 같이 固有振動數를 計算할 수 있다.

$$P = \sqrt{kl^2 / mb^2} \quad (\text{rad/sec})$$

여기서

$$mb^2 = (W_1 a^2 + W_2 d^2 + W_3 l_B^2 / 3) / g$$

$$= (0.724 \times 275^2 + 2.861 \times 185^2 + 1.965 \times 750^2 / 3) / 9800$$

$$\doteq 53.17 \quad (\text{kg} \cdot \text{mm}^2)$$

$$k = 0.03706 \quad (\text{kgf/mm})$$

따라서

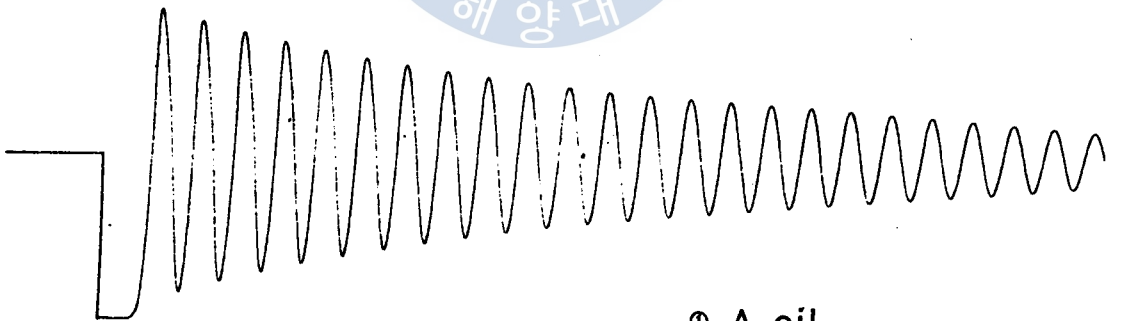
$$P = \sqrt{0.03706 \times 635^2 / 53.17}$$

$$\doteq 16.765 \quad (\text{rad/sec})$$

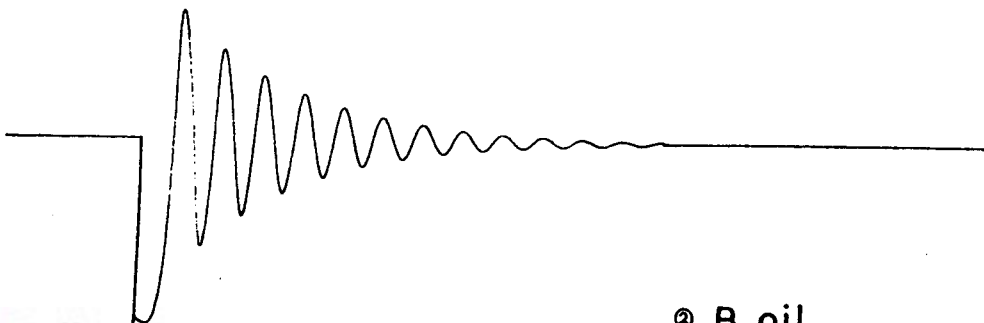
$$= 160.1 \quad (\text{rpm})$$

(2) 對數減衰率 (logarithmic decrement ;  $\delta$ ) 의 計算

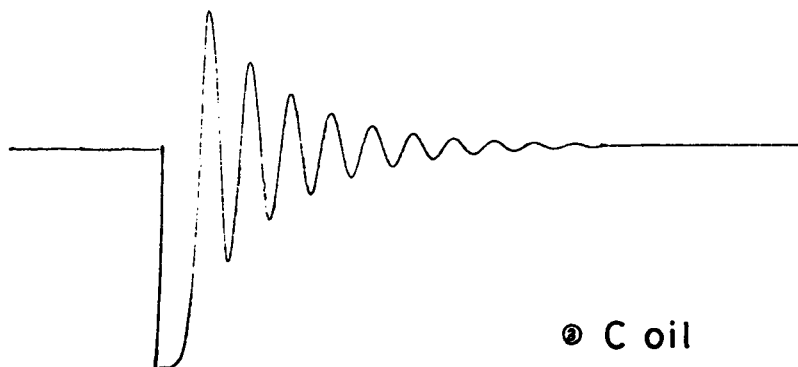
實驗에 의해서 測定된 各各의 減衰自由振動의 波形은 Fig. 6 과 같다.



