

Hypocycloid 齒車裝置에서 轉位內齒車의 물림 特性

閔 右 泓

On Meshing Characteristics for Profile Shifted Involute Gear

Min Woo-Hong

〈目 次〉

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. 序 言 | 5. 干涉限界 線圖 |
| 2. 轉位內齒車의 물림方程式 | 6. 轉位內齒車의 물림효율 |
| 3. Involute 干涉限界 | 7. 물림효율 線圖 |
| 4. Trochoid 干涉限界 | 8. 結 言 |

Abstract

Compared with the external gears for reduction gears, the internal involute gear for hypocycloid reduction gears has many advantages: the short center distance; the little tooth stress; the natural guard over meshing gear teeth; and the good formation of oil film between gear teeth.

However, in designing the internal gear in hypocycloid gears with a high gear ratio the interferences have to be duly checked between two meshing teeth. Then, the profile shifted involute internal gear is considered to have flexibilities on interferences and to bring lowering on efficiency.

In this paper, the limit of interferences and the formulas of efficiency for profile shifted involute internal gear are derived geometrically and diagramatized for the reference of gear design.

1. 序 言

Hypocycloid 減速齒車는 다른 齒車減速裝置에 比하여 여러가지 利點을 가지고 있다. 즉, 小形 輕量으로 큰 減速比를 얻을 수 있고, 適當한 機構를 利用하면 入力軸과 出力軸을 同一 直線上에 配列할 수 있고, 齒面接觸이 凸面과 凹面이기 때문에 齒面に 생기는 應力이 적고, 또한 맞물리는 齒面

의 回轉方向이 같아 윤활유의 押出作用이 일어나지 않는 등이다.

이러한 利点中에서 큰 減速比를 얻기 위해서는 外接齒車와는 반대로 서로 맞물리는 齒車의 齒數差를 될수록 적게 하여야 한다. 그러나 Hypocycloid 齒車를 구성하는 內齒車와 pinion의 齒數差를 적게 하면 서로 맞물리는 齒形間에 여러가지 干涉이 일어나고, 또 이를 피하기 위해 轉位齒車를 사용하면 물림효율이 심히 저하 된다고 생각되어 왔다.¹⁾

이點 標準內齒車에 대해서는 많은 設計資料가 發表되어 있으나,^{2),3)} 齒車設計에 融通性이 있는 轉位內齒車에 대해서는 干涉條件이 갖는 複雜性 때문에 별다른 研究結果가 發表되어 있지 않다.

따라서 本稿에서는 轉位 involute 內齒車의 맞물림에서 생기는 involute干涉과 trochoid干涉 및 물림효율에 대한 理論的 解析을 하였고, 또한 精密한 數值計算에 의하여 干涉限界線圖와 효율線圖를 作成하여 그 特性을 檢討 考察하였다.

