

PISTON-CRANK MECHANISM의

等價電氣回路 換算에 關한 研究

盧 彰 注

A study of a simulator for piston-crank mechanism

Nho Chang-Joo

Abstract

A lot of recent researches have shown that, in control engineering, it is quite effective to analyze the complex mechanical systems, particularly vibrating systems, by means of the electrical analogous method which simulates each mechanical element with equivalent electrical circuits. In the study of such a simulator problem, however, there still remain much difficulties unsolved such as how to deal coulomb friction, how to linearize nonlinearities etc.

Here, the author intends to analyze theoretically a 4-cycle internal combustion engine by electrical analogous method. In this paper, coulomb friction was linearized to the equivalent viscous friction in view of loss energy and weight of the connecting rod was divided into two parts so as to simplify the analyses, and a special generator circuit was used to transform the reciprocating force to the torque.

Several theoretical analyses showed good results as expected.

目 次

I. 緒 論	V. 結 論 및 앞으로의 研究課題
II. 記 號	VI. 註
III. 本 論	VII. 參 考 文 獻
IV. 適 用 例	

I. 緒 論

最近 機械運動의 研究方法이 매우 달라져가고 있다. 過去에는 주로 微分方程式을 세워서 初期條件이나 境界條件을 주어 數學的으로 푸는 것이었다. 그러나 이 方法은 微分方程式의 解를 구하는 것이 큰 難關이고 實際 不可能할 때가 많았다.

그러나 電氣回路論의 急進의 發達로 因하여 機械의 要素를 電氣의 要素로 對應시켜 機械의 結合을 電氣回路로 置換시키므로써 機械問題를 電氣問題로 解析可能하게 되었고 또 機械系와 電氣系의 複合으로 된 機械裝置에 있어서도 機械系를 電氣系로 換算하므로써 全體를 電氣的으로 解析할 수 있게 되었다.

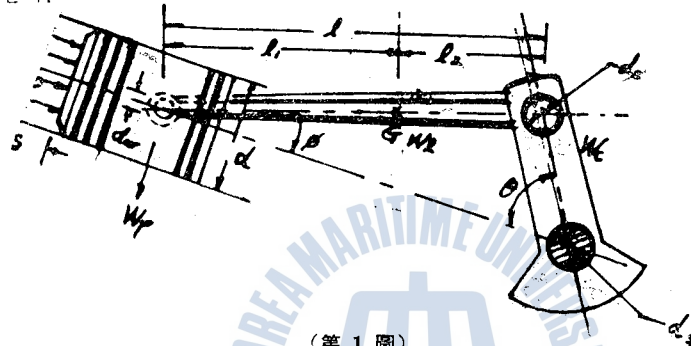
이러한 電氣的 解析은 實驗이 容易하고 計測의 誤差가 적은 點에서 絶對的 利點을 가지는 것이다.

여기 參考로 第一表에 機械的 量과 電氣的 量間의 對應要素의 一覽表를 揭載해 두고 本論文에서는 힘(廻轉力)과 電壓인 Analogue系를 擇하기로 한다.

- J_1 : 回轉運動部分의 主軸에 關한 極慣性 모멘트 (kg m sec², lb ft sec²)
- w_0 : 主베어링에서 支持하는 重量 (kg or lb)
- r_0 : 回轉運動部分의 偏心거리 (m, ft)
- p_R : Piston ring이 單位 길이당 氣筒을 壓搾하는 힘 (kg/m, lb/ft)
- l : Connecting rod의 길이 (m or ft)

Ⅲ. 本 論

충분히 큰 플라이휠로 因하여 一定한 角速度 ω 로 廻轉하고 있는 橫型單실린더 4사이클 內燃機關을 假定한다.