ⓐ A oil



ⓑ B oil



⊙ C oil



⊙ D oil

Fig.6 Curves of free damped vibration

위 그림들의 각각의 振幅을 5개만 取하여  
測定한 結果는 Table 4와 같다.

Table 4 Measured amplitude

No	A oil	B oil	C oil	D oil
1	25.2	22.7	25.4	19.6
2	23.0	16.0	15.0	7.4
3	21.1	11.4	8.8	2.8
4	19.5	8.1	5.2	1.0
5	18.0	5.7	3.0	0.5

위의 結果를 利用하여 各 振幅間의 對數減  
衰率을 求하고 이들의 平均値를 取하여 各各  
의 對數減衰率로 한다.  
이 對數減衰率에 의해서  $\mu$ ,  $\zeta$ 를 求하면  
Table 5와 같다.

Table 5 Calculation of  $\mu, \zeta$

No	A oil	B oil	C oil	D oil
1	0.00136	0.34077	0.52660	0.07404
2	0.08622	0.33898	0.53320	0.07196
3	0.07985	0.34174	0.52600	1.02061
4	0.08004	0.35130	0.55004	0.60314
合計	0.33647	1.39150	2.13613	3.66967
平均	0.08411	0.34547	0.53403	0.91716
週期(T sec)	0.37973	0.37774	0.39293	0.35400
$\mu$ (S/T)	0.22210	0.01459	1.32403	2.59363
$\zeta$ ( $\mu/\mu_c = \mu/p$ )	0.01324	0.05455	0.09321	0.15411

(3) 共振點에서의 強制力  $f$  의 計算  
 不平衡重量을  $w$ , 不平衡아암 (arm) 의 長이를  $r$  이라 하자. 實驗에서는  $w = 0.05$  (kgf),  $r = 38$  (mm)로 하였으며 共振點에서의 角振動數  $\omega = 16.765$  (rad/sec)이므로

$$f = mr\omega^2 = \frac{wr}{g} \omega^2 = \frac{0.05 \times 38}{9800} \times 16.765^2 = 0.054492 \text{ (kgf)}$$

(4) 強制振動振幅  $a$  의 計算  
 理論解析에 의한 角變位  $\theta_m$  은 (32)式에서

$$\theta_m = \frac{fd/kl^2}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + (2\zeta\omega/p)^2}} = \frac{\theta_{st}}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + (2\zeta\omega/p)^2}}$$

여기서  $\theta_{st} = fd/kl^2$  (rad)

實際로는 記錄紙에 의해 變位만을 測定할 수 있으므로  $\theta_m$ 를 變位の 식으로 나타내어야 한다. 記錄紙까지의 距離를  $a$  이라 하고 變位를  $x$  라 하면

$$a = \theta_m \cdot L = \frac{\theta_{st} \cdot L}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + (2\zeta\omega/p)^2}} = \frac{x_{st}}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + (2\zeta\omega/p)^2}}$$

이며 여기서  $x_{st}$  는  $x_{st} = \theta_{st} \cdot L = fdL/kl^2$   
 따라서 動倍率  $a/x_{st}$  는

$$a/x_{st} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + (2\zeta\omega/p)^2}}$$

### 5. 實驗結果와 理論的 計算結果의 比較·檢討

以上의 理論的인 運動方程式에 의한 計算值와 實驗에 의한 結果를 比較하고 그것을 土臺로 하여 動倍率  $a/x_{st}$  와  $w/p$  의 關係에 對한 그림을 그려서 最大振幅을 나타내는 點의 振動數가 減衰에 의하여 影響을 받고 있음을 檢討한다. 아래 Table 6, Table 7, Table 8, Table 9 는 理論的인 計算值와 實驗에 의한 測定值의 比較를 보이고 있다.