記 號

α_c : 工具壓力角

α_b : 물림壓力角

α_{k1}, α_{k2} : pinion과 內齒車의 이끝 壓力角

m : module

z_1, z_2 : pinion과 內齒車의 齒數

x_1, x_2 : pinion과 內齒車의 轉位係數

a_0 : 標準 中心 距離

a : 中心 距離

y : 中心距離 增加係數

d_{g1}, d_{g2} : pinion과 內齒車의 基礎圓直徑

r_{g1}, r_{g2} : pinion과 內齒車의 基礎圓半徑

d_{k1}, d_{k2} : pinion과 內齒車의 이끝圓直徑

r_{k1}, r_{k2} : pinion과 內齒車의 이끝圓半徑

r_1, r_2 : pinion과 內齒車의 pitch圓半徑

ω_1, ω_2 : pinion과 內齒車의 回轉角速度

i : 齒數比

h_k : 標準齒의 이끝 높이를 m 로 나눈값

s_n : 法線 backlash

t_n : 法線 pitch

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$: 接近 물림율과 退去 물림율

η : 물림 효율

2. 轉位內齒車의 물림 方程式

그림 1에서 pinion의 中心을 O_1 , 內齒車의 中心을 O_2 라 하고, 이 두 齒車의 기초원에 공통접선을 그으면 이 직선이 involute內齒車의 作用線이 되고, 이 作用線과 中心線 O_1O_2 의 延長線과의 交点 P 가 pitch點이 된다. 또한 O_1, O_2 에서 作用線에 내린 수선의 足を I_1, I_2 라하면 I_1, I_2 는 干涉點이 되고, 접촉점의 軌迹은 I_1 의 右側에만 존재하게 되어, 內齒車와 pinion의 물림方程式은 다음과 같이 된다.⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \text{inv}\alpha_b &= \text{inv}\alpha_c + 2 \tan \alpha_c \cdot \frac{x_2 - x_1 - \frac{1}{2 \sin \alpha_c} \left(\frac{S_n}{m} \right)}{z_2 - z_1} \\ a &= a_0 + ym \\ a_0 &= \frac{z_2 - z_1}{2} m \\ y &= \frac{z_2 - z_1}{2} \left(\frac{\cos \alpha_c}{\cos \alpha_b} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

또한 pinion과 內齒車의 이끝원 直徑은 DIN方式에 따르면⁵⁾ 다음과 같이 된다.

$$d_{g1} = mz_1 \cos \alpha_c \dots \dots \dots (2)$$

$$d_{k1} = (z_1 + 2h_k + 2x_1)m \dots \dots \dots (3)$$

$$\cos \alpha_{k1} = \frac{z_1 \cos \alpha_c}{z_1 + 2h_k + 2x_1} \dots \dots \dots (4)$$

$$d_{g2} = mz_2 \cos \alpha_c \dots \dots \dots (5)$$

$$d_{k2} = (z_2 - 2h_k + 2x_2)m \dots \dots \dots (6)$$

$$\cos \alpha_{k2} = \frac{z_2 \cos \alpha_c}{z_2 - 2h_k + 2x_2} \dots \dots \dots (7)$$

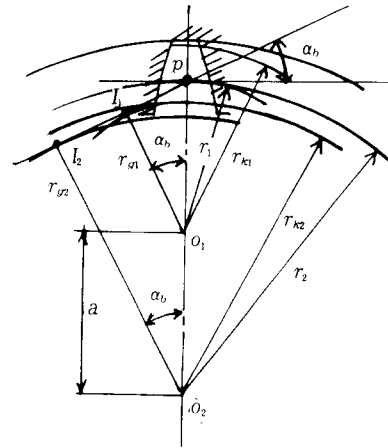


그림 1.

3. Involute 干涉限界

그림 2에서 內齒車의 이끝원과 作用線과의 交點을 B라 하면, B點이 干涉點 I₁의 左側에 오면 內齒車의 이끝이 그리는 trochoid曲線이 pinion 이뿌리의 involute曲線에 파고 들어 involute干涉을 일으킨다.

이와 같은 干涉이 일어나지 않게 하기 위한 條件은 PI₁ ≥ PB 이며⁶⁾

$$PI_1 = r_g \tan \alpha_b, \quad PB = r_{g2} (\tan \alpha_b - \tan \alpha_{k2}) \text{ 이므로}$$

$$\frac{z_1}{z_2} \geq 1 - \frac{\tan \alpha_{k2}}{\tan \alpha_b} \dots \dots \dots (8)$$

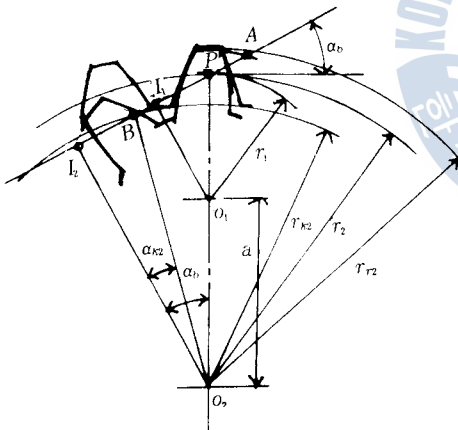


그림 2.

4. Trochoid 干涉限界

그림 3에서 pinion과 內齒車의 이끝원 交點을 B라 하고, pinion의 이끝이 B點에 왔을 때의 pinion의 回轉角을 θ라 하고, 이때 pinion의 치형곡선과 內齒車의 치형곡선의 가상 연장선의 交點을 Q라 하였을 때, 그림에서와 같이 A點에서 물림이 끝난 pinion이 다시 回轉하여 內齒車의 이끝에 접근하여 內齒車의 齒形에 파고드는 trochoid干涉이 일어나는 경우가 있다.