(第 1 圖)

먼저 Connecting rod의 重量 W_0 를 二分하여 往復運動部分과 廻轉運動部分에 添加해 버리면 Connecting rod는 없어진 것과 같고 그 換算된 往復運動部分의 무게 W_r' 는 다음과 같다.

$$W_r' = W_p + \frac{l_2}{l} W_0 \dots \dots \dots (1)$$

(註 1)

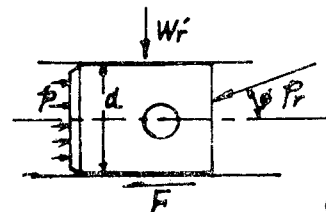
이렇게 하면 Conneting rod 兩端에서 Piston과 Crank에 作用하는 힘은 (Hinge部의 摩擦半徑이 rod의 길이에 比하여 매우 작고 또 Hinge部의 Clearance도 大端히 작으므로) rod의 中心線에 힘의 作用線이 있고 이 힘은 兩端에서 크기가 같고 向이 反對인 힘으로 看做된다. 즉 이것은 피스톤의 Piston pin과 Crankpin 間을 무게가 없는 剛體로 連結한 것과 同一하다.

往復運動部分가 水平方向으로 運動하는데에 미치는 諸힘을 考慮하면 運動方程式 (2)가 成立한다.

右로 運動할 때

$$\left. \begin{aligned} p - p_r \cos \phi - F &= \frac{W_r'}{g} a \\ p - p_r \cos \phi + F &= \frac{W_r'}{g} a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

左로 運動할 때



(第 2 圖)

이 式中 F 는 摩擦에 의한 抵抗力이고 이것은 Connecting rod의 反力의 垂直成分 往復重量 및 Piston Ring이 실린더를 壓搾하는 힘에 의한 摩擦力의 合으로 봐 지므로

$$F = \mu_1 [\pi d p_R + (W_r' + p_r \sin \phi)] \dots \dots \dots (3)$$

(2)와 (3)式에서 p_r 를 구하는데 $W_r' + p_r \sin \phi$ 의 부호가 바뀌질 때가 있으므로 그 點을 考慮하여 p_r 를 求한다. 이것은 부호에 따라 실린더와 피스톤과의 接觸面이 上下로 變하기 때문이다.

(i) 피스톤이 左에서 右로 移動할 때,

항상 $\sin \phi > 0$ 이고

④ $p_r > 0$ 이고 (第2圖의 方向) $W_r' + p_r \sin \phi \geq 0$ 이면

$$p_r = \frac{p - \mu_1 \pi d p_R - W_r' \left(\mu_1 + \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi + \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-a)$$

⑤ $p_r < 0$ $W_r' + p_r \sin \phi > 0$ 이면

$$p_r = \frac{p - \mu_1 \pi d p_R - W_r' \left(\mu_1 + \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi + \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-a)$$

⑥ $p_r < 0$, $W_r' + p_r \sin \phi < 0$ 이면

$$p_r = \frac{p - \mu_1 \pi d p_R + W_r' \left(\mu_1 - \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi - \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-b)$$

(ii) 피스톤이 右에서 左로 移動할 때

이 때는 항상 $\sin \phi < 0$

⑦ $p_r > 0$ $W_r' + p_r \sin \phi > 0$

$$p_r = \frac{p + \mu_1 \pi d p_R + W_r' \left(\mu_1 - \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi - \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-c)$$

⑧ $p_r > 0$ $W_r' + p_r \sin \phi < 0$

$$p_r = \frac{p + \mu_1 \pi d p_R - W_r' \left(\mu_1 + \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi + \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-d)$$

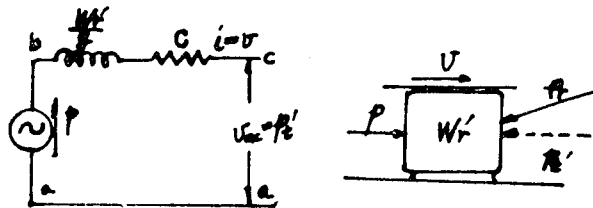
⑨ $p_r < 0$ $W_r' + p_r \sin \phi \leq 0$

$$p_r = \frac{p + \mu_1 \pi d p_R + W_r' \left(\mu_1 - \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi - \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-e)$$