Table 6 Result of calculation for A oil

NO	RPM	w (rad/s)	W/P	f	Xst	a theory	a real	a/Xst theory	a/Xst real
1	122.5	12.829	0.765	0.033	0.319	0.76	0.79	2.410	2.450
2	147.0	15.402	0.919	0.049	0.459	2.20	2.30	6.432	5.212
3	149.0	15.604	0.930	0.050	0.470	3.46	2.91	7.366	6.196
4	150.9	15.811	0.943	0.051	0.483	4.27	4.21	8.838	9.723
5	153.2	16.050	0.957	0.052	0.498	5.72	5.52	11.484	11.094
6	155.6	16.295	0.972	0.054	0.513	8.44	8.26	16.445	16.098
7	156.6	16.407	0.978	0.055	0.520	10.52	11.56	20.225	22.218
8	158.3	16.577	0.989	0.056	0.531	15.50	17.26	29.170	32.482
9	160.2	16.772	1.000	0.057	0.544	20.47	19.30	37.616	33.623
10	161.5	16.820	1.009	0.058	0.553	16.04	11.43	30.606	20.655
11	164.1	17.189	1.025	0.060	0.571	9.82	7.17	17.201	12.556
12	160.5	17.754	1.050	0.064	0.600	4.89	3.47	9.010	5.706
13	178.4	18.694	1.114	0.071	0.675	2.76	1.86	4.006	2.760
14	199.6	20.908	1.247	0.080	0.845	1.51	1.04	1.706	1.234

Table 7 Result of calculation for B oil

NO	RPM	w (rad/s)	W/P	f	Xst	a theory	a real	a/Xst theory	a/Xst real
1	119.7	12.541	0.748	0.032	0.304	0.67	0.65	2.232	2.144
2	146.0	15.295	0.912	0.048	0.452	2.32	1.91	5.132	4.228
3	148.2	15.525	0.926	0.049	0.466	2.67	2.17	5.729	4.644
4	149.0	15.603	0.930	0.050	0.470	2.80	2.34	5.956	4.987
5	152.0	15.920	0.949	0.052	0.490	3.43	2.91	7.009	5.943
6	153.0	16.029	0.956	0.052	0.496	3.68	3.26	7.406	6.563
7	155.7	16.305	0.972	0.054	0.514	4.31	3.56	8.400	6.934
8	157.3	16.476	0.982	0.055	0.524	4.66	3.82	8.899	7.288
9	159.6	16.707	0.996	0.057	0.539	4.95	3.91	9.178	7.250
10	162.6	17.035	1.016	0.059	0.561	4.85	3.60	8.650	6.430
11	163.2	17.087	1.019	0.060	0.565	4.77	3.47	8.452	6.153
12	170.3	17.833	1.063	0.065	0.614	3.50	2.30	5.695	3.747
13	178.6	18.707	1.115	0.071	0.676	2.47	1.52	3.651	2.248
14	197.2	20.650	1.232	0.087	0.825	1.54	0.91	1.866	1.106

Table 8 Result of calculation for C oil

NO	RPM	w (rad/s)	W/P	f	Xst	a theory	a real	a/Xst theory	a/Xst real
1	119.4	12.506	0.746	0.032	0.302	0.65	0.56	2.171	1.860
2	144.0	15.182	0.905	0.047	0.445	1.00	1.52	4.262	3.414
3	146.8	15.378	0.917	0.048	0.457	2.07	1.65	4.544	3.612
4	149.7	15.682	0.935	0.050	0.475	2.38	1.78	5.010	3.748
5	151.2	15.837	0.944	0.051	0.485	2.54	1.95	5.251	4.033
6	152.5	15.960	0.952	0.052	0.493	2.68	2.04	5.448	4.143
7	155.6	16.295	0.972	0.054	0.513	3.00	2.26	5.851	4.403
8	156.9	16.434	0.980	0.055	0.522	3.11	2.47	5.961	4.745
9	159.1	16.662	0.993	0.057	0.536	3.23	2.30	6.020	4.454
10	161.3	16.897	1.007	0.058	0.552	3.27	2.34	5.934	4.252
11	163.6	17.133	1.022	0.060	0.567	3.22	2.34	5.934	4.252
12	169.0	17.700	1.055	0.064	0.605	2.88	1.91	4.763	3.157
13	178.4	18.691	1.114	0.071	0.675	2.20	1.30	3.260	2.050
14	198.8	20.819	1.241	0.089	0.838	1.44	0.82	1.722	0.985

