

Navier-Stokes 방정식의 음해법에 의한 선체주위의 파도계산

박명규
한국해양대학교

곽승현
현대중공업주식회사

Calculation of Ship Waves by Semi-Implicit Method of Navier-Stokes Equation

Park, Myung-Kyu
Korea Maritime University

Kwag, Seung-Hyun
Hyundai Heavy Industries Co., Ltd.

Abstract

To simulate the ocean waves more efficiently, the three dimensional Navier-Stokes equation is solved for a ship. The IAF (Implicit Approximate Factorization) method is used to show a good success in reducing the computing time. The CPU time is almost an half of that if the IAF method were used. The present method adopts the local linearization and Euler implicit scheme without the pressure-gradient terms for the artificial viscosity. Calculations are carried out at the Reynolds number of 10^6 and the Froude numbers are 0.25, 0.289 and 0.316. For the approximations of turbulence, the Baldwin-Lomax turbulence is used. The resulting free-surface wave configurations and the velocity vectors are compared with those by the explicit method and experiments.

요약

선박 기본설계에 필수적인 선체주위의 파도를 보다 효율적으로 계산하기 위하여 항공분야에 주로 사용되는 implicit 법인 IAF (Implicit Approximate Factorization) 법을 이용해 3차원 선형 주위의 자유표면파 및 점성유동장을 해석하였다. IAF 법을 사용함으로써 기존 Euler explicit의 계산 시간을 50% 이상 감소시키는데 성공하였다. 수치 기법으로 국부 선형화와 Euler implicit 법을 사용하였으며 artificial viscosity의 생성을 위한 압력 구배항은 넣지 않았다. 수치 계산은 Reynolds 수 10^6 , Froude 수 0.25, 0.289 및 0.316에 대하여 수행하였고 난류 모형으로는 Baldwin-Lomax 모형을 사용하였으며 주요 계산 결과로는 자유표면파 형상 및 속도 분포 등이었다. 본 연구에서는 그 중에서 자유표면파 형상에 대한 계산 결과를 실험 값 및 Euler explicit의 결과와 각각 비교 검토하였다.

1. 서론

본 논문에서 사용한 수치 방법인 IAF 법은 Navier-Stokes 방정식을 유한차분법으로 풀 수 있게 만들어진 수치기법으로 Beam and Warming¹⁾에서 시작되었다. 이 방법의 특징으로는 공간 미분 연산자를 인수분해 함으로써 고차 미분항의 계산을 간단히 해 주어 CPU 시간을 줄일 수 있다는 것과 수치적인 기법의 안정성이 보장되어 CFL 조건 및 그에 따른 시간 증분의 제한 문제 등의 배제를 들 수 있다. 시간 미분을 근사 인수분해하면 Euler implicit로 근사하고 비 선형 항들은 부분 선형화한 편미분 방정식을 상미분 방정식으로 바꾼다. 이와 같은 인수분해 (factorization)는 3차원 문제의 경우 계산 시간을 상당히 단축할 수 있는 장점 때문에 항공분야의 압축성 유체에 대해서는 상당히 많은 적용이 이루어진 상태로 Shang²⁾은 N-S 방정식을 풀어 Wing-body에 대한 계산을 수행했으며 Shang, Hankey and Petty³⁾는 3차원 층류-천이-난류 흐름을 해석했고 Shang and Hankey⁴⁾는 3차원 모서리에 대해서 N-S 방정식을 풀어서 비압축성 모서리 유동에서의 점성 및 비점성의 강한 상호 효과를 계산하는데 성공했다. 비압축성 유체에 압력에 관한 미분항을 추가시킴으로써 연속방정식에 의사압축(pseudo-compressibility) 항을 인위적으로 넣어서 계산하는 방법과는 상이하게, 본 논문에서는 Kohara⁵⁾의 2차원 계산 방법을 3차원으로 확장하여 수치 계산을 수행한 것으로 선형 설계에의 적극적 응용을 목표로 하여 Wigley model에 자유표면을 포함시켜 3차원 IAF로 점성 유동장을 계산한 것이다.

기존의 Euler explicit 법에서는 높은 Reynolds 수의 계산에 있어서 매우 작은 격자 간격이 필요하며 수치 안정성을 위해서는 이에 부응하는 아주 작은 시간 증분이 요구되기 때문에 계산 시간이 상당히 길어질 수밖에 없었다^{6,7)}. 그러나 IAF 법을 사용할 경

우 수치 기법의 안정성이 향상되므로 시간 증분 Δt 를 크게 할 수 있고 결국 이산화된 방정식은 블록 펜터 다이어그램 행렬로 풀어서 쉽게 계산할 수 있었다. 이 경우에 난류 모형의 사용은 Euler explicit 법과 별 변동 없이 적용되었다.