換算된 往復運動部分에 關한 運動式中 F의 誘導過程에서 乾性抵抗만이 있는 것으로 假定하였다. 實은 이 外에도 많은 複雜한 抵抗力이 包含되고 있음을 알고 있으나 絕對的 影響을 미치는 것은 乾性抵抗이다. 더욱이나 實엔진에서는 充分한 潤滑로 두꺼운 潤滑膜이 形成되어 있으므로 完全한 乾性抵抗만으로는 볼 수 없는 것이다. 그렇다고 해서 抵抗力이 速度에 比例한 粘性抵抗이므로도 볼 수 없지만 어느 쪽이라고 봐도 어느 期間 抵抗力으로 잃게 되는 損失에 넣지는 서로 同一해야 하고 乾性抵抗을 等價한 線型粘性 抵抗으로 바꾸면 매우 近似한 線型振動特性으로 解析할 수 있으므로 (註2) 이렇게 하기 위하여 다음과 같은 式을 세우기로 하였다.

$$c \int v ds = \int F ds + \int \cos(\tan^{-1} \mu_2) |P_r| \frac{d_w}{2} d\phi \dots \dots \dots (5)$$

이 式은 粘性抵抗으로 어느 期間(사이클) 잃게 되는 損失은 乾性抵抗力 F와 Piston pin에서 乾性抵抗으로 잃게 되는 損失과 같다는 理論에서 세워진 것이다.



(第3圖)

(5)式的 c 를 구하는데는 既知函數의 形으로 積分이 不可能할지라도 v, a, p, p_r 와 F 의 瞬間值를 구하여 c 를 數值積分으로 求할 수 있다.

이렇게 하여 $\frac{W_c'}{g}$ 와 c 를 求했으므로 이것들은 電氣回路에서의 인덕턴스와 抵抗으로 對應된다.

電壓——힘인 Analogue에서 第3圖처럼 電氣的 等價回路가 우선 往復部分만 그려진다. 즉 a c 간의 電位差는 Connecting rod를 通하여 Crank에 傳達되는 水平力 p_c' 가 된다. 이것은 마치 電氣回路의 漏洩 인덕턴스와 抵抗에의 한 電壓降下를 減한 것과 같다.

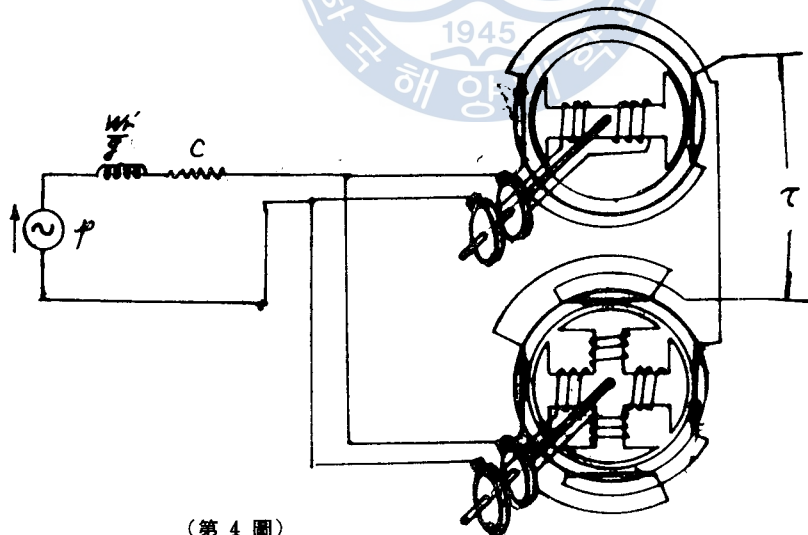
이 水平力 p_c' 로 Crank 廻轉力을 나타내면

$$\tau = p_c' r \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos \phi} \approx p_c' r (\sin \theta + \frac{q}{2} \sin 2\theta) \dots \dots \dots (6)$$

(註 3)

(6)式에서 볼 때 τ 는 p_c' 와 $r \sin \theta + \frac{rq}{2} \sin 2\theta$ 의 積으로 봐지고 廻轉力을 電壓으로 換算하는 Analogue 系에서는 다음과 같은 正弦波 發電機로 解析할 수 있다.