Table 9 Result of calculation for D oil

NO	RPM	w (rad/s)	W/P	f	Xst	a theory	a real	a/Xst theory	a/Xst real
1	141.3	14.801	0.882	0.045	0.423	1.20	0.56	2.855	1.334
2	144.3	15.120	0.901	0.046	0.442	1.32	0.91	2.987	2.065
3	147.6	15.458	0.922	0.049	0.462	1.43	1.00	3.113	2.164
4	148.3	15.532	0.926	0.049	0.466	1.46	1.04	3.137	2.236
5	151.2	15.835	0.944	0.051	0.484	1.56	1.08	3.221	2.241
6	152.6	15.985	0.953	0.052	0.494	1.60	1.26	3.250	2.551
7	154.5	16.180	0.963	0.053	0.506	1.65	1.34	3.275	2.662
8	157.5	16.497	0.984	0.055	0.526	1.72	1.30	3.279	2.478
9	159.7	16.726	0.997	0.057	0.540	1.75	1.26	3.251	2.330
10	160.2	16.783	1.001	0.057	0.544	1.76	1.21	3.240	2.235
11	162.7	17.044	1.016	0.059	0.561	1.78	1.17	3.172	2.080
12	167.9	17.567	1.040	0.063	0.598	1.76	1.17	2.952	1.962
13	177.0	18.542	1.106	0.070	0.664	1.63	1.04	2.453	1.560
14	197.1	20.640	1.231	0.087	0.824	1.28	0.73	1.558	0.806

위 Table 에 보인 바와 같이 計算値와 實測値를 比較하여 보면 대체로 納得할 만한 結果를 보이고 있다.

理論的인 計算値와 實測値의 比較로부터 減衰係數가 增加할수록 最大振幅을 나타내는 點의 振動數가 固有振動數보다 낮아짐을 明白히 보이고 있다.

또한 위의 結果들로부터 理論的인 計算値와 實測値를 比較하여 그림으로 그리면 Fig. 7 과 Fig. 8 에 보이는 曲線으로 나타난다.