본 논문의 계산에서는 Reynolds 수는 10^6 , Froude 수는 0.25, 0.289 및 0.316 이었고 난류 모형으로는 Baldwin-Lomax의 대수 모형을 사용하였고, 계산 결과를 Euler explicit 및 실험 값과 각각 비교하였다.

2. 수치해법

2.1 기초 방정식

비압축성 유체의 Navier-Stokes의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

위 식들은 특성 길이 L' , 속도 C' 등으로 무차원화 된 것으로 " ' " 을 차원이 있는 물리량을 뜻한다고 하면 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{u'}{C'}, \quad v = \frac{v'}{C'}, \quad w = \frac{w'}{C'} \\ x &= \frac{x'}{L'}, \quad y = \frac{y'}{L'}, \quad z = \frac{z'}{L'} \\ P &= \frac{P'}{\rho' C'^2}, \quad t = \frac{t'}{L'/C'} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 ρ' 는 밀도이다.

또한 ϕ 는 다음과 같이 정의되며 Re는 Reynolds 수, Fn는 Froude 수이다.

$$\phi = P + \frac{z}{Fn^2} \quad (3)$$

무차원화 된 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

1차의 전진 차분법을 사용하여 이산화하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= E \\ E &= \frac{u^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{v^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F \\ F &= \frac{v^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{w^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} &= G \\ G &= \frac{w^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

위의 식에 관한 편미분을 수행하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} &= \nabla^2 \phi \\ + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

자유표면의 파고계산을 위하여 수면상의 임의점(x,y)에서 수면 변위를 $\eta(t,x,y)$ 라 할 때 시간 t에서 편미분은

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (7)$$

이 되므로 이로 부터 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (8)$$

2.2 IAF 법의 계산 방법

본 논문에서 사용된 계산방법은 참고문헌 [1]의 인수분해 음해법에 기초를 두고 있다. 3차원 N-S 방정식을 IAF법으로 이산화하면 결국 다음과 같이 된다.

ξ -sweep

$$\begin{aligned} \left\{ I + \Delta t \left[A + A \frac{\partial}{\partial \xi} - C_x \left(a \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right] \right\} \Delta q^n \\ = -\Delta t \left[A q_x + B q_y + C q_z - C_x (d q_{xx} + e q_{yy} + f q_{zz} \right. \\ \left. + 2 q_{xy} + 2 q_{yz} + f q_{xz} + g q_x + h q_y + i q_z) \right] \\ + \Delta t C_x (d \Delta q_{xx} + e \Delta q_{yy} + f \Delta q_{zz})^{n-1} \end{aligned} \quad (9)$$

η -sweep

$$\begin{aligned} \left\{ I + \Delta t \left[B + B \frac{\partial}{\partial \eta} - C_x \left(b \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + h \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \Delta q^{n*} \\ = \Delta q^n \end{aligned} \quad (10)$$

ζ -sweep

$$\begin{aligned} \left\{ I + \Delta t \left[C + C \frac{\partial}{\partial \zeta} - C_x \left(c \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right] \right\} \Delta q^{n*} \\ = \Delta q^{n*} \end{aligned} \quad (11)$$

이때 속도는 다음과 같이 구해진다.

$$q^{n+1} = q^n + \Delta q^n \quad (12)$$

여기서 행렬 \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} 는 대류항의 국부 선형화에 의해 얻어지고 다음의 기본 원리에 의한다.

$$d(Aq_x) = dAq_x + A \Delta q_x = \hat{A} \Delta q_x + A \Delta q_x \quad (13)$$

계산 알고리즘을 간단히 설명하면, 압축성 유체에서는 연속 방정식에 압력항이 함께 넣어져서 속도 및 압력이 동시에 계산되어지나, 본 계산 기법에서는 비압축성 유체이기 때문에 압력 구배항을 인위적으로 부가시키지 않고 단지 속도 및 압력을 벡터 표시화하여 block 대각행렬을 만들어 각 방향으로 sweep하여 풀어 가는 방법이다. 이 방법은 양해법의 계산과 비교하면 계산상의 효율이

무척 높는데 이것은 행렬의 계산이 3차원 속도를 동시에 풀어낼 수 있기 때문이다. 본래의 IAF 법과의 차이점은, 본 계산에서는 압력항의 계산에서는 종래의 explicit 법을 그대로 적용했고 따라서 Poisson 방정식에 의해 반복 계산을 수행하는 것이다. 대류항에 대해서는 3차 풍상 차분법을 사용했으며 속도 sweep에서는 5중 대각 행렬을 구성하여 ξ , η 및 ζ 방향으로 차례로 해를 얻었다.