지금 엔진과 同一한 角速度 (ω)로 廻轉시키고 同一軸에 2極과 4極을 가진 發電機에 p_c' 에 比例한 勵磁電流로 磁極을 勵磁시켜 준다. (極數에 따라 ω 는 바꿀 수 있다) 磁極의 모양과 固定子의 捲線法을 正確한 正弦波電壓이 誘起하도록 되어 있다고 보면 誘起起電力의 크기는 p_c' 의 單位電壓에 對하여 最大值가 r volt가 되도록 設計된 二極捲線과 最大值가 $\frac{rq}{2}$ -volt가 되도록 設計된 四極捲線을 만들어 두고 이 두 捲線에서의 誘起起電力의 合이 廻轉力을 나타내는 電壓이 된다.



(第 4 圖)

廻轉運動 部分에 關해서는 Crank pin, 두개의 Crank arm, 主軸, Balance Weight 그리고 Connecting rod의 廻轉運動部分을 合한 것이 全廻轉運動部分의 重量이 된다.

$$W_c' = W_c + \frac{\ell_1}{\ell} W_e \dots \dots \dots (7)$$

[註 4. 廻轉重量은 半徑 r 인 Crank pin의 位置로 等價하게 옮긴 것으로 함]

이 무게의 廻轉軸에 關한 極慣性 모멘트 J_1 은

$$J_1 = \frac{1}{g} [W_c + \frac{\ell_1}{\ell} W_e] r^2 = \frac{W_c'}{g} r^2 \dots\dots\dots (8)$$

Crank pin이 받는 힘은 p_r 와 Connecting rod의 廻轉運動部分으로 換算된 重量과 또 이 重量이 廻轉으로 받게 되는 遠心力의 세 種이다. 또 Pin과 Bush 간의 Clearance는 적고 相對廻轉角은 $\theta + \phi$ 가 되지만 一行程中 $\pm \phi$ 로 相殺되어서 結局 π 가 되므로 相對廻轉角을 θ 로 보면 Crank pin에서 잃게 되는 일 T_1 은

$$T_1 = \frac{1}{2} \cos(\tan^{-1} \mu_2) \mu_2 d_c \int \sqrt{(p_r \cos \phi - \frac{\ell_1}{\ell g} W_e r \omega^2 \cos \theta)^2 + (p_r \sin \phi + \frac{\ell_1}{\ell g} W_e r \omega^2 \sin \theta)^2} d\theta \dots\dots\dots (9)$$

Main Bearing에서는 廻轉部의 全重量 W_0 (Connecting rod의 廻轉部의 重量도 包含)의 廻轉에 의한 遠心力과 Connecting rod에서 傳來한 힘을 받으므로 앞의 方法에 따라 廻轉으로 因해서 잃게 되는 일 T_2 를

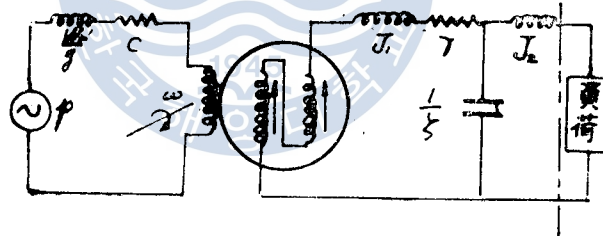
$$T_2 = \frac{1}{2} \cos(\tan^{-1} \mu_2) \mu_2 d_s \int \sqrt{(W_0 - \frac{W_0}{g} r_0 \omega^2 \sin \theta - p_r \sin \phi)^2 + (p_r \cos \phi - \frac{W_0}{g} r_0 \omega^2 \cos \theta)^2} d\theta \dots\dots\dots (10)$$

따라서 全廻轉摩擦損은

$$\gamma \int \omega d\theta = T_1 + T_2 \quad \gamma = \frac{T_1 + T_2}{\int \omega d\theta} \dots\dots\dots (11)$$

로 된다.