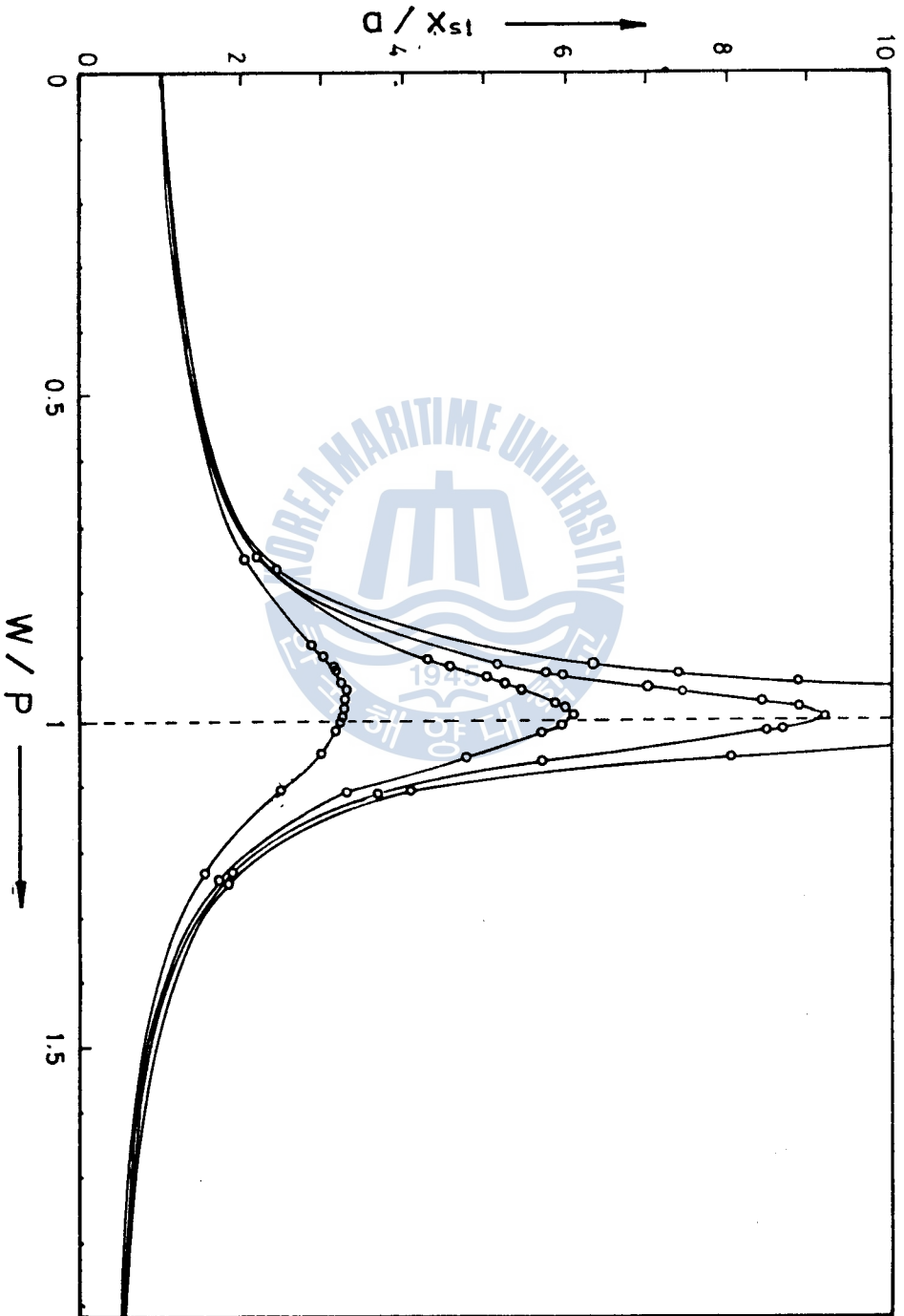


fig.7 Resonance curve of theoretical calculation

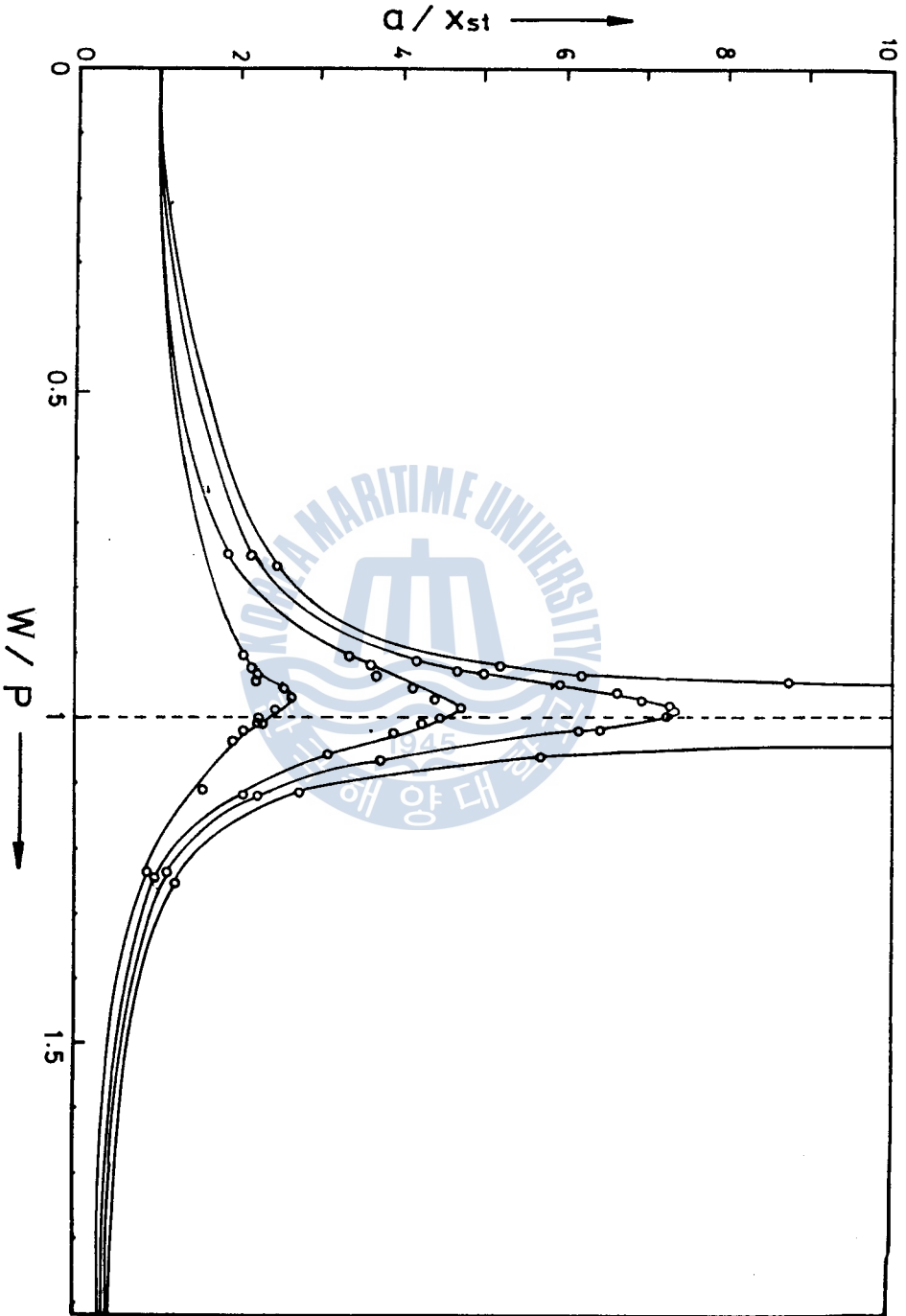


fig. 8 Resonance curve of measurement



## 6. 結論

지금까지 強制減衰振動에서 減衰係數가 最大 振幅에 미치는 影響에 관하여 살펴 보았으며 그 結果로서 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

i) 減衰係數가 크게 될수록 最大振幅은 減少하는 同時에 最大振幅이 發生하는 點은 共振點보다 점차 낮은 振動數에서 發生함을 理論的 解析과 實驗을 通하여 確認할 수 있었다.

ii) 對數減衰率을 實驗에 의하여 구하였으며 이 結果로서 計算한 強制振動振幅은 實驗 結果와 개체로 良好한 一致를 보였다.

iii) 一般的으로 理論的인 計算에 의한 強制 振幅이 實測值보다 큰 振幅을 주고 있으며 이는 空氣抵抗, 記錄紙의 抵抗等 直接的으로 評價하기 어려운 要素에 기인한 것으로 思料된다.

## 7. 參考文獻

- i) 全考重；機械力學，太和出版社，1979
- ii) J.P. 텐하아토크 (全考重 옮김)；MECHANICAL VIBRATIONS (機械振動論)，1973
- iii) FRANCIS S. TSE，IVAN E. MORSE，ROLLAND T. HINKLE；MECHANICAL VIBRATION. (THEORY AND APPLICATION)，김병희 발행，갑출판사，