2.3 격자생성 및 경계조건

격자생성은 우선 자유표면의 움직임이 가장 쉬운 H-H 형태를 택하였다. 수치 계산으로는 기하학적 방법을 사용하였고 직교성, 곡률도 등을 고려하여 가능한한 선수 및 선미부근에서 부족한 격자수에 의한 자유표면 생성에의 영향을 덜 받게 하였다. 각 단면에 적용된 경계조건은 다음과 같다.

상류경계면:

$$u = 1, v = 0, w = 0 \text{ and } p = 0$$

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0$$

하류경계면:

$$u_{\xi} = v_{\xi} = w_{\xi} = p_{\xi} = 0$$

$$\Delta u_{\xi} = \Delta v_{\xi} = \Delta w_{\xi} = \Delta p_{\xi} = 0$$

대칭면:

$$u_{\eta} = v_{\eta} = w_{\eta} = p_{\eta} = 0$$

$$\Delta u_{\eta} = \Delta v_{\eta} = \Delta w_{\eta} = \Delta p_{\eta} = 0$$

선체표면:

$$u = v = w = 0, p_{\zeta} = 0$$

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0, \Delta p_{\zeta} = 0$$

자유표면:

$$h_t + U h_{\xi} + V h_{\eta} - W = 0$$

$$\text{and } p = p_a \text{ on } \zeta = h$$

그 이외에 특별히 명시되지 않은 경계는 zero gradient 조건을 사용 하였다.

2.4 난류 모형

본 계산에서 사용된 난류 모형은 Baldwin-Lomax 에 의한 0-방정식 대수모형이다. 항공분야에서 주로 많이 사용되는데 선체 주위의 난류를 생성하기 위한 Cebeci-Smith 의 모형에서 비롯된 것이다. 2중 층의 모형으로 선체표면에 가까운 영역에서는 와류, 선체표면의 거리 및 레이놀즈수 등의 함수이고, 바깥 영역에는 경험식에 의한 난류 계수의 생성 방법이다.

선체 표면에 가까운 영역에서는

$$\nu_t = l^2 |\omega| \quad (14)$$

여기서

$$l = kn[1 - \exp(-n^+/A^+)]$$

$$n^+ = nR_c \sqrt{r_w} \quad (15)$$

위에서 ω 는 와류이고 n 은 선체표면으로 부터의 법선 거리이다.

바깥 영역에는 다음의 식을 사용한다.

$$\nu_t = KC_{cp} F_{k\ell b} n_{max} F_{max} \quad (16)$$

또는

$$\nu_t = KC_{cp} F_{k\ell b} C_{wk} U_{diff}^2 \frac{n_{max}}{F_{max}} \quad (17)$$

여기서 $K=0.0168$, $C_{cp}=1.6$, $C_{wk}=0.25$ 이고 (16)과 (17)식 중에서 작은 값을 사용한다. F_{max} 과 n_{max} 은 다음 함수에 의해 결정하였다.

$$F = n|\omega|[1 - \exp(-n^+/A^+)] \quad (18)$$

F_{max} 는 속도 분포내에서 F 의 최대값이고 n_{max} 는 그 점에서 n 의 값이다. U_{diff} 는 최대 속도와 최소속도의 차이이다.

$$F_{Kleb} = \frac{1}{1 + 5.5(C_{Kleb})^{1/3}/n_{max}} \quad (19)$$

여기서 U_{min} 은 wake 영역을 제외하고는 영
으로 놓았다. 중간인자인 F_{Kleb} 는

$$U_{d,ff} = U_{max} - U_{min} \quad (20)$$

여기서 $C_{Kleb}=0.3$ 으로 놓았다.