Crank pin과 Flgwheel 사이의 軸과 Crank arm의 비틀림 彈性係數 ζ 까지 計算된다면 이것을 廻轉 Compliance로 바꾸고 (註 5) Fly-wheel까지 綜合한 等價回路는 第5圖와 같다.



(第 5 圖)

IV. 適 用

美國 Briggs and Stratton Corporation에서 製作된 空氣壓縮機 驅動用 小型 Gasoline 엔진에 對하여 適用시켜 보기로 하였다. (크랭크軸의 치수는 第8圖 參照) 이 엔진을 分解하여 얻을수 있는 치수는 다음과 같다.

$$W_p = 1.74 \text{ lb}$$

$$W_e = 2 \text{ lb}$$

$$W_0 = 75.5 \text{ lb (Crank pin, Crank arm, Balance Weight, gear, 軸의 무게 및 Flywheel의 무게)}$$

$$d = 3.5''$$

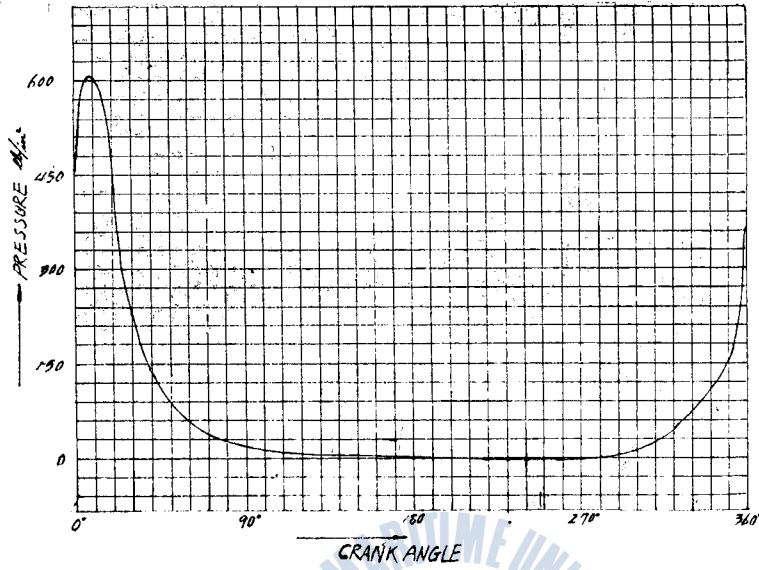
$$d_s = 1.593''$$

$$d_w = 0.812''$$

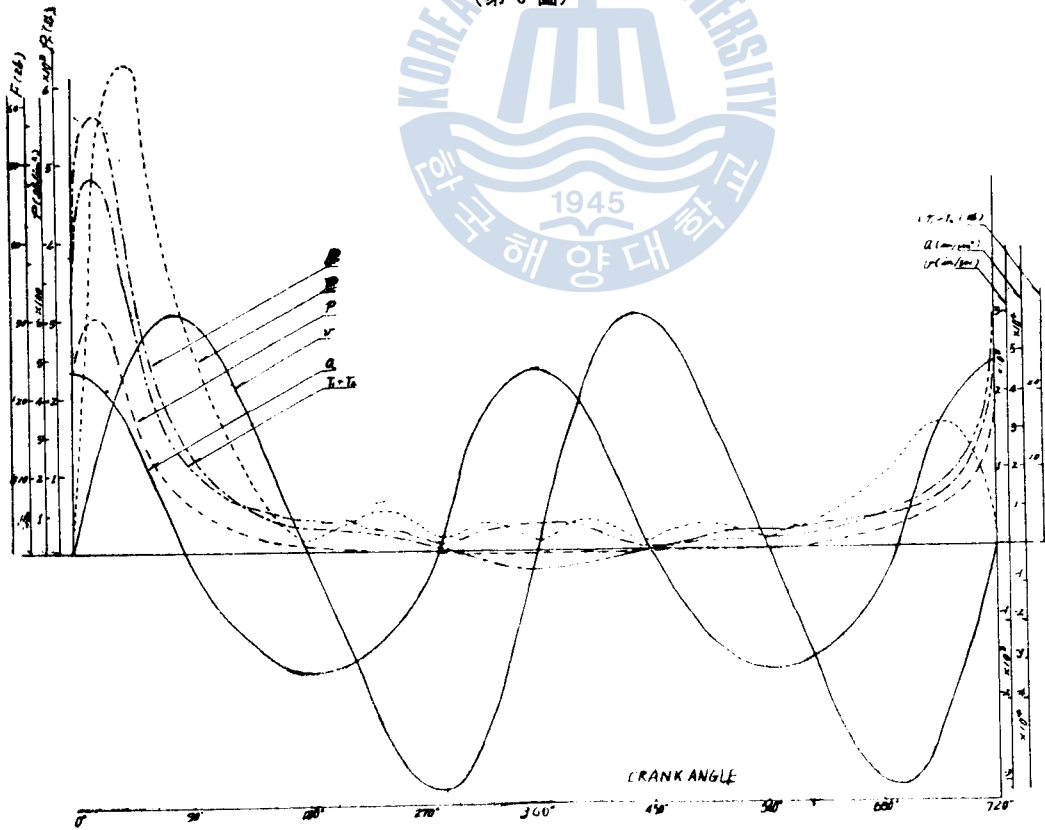