이러한 干涉이 일어나지 않게 하기 위한 조건은 pinion 이끝이 B點에 왔을 때 內齒車의 이끝이 B點 보다 앞서 있어야 한다. 즉, 그림에서

$$\cos \{ \theta - (\text{inv} \alpha_{k1} - \text{inv} \alpha_b) \} = \frac{r_{k2}^2 - r_{k1}^2 - a^2}{2ar_{k1}} \dots \dots \dots (9)$$

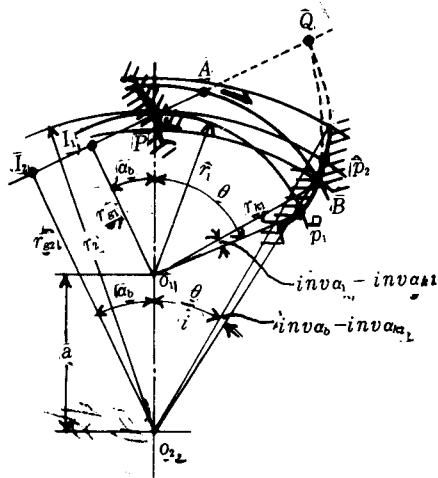


그림 3.

$$\cos \angle P O_2 B = \frac{a^2 + r_{k2}^2 - r_{k1}^2}{2ar_{k2}} \dots\dots\dots(10)$$

이 고, pinion이 θ 角 만큼 回轉 할 사이에 內齒車는 $\theta \times \frac{z_1}{z_2} = \frac{\theta}{i}$ 만큼 回轉하므로 B点에서 trochoid 干涉을 일으키지 않게 하기 위한 條件은

$$\frac{\theta}{i} + (\text{inv} \alpha_s - \text{inv} \alpha_{k2}) \geq \angle P O_2 B$$

$$\text{즉, } \frac{\theta}{i} + (\text{inv} \alpha_s - \text{inv} \alpha_{k2}) - \cos^{-1} \frac{a^2 + r_{k2}^2 - r_{k1}^2}{2ar_{k2}} \geq 0 \dots\dots\dots(11)$$

5. 干涉限界線圖

표 1

	pinion	內齒車
치 수	$z_1 = 1 \sim 100$	$z_2 = 1 \sim 100$
工具壓力角	$\alpha_c = 20^\circ$	$\alpha_c = 20^\circ$
轉位係數	$x_1 = 0, -1.0$	$x_2 = 0.0 \sim 1.0$
h_k	1.0	1.0

표1에 대한 involute 干涉限界를 식 (1), (7) 및 (8)를 이용 試行法에 의하여 구하고, trochoid 干涉限界를 식(1),(3),(4),(6),(9) 및 (11)를 이용 試行法에 의하여 구해서 그림4 및 그림 5와 같은 干涉限界線圖를 얻었다.

이 線圖에서 轉位 內齒車의 干涉特性을 考察하여 보면, involute干涉의 안전領域은 曲線의 右側 範圍이고, trochoid干涉의 안전領域은 曲

線의 上部範圍이다.

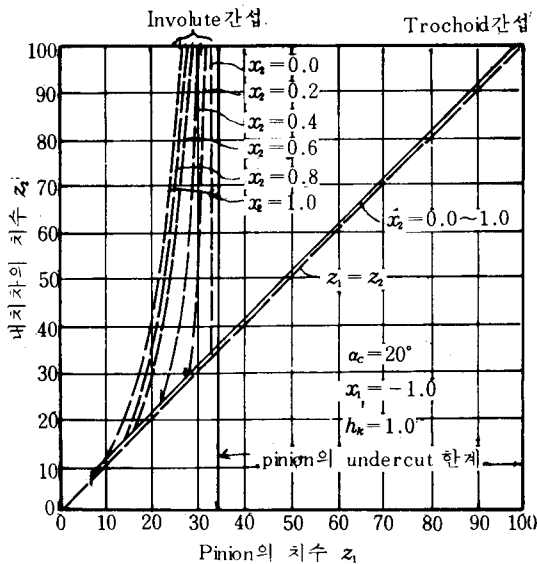


그림 4.