3. 계산 결과 및 검토

3.1 계산 조건

음해법을 3차원 계산에 적용시키기 위해서
수학적인 선형인 Wigley 모형을 택하였다.
계산에 수행한 격자 시스템은 결과 비교를
위해서 Euler explicit 법의 것과 동일한 H형
태의 것으로 택하였다. 또한 계산 영역 및
최소 벽간격, 격자수도 모두 동일한 조건 하
에서 계산을 수행하였다. 격자는 $74 \times 29 \times$
 10 를 사용했고, 영역은 $-0.7 \leq x/l \leq 1.5$, $y/l \leq$
 0.5 , 깊이 방향으로 $-0.1745 \leq z \leq 0$ 로 했
다. 계산은 좌우 대칭으로 가정해서 half
domain에서만 수행하였고 초기 조건으로는
압력 및 속도가 zero 상태에서부터 가속되게끔
하였다. 계산의 정확성을 비교하기 위해서
Reynolds 수는 10^6 에서 했고 Froude 수는
 0.25 , 0.289 및 0.316 에서 수행하였다. 수치
계산의 시간 간격은 IAF 법에서는 0.002 를
사용하였고 Euler explicit 법에서는 0.0005 로
서 결과적으로 4배로 확대하여 수행하였다.

3.2 계산 결과 및 검토

Fig.1은 Wigley 모형을 가지고 IAF 법을 사
용하여 계산한 것으로 Froude 수 0.316 에서
의 자유표면 파고 등고선이다. 시간에 따른

자유표면의 형성 과정을 나타내는데 무차원
시간 $t=3.0$ 부근에서 거의 수렴이 된 것으로
나타났다. 이것은 마찰저항 및 압력저항 계
수를 계산하여서 확인될 수 있었다. Fig.2는
두 방법의 저항 계수를 비교한 것인데 약간
의 차이를 보이고 있다. 같은 Reynolds 수
에서 Schoenherr 마찰 저항 계수와 비교할
경우에는 IAF 법이 오히려 잘 맞았으나 압
력저항에는 두 방법 모두 약간의 차이를 보
이고 있다. Fig.3은 계산된 파고의 정확성을
검토하기 위하여 IAF 법의 결과와 Euler
explicit 및 실험치와 비교한 것이다.
Froude 수가 0.289 에서 음해법의 계산 결과
와 양해법의 결과를 비교해 볼 때 선수파 및
선미파 모두 유사한 결과를 보여주고 있고,
실험치와도 비교되었다. 실험 결과는
Reynolds 수가 일치하지 않기 때문에 정량
적인 비교가 어렵지만 phase 및 파고의 높
낮이가 정성적으로 타당성이 있는 것으로 나
타났다. Fig.4는 Froude 수가 0.25 의 계산
결과를 시간 흐름에 따라 보여준 것이다.
선수미 파고가 뚜렷이 보여지고 있다. Fig.5
는 횡단면에서의 속도 분포를 나타낸 것이
다. AP 부근에서 vortical 운동이 뚜렷이 나
타나고 있다. 점성유동의 영역인 선미 부근
에서 속도 분포를 정확히 계산하는 것은 중
요한 과제로 있지만 본 계산에서는 사용된
격자가 복잡한 유체현상을 완전히 포착할 수
있도록 조밀하지 못하고 또 벽법칙의 적용
등 선미 부근에서 불명확한 요소들이 상당히
내재해 있다. 압력저항 계수가 explicit 법과
차이가 나는 것도 근본적인 원인으로 선미
부분의 모호한 요소들이 원인이 되는 것 같
다. Fig.6은 자유표면상의 속도 분포인데 벽
법칙을 사용하였기 때문에 explicit 법의 결
과와 별 차이를 보이지 않는다.

위의 여러 계산 결과들을 고려해 볼 때 IAF
법이 explicit 법 보다도 정성적으로 결과 나

빠지 않음을 알 수 있다. 그러나 계산 scheme 상 음해법은 unconditionally stable 하기 때문에 수치 계산상 시간 간격을 4배로 크게할 수 있었고 이에 따른 결과로 소요되는 계산 시간이 50% 이상 절감될 수 있었다. 이것은 설계상 실선의 높은 Reynolds 수에서 Navier-Stokes 방정식을 풀 때 소요되는 막대한 CPU를 고려할 때 상당한 결과로 생각된다.