$$d_c = 1.359''$$

$$r = 2.375''$$

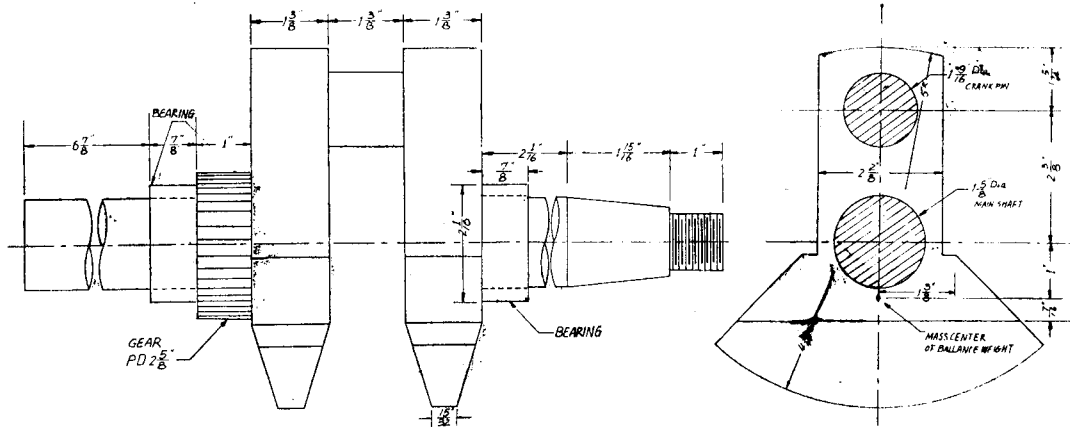
$$\ell = 9.938''$$



(第 6 圖)



(第 7 圖)

CRANK SHAFT $s=1/1$ 

(第 8 圖)

$$l_1 = 8.665''$$

$$l_2 = 1.273''$$

Fly wheel의 무게 57.6 lb

$$q = 0.2381$$

가스의 폭발壓力은 第6圖와 같고

$$\omega = 1200 \text{ r. p. m}$$

(1)式에 의하여 W_r' 는

$$W_r' = W_p + \frac{l_2}{l} W_e = 1.996 \text{ lb}$$

$$\frac{W_r'}{g} = \frac{1.996}{32.2 \times 12} = 5.164 \times 10^{-3} \text{ lb sec}^2/\text{in} = 0.094 \text{ kg sec}^2/\text{m} \text{ [Henry]}$$

c는 第7圖의 F曲線의 變位에 對한 積分의 合으로 구하고 이 때의 摩擦係數는 0.005 (註 6)로 假定하였다.