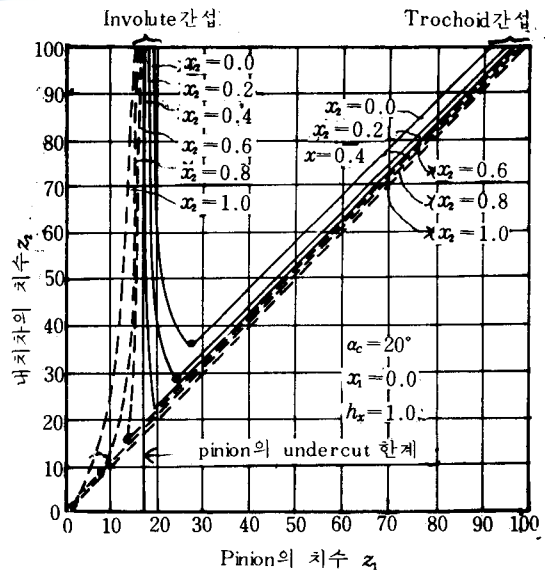


그림 5.

또, ① involute干涉領域은 內齒車나 pinion의 轉位係數가 1.0에 接近할 수록 좁아진다. ② trochoid干涉領域은 內齒車의 轉位係數가 -1.0에 接近할 수록 좁아지고, 한편 pinion의 轉位係數는 -1.0에 接近할 수록 內齒車의 轉位係數變化에 대한 干涉領域의 변동이 작아진다.

6. 轉位內齒車의 물림 효율

(1) 물림壓力角이 pinion의 이끝 壓力角 보다 적을 경우

일반적인 內齒車의 경우로, 그림6에서 pinion 1를 驅動齒車, 內齒車 2를 從動齒車라 하고, P를 pitch点이라 하면 齒의 임의접점 Q에서의 미끄럼速度 v_s 는 $v_s = PQ(\omega_1 + \omega_2)$, 또 P_n 를 齒面法線荷重, μ 를 마찰계수, $PQ=c$ 라 하면 dt시간 중의 마찰일량 dA는

$$dA = P_n \mu c (\omega_1 + \omega_2) dt \text{ 이며.}$$

여기서 dt시간 내의 접점의 이동거리를 de라 하면 dA는 $dA = P_n \mu \left(\frac{1}{r_{s1}} - \frac{1}{r_{s2}} \right) ede$ 가 된다. 물림율이 $1 < \epsilon < 2$ 에서는 접점궤적이 그림 7과 같이 되고 이때 한쌍의 이가 물리는 기간중의 마찰일량 A는

$$A = P_n \mu \pi t_e \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)$$

가 된다.

한쌍의 이가 하는 전동일량을 A_D 라 하면,

$$A_D = P_n t_e \text{ 이므로 물림효율 } \eta \text{는 } \eta = \frac{A_D - A}{A_D} \text{ 이며}$$

이식에서 물림율이 $1 < \epsilon < 2$ 의 경우에 물림효율 η 는

$$\eta = 1 - \mu \pi \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \times (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) \dots\dots\dots (12)$$

물림율이 $2 < \epsilon < 3$ 의 경우는

$$\eta = 1 - \mu \pi \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \left(\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 3 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{3} \right) \dots\dots\dots (13)$$

또한, 이끝원 직경을 DIN方式 $\alpha_{k1} = (z_1 + 2 + 2x_1)m$, $d_{k2} = (z_2 - 2 + 2x_2)m$ 로 하면 식(12), (13)중 ϵ_1 , ϵ_2 는 다음식에서 구하여 진다.