4. 결론

- (1) 3차원 Navier-Stokes 방정식을 IAF 법을 적용하여 수치 계산하였다. 적용 대상 선형으로 Wigley 모형을 선정하여 자유표면의 파고 형성 및 속도 분포 등을 계산한 후 기존의 Euler explicit 법 및 실험 결과와 비교하였다.
- (2) 본 연구에서 개발한 IAF 법을 적용한 결과 수치적인 안정성과 수렴도의 개선이 있었고 해의 정확성도 다른 방법 보다 뒤떨어지지 않았다. 수치 처리에서 계산 시간 간격을 확대할 수 있었기 때문에 계산 시간이 50% 이상 절감되었다.
- (3) 본 연구의 방법이 선미와 같은 복잡한 선형에 적용될 경우 점성유동장의 계산에 소요되는 막대한 비용 및 시간을 절감시킬 수 있으며 이것은 선형 설계에 큰 도움을 주게 될 것이다.

참고문헌

- [1] Beam, R.M. and Warming, R.F., "An Implicit Factored Scheme for the

Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA Journal Vol.16, No.4, pp.393-402, April 1978.

- [2] Shang, J.S., "Numerical Simulation of Wing-Fuselage Aerodynamic Interaction", AIAA Journal, Vol.22, No.10, pp.1345-1353, Oct. 1984.
- [3] Shang, J.S., Hankey, W.L. and Petty J.S., "Three Dimensional Supersonic Interacting Turbulent Flow Along a Corner", AIAA Journal, Vol.17, No.7, pp.706-713, Article No.78-1210.
- [4] Shang, J.S., Hankey W.L., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for a Three-Dimensional Corner", AIAA Journal, Vol.15, No.11, pp.1575-1582, Nov.1977.
- [5] Kohara, S., Mori, K. and Doi, Y., "On Improvements in Efficiency for Finite Differential Calculation of Free-Surface Waves", Second Symposium on Numerical Fluid Dynamics, pp.619-622, Tokyo, 1988.
- [6] Kwag, S.H., Mori, K. and Shin, M., "Numerical Computation of 3-D Free Surface Flows by N-S Solver and Detection of Sub-Breaking", Jour. Soc. Naval Arch of Japan, Vol.166, pp.9-16, 1989.

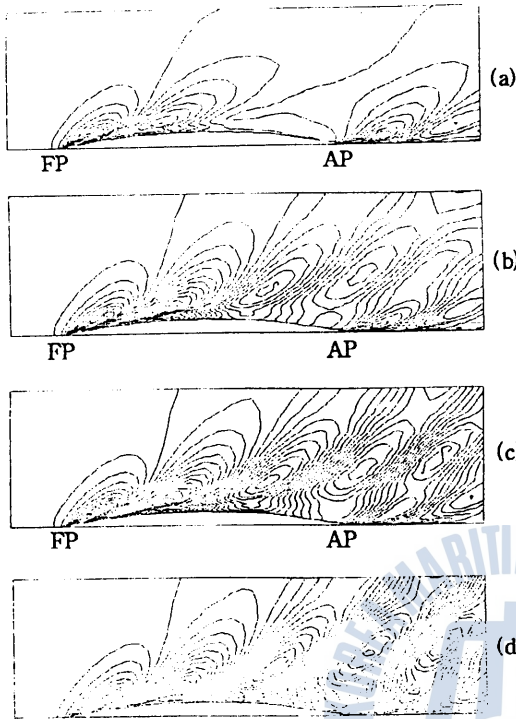


Fig.1 Time Evolution of Free Surface Contour at $Fn=0.316$ (a) $t=1.0$ (b) $t=2.0$ (c) $t=2.5$ (d) $t=3.0$