F의 계산에 πdp_R 즉 Piston Ring 全體가 氣筒을 압축하는 힘은

Piston Ring이 이 엔진에서는 $\frac{3}{16}$ ''의 것이 3개 있었고 Ring의 壓力을 0.324 kg/cm^2 (註 7)

로 假定하면 $\pi dp_R = 28.45 \text{ lb}$ 를 얻었다.

c의 값은 (5)式에 따라

$$c = \frac{104.3 + 64.2}{189.7 \times 4 \times 2.375} = 0.935 \text{ lb sec/in} = 1.681 \text{ kg sec/m} \text{ [ohm]}$$

이것으로 第5圖의 發電機, 勵磁, 回路의 抵抗과 인덕턴스를 구했다. 電壓 (p)中 저항과 인덕턴스에 의한 電壓降을 減한 電壓 (p')에 比例한 勵磁電流로 起電力이 誘起되고 이 回路部分의 인덕턴스는 廻轉部의 極慣性 모멘트와 같으므로 이 엔진의 크랭크 측에 關한 값을 計算하여 Connecting rod의 廻轉部 것까지 合하면 된다.

$$J_1 = \frac{W_c}{g} r^2 + \frac{W_e}{g} \times \frac{l_1}{l} r^2 = 0.21182 + 0.026 + 0.23782 \text{ lb in sec}^2$$

$$= 0.002731 \text{ kg m sec}^2 \text{ [henry]}$$

(9) (10) (11)式에 따라 γ 를 구하는데

Connecting rod의 廻轉部分까지 合하여 計算한 結果 廻轉部의 偏心거리가 $r_0 = 0.101''$ 를 얻었다.

$T_1 + T_2$ 를 구하여 γ 를 計算하면

$$\gamma = \frac{1}{48} \frac{(110.0029 + 185.559)}{40\pi \times 2\pi \times 2} = 0.00347 \text{ lb in sec/rad} = 4.14 \times 10^{-5} \text{ kg m sec/rad}$$

크랭크 축을 均一한 圓形棒으로 換算하고 (註 8) 이것의 비틀림 스프링 상수는

$$18.48 \times 10^6 \text{ lb in/rad} = 21.2 \times 10^3 \text{ kg m/rad}$$

이것의 廻轉 Compliance

$$\frac{1}{\zeta} = 0.0474 \times 10^{-6} \text{ rad/kgm [Farad]}$$

마지막으로 Fly-Wheel의 極慣性 모멘트는

$$J_2 = 0.2692 \text{ lb in sec}^2 = 3.1 \times 10^{-3} \text{ kg m sec}^2$$

이상으로 第5圖에 나타낸 各部의 機械要素에 關한 等價電氣要素로 換算하였다.

이상의 모든 計算은 10'' Slide rule을 使用하였고 2廻轉을 單位(1사이클)로 한 平均値를 구하여 計算하였음.

V. 結論 및 앞으로의 研究課題

피스톤 크랭크 機構에서 가장 問題가 되고 있는 것은 Connecting rod이다. 이것은 相當한 重量을 차지하고 또 길이가 짧아 그의 完全한 力學的 解析은 매우 困難하다. 本論文에서와 같이 이것을 두 部分(往復運動部分과 廻轉運動部分)으로 分割하면 Connecting rod의 極慣性모멘트는 分割하기 前보다 若干 增加하고 이로 인하여 크랭크 廻轉力에 多少의 影響을 미친다. 그러나 그 値는 매우 적어서 엔진을 驅動하는 廻轉 力에 比하여 無視할 수 있다. (註 9)

또 두 部分의 等價粘性抵抗을 구할 때는 한 사이클을 單位로 하였으므로 瞬間値와 比較하면 一致하지 않지만 한 사이클 單位로는 一致할 것이며 이 粘性抵抗 損失에너지는 피스톤에서 發生하는 에너지 中 摩擦로 잃게 되는 에너지와 같은 것이다. 換言하면 等價回路上的 抵抗損失과 같다.