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_{k1} &= \frac{z_1 \cos \alpha_c}{z_1 + 2 + 2x_1} \\ \cos \alpha_{k2} &= \frac{z_2 \cos \alpha_c}{z_2 - 2 + 2x_2} \\ \text{inv } \alpha_b &= 2 \tan \alpha_c \frac{x_2 + x_1}{z_2 - z_1} + \tan \alpha_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

또는, $\tan \alpha_b = \tan \alpha_c + \frac{4(x_2 - x_1)}{\sin 2\alpha_c (z_2 - z_1)}$

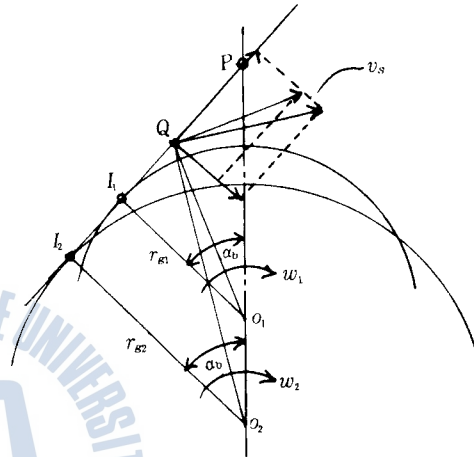


그림 6.

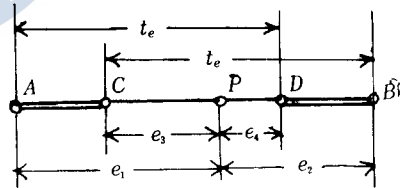


그림 7.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{z_2}{2\pi} (\tan \alpha_b - \tan \alpha_{k2}) \\ \varepsilon_2 &= \frac{z_1}{2\pi} (\tan \alpha_{k1} - \tan \alpha_b) \end{aligned} \right\}$$

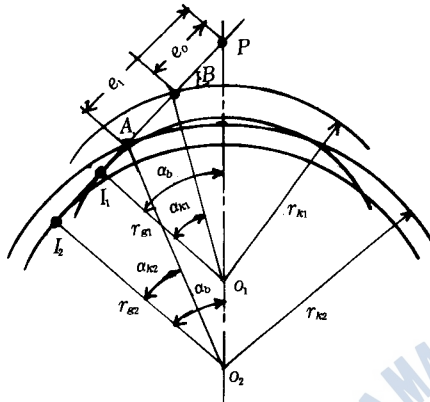


그림 8.

(2) 물림壓力角이 pinion의 이끝角力角 보다 큰 경우

이 경우는 큰 減速比를 얻기 위해 맞물리는 齒車의 齒數差를 적게 하였을때 trochoid干涉을 피하기 위하여 內齒車를 轉位한 경우로, 그림 8에 그 물림상태를 표시한다. 즉, 이때 물림壓力角 α_b 는 pinion의 이끝 壓力角 α_{k1} 보다 크게 되어 A점에서 물림이 시작하여 B점에서 끝나므로 pitch점의 한 편에서만 접촉이 이루어 진다. 그림 9는 물림율이 $1 < \varepsilon < 2$ 일때의 점접촉을 나타내며, 한 쌍의 이가 접촉중 하는 마찰일량 A는 $A = \pi P_n \mu \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) (e_0 + e_1)$ 이 된다.

이 경우도 한 쌍의 이가 하는 전동일량은 $A_D = P_n t_e$ 이므로 물림효율 η 는

$$\eta = 1 - \pi \mu \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \frac{e_0 + e_1}{t_e} \dots \dots \dots (15)$$

DIN 방식에 의한 이끝원 직경을 취하면 (15)식중 e_1/t_e 와 e_0/t_e 는 다음식에서 계산된다.

$$\cos \alpha_{k1} = \frac{z_1 \cos \alpha_c}{z_2 + 2 + 2x_1}$$

$$\cos \alpha_{k2} = \frac{z_2 \cos \alpha_c}{z_2 - 2 + 2x_2}$$

$$\text{inv } \alpha_b = \text{inv } \alpha_c + 2 \tan \alpha_c \frac{x_2 - x_1 - \frac{1}{2 \sin \alpha_c} \left(\frac{s_n}{m} \right)}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{e_1}{t_e} = \frac{z_2}{2\pi} (\tan \alpha_b - \tan \alpha_{k2})$$

$$\frac{e_2}{t_e} = \frac{z_1}{2\pi} (\tan \alpha_b - \tan \alpha_{k1})$$

$$\dots \dots \dots (16)$$

물림율이 $2 < \varepsilon < 3$ 의 경우는 점접촉이 그림 10과 같이 되고, 이때의 마찰일량 A는 같은 방식으로,

$$A = \pi P_n \mu \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) (e_0 + e_1)$$

가 되어 물림효율도 $1 < \varepsilon < 2$ 의 경우와 같게 된다.