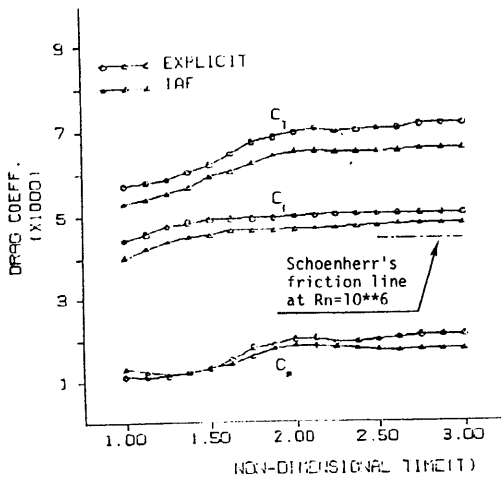


Fig.2 Calculated Drag Coefficients at $Fn=0.316$

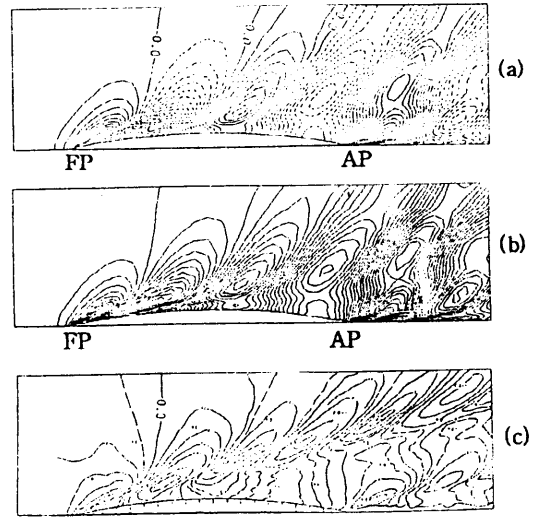


Fig.3 Free Surface Wave Contour at $Fn=0.289$ (a) explicit (b) implicit (c) experiments

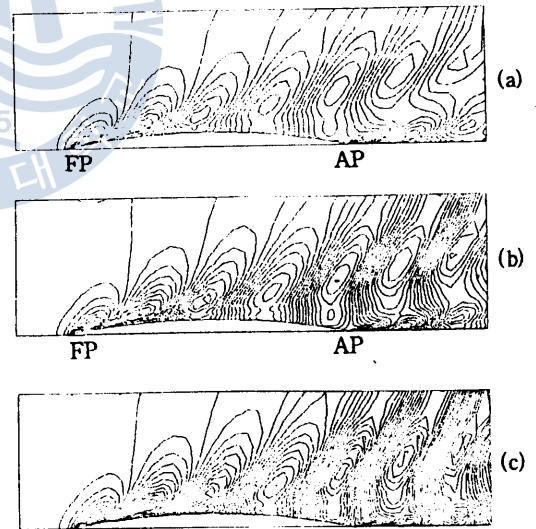


Fig.4 Free Surface Wave Contour at $Fn=0.25$ (a) $t=1.0$ (b) $t=2.0$ (c) $t=3.0$

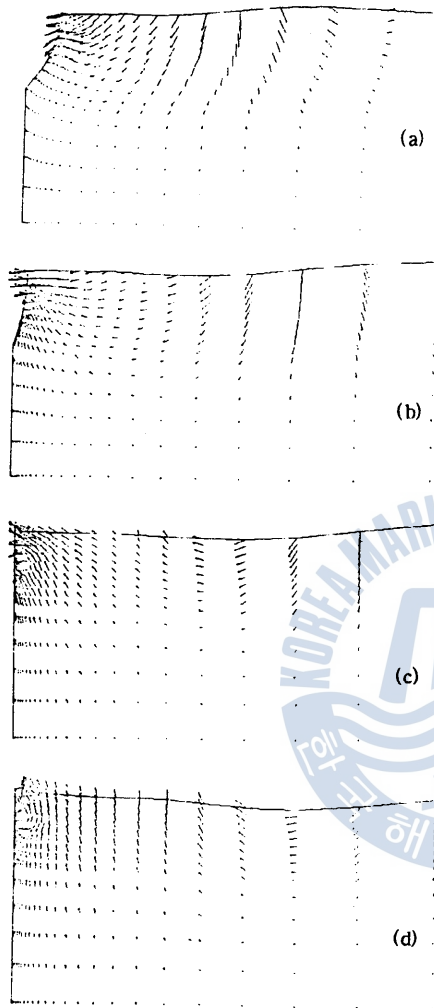


Fig.5 Velocity Vectors at Longitudinal sections

- (a) $x/L = 0.84$ (b) $x/L = 0.94$
(c) $x/L = 1.00$ (d) $x/L = 1.06$

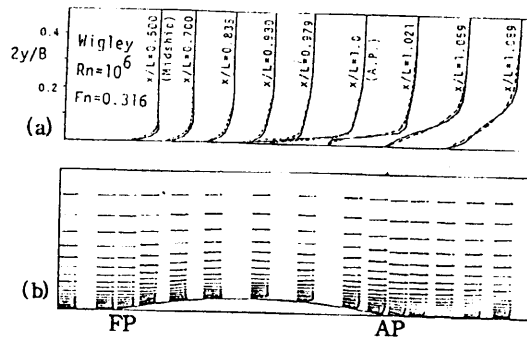


Fig.6 (a) Velocity Profile around Hull Surface

(——— :explicit, - - - - :implicit)

(b) Velocity Vectors on Free Surface

at $Fn=0.316$