實機械가 가지는 彈性과 慣性으로 인하여 생기는 影響을 等價回路에서 인덕턴스와 카파시턴스로 바꾸고 나면 機械要素가 全部 電氣要素로 置換되었고 이것은 마치 피스톤의 가스 壓力의 變化와 等價인 電壓에서 回路上的 抵抗과 인덕턴스에 의한 電壓降下를 減한 電壓에 比例하는 勵磁電流로 磁極을 勵磁시켜 주고 이 勵磁電流 自身이 直流일 때는 誘起電壓은 몇가지의 正弦 高調波를 포함한 歪曲正弦波가 되겠지만 여기서 取扱된 勵磁電流는 매우 複雜한 函數로 變化할 것이므로 等價回路上的 發電機의 誘起電壓은 더욱 複雜할 것이다. 그러나 이 波形이 바로 實內燃機關의 廻轉力에 相當하는 電壓이다.

이렇게 하여 實엔진을 電氣回路로 變換시키고 나면 實엔진의 類似한 諸特性을 電氣回路를 通하여 구할 수 있다. 즉 荷重의 變動에 따른 速度의 變化 調速機의 動作特性이 엔진에 미치는 影響 危險速度 等을 電氣回路를 通하여 解析 可能하다.

周知하는 바와 같이 電氣回路에서는 計測, 實驗制御가 比較的 容易하고 精度가 높아 有益한 點이 많다.

本論文에서는 單氣筒 機關의 Piston-Crank mechanism에 關하여 等價回路로 換算하였지만 多氣筒 機關에는 크랭크 角度와 같은 크기의 位相差를 가진 多相交流發電機(本論文에서 말하는 發電機)로 構成되며 相數가 많으면 많을수록 廻轉力曲線의 變動이 적어지고 더욱 實機械에 가

까운 結果를 얻을 수 있다.

實機關은 Piston-Crank mechanism 以外도 Cam, Gear, Valve 등이 있고 이것들까지도 對象으로 하여 等價電氣回路로 換算한다면 엔진 全體를 電氣回路로 換算할 수 있지만 그의 實踐에 있어서는 실린더內에서 일어나고 있는 Gas 壓力과 對應하는 波形을 發生시킬 發電機 (波形發生裝置)의 製作을 비롯하여 Valve 動作과 Gam 動作의 換算 等の 難問題가 남아 있다.

Ⅵ. 註

- 註 1. Theory of machine Joseph Edward Shigley p-539
- 註 2. 機械力學 Ⅱ卷, 谷口 修 p-37 參照
- 註 3. 中村行三 機械力學 p-11 參照
- 註 4. 中村行三 機械力學 p-27 "
- 註 5. 中村行三 機械力學 p-106 "
- 註 6. 機械設計 鄭性模 p-290 "
- 註 7. 機關科 提要 中卷 古川 外 2名 p-197 參照
- 註 8. Timosenko 工業振動 p-189 "
- 註 9. 中村行三 機械力學 p-9 參照

Ⅶ. 一般參考文獻

- ① 機械力學 中村行三 關谷壯 いすみ書房 1961.
- ② Mechanical Vibration by W. J. Thomson Prentice Hall 1953.
- ③ 機械力學 Ⅱ卷 谷口 修 養賢堂 1954.
- ④ Theory of machine Joseph Edward Sligley Mc-Graw Hill 1961.
- ⑤ 機械の研究 Vol-19 No. 3~No. 6 中の 機械回路の記號解析 中田 考 1967.
- ⑥ 非線形振動 杉山昌平 廣川書店 1965.