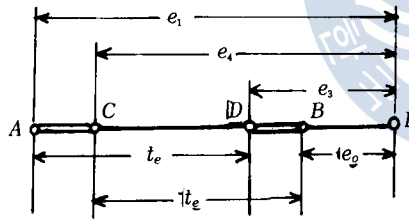


그림 9.

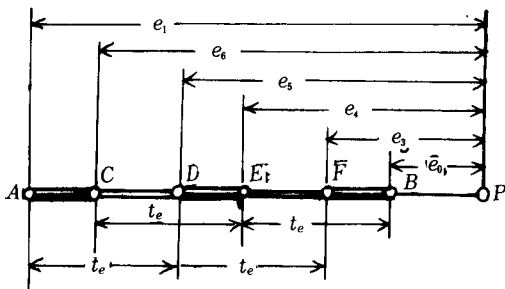


그림 10.

7. 물림효율 線圖

工具壓力角 $\alpha_c=20^\circ$, 마찰계수 $\mu=0.17$, 轉位係數 $x_1=x_2=0$ 즉, 標準齒車의 $z_1=20\sim100$, 齒數比 $i=1\sim10$ 에 대한 물림효율을 식 (12), (13), (14)을 이용하여 각각 구하고 이를 線圖化한 바 그림11를 얻었다.

또, 工具壓力角 $\alpha_c=20^\circ$, pinion의 齒數 $z_1=40$, 60, 80, $x_1=0$, 齒數差 1~8, x_2 는 trochoid 干涉을 피할 수 있는 표2, 표3, 표4와 같은 값을 취하여 식(15), (16)으로 물림효율을 구하여 본바 그림 12와 같은 線圖를 얻었다.

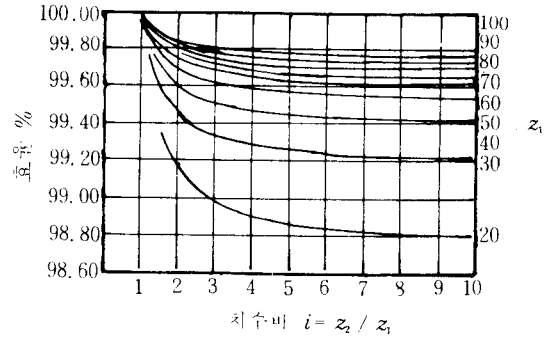


그림 11.

표 2

z_1	40							
x_1	0							
z_2	41	42	43	44	45	46	47	48
x_2	1.0	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0

표 3

z_1	60							
x_1	0							
z_2	61	62	63	64	65	66	67	68
x_2	1.0	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0

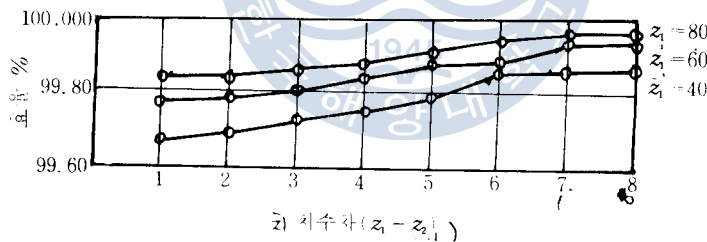


그림 12.

그림 11과 그림 12에서 轉位內齒車의 물림효율을 比較檢討하여 보면, 큰 速比에 요구되는 적은 齒數差에서도 물림효율은 별로 떨어지지 않으며, 干涉을 피하기 위한 轉位에서도 실용상 영향을 미칠 정도는 아니라는 것을 알 수 있다.

8. 結 言

큰 減速比의 hypocycloid 齒車裝置에서 요구되는 적은 齒數差의 內齒車에서 干涉條件을 피하기 위해서는 高壓力角의 低齒車와 轉位齒車를 생각 할수 있다. 이 중에서 高壓力角의 低齒車는 특별한 切削工具가 필요하다는 製作上 難點등이 있으나 轉位齒車는 壓力角 20° 나 14.5° 의 표준 pinion cutter로 製作이 용이하다는 利點이 있다.

이러한 견지에서 齒數差가 적은 轉位內齒車의 干涉限界와 물림효율의 檢討는 齒車設計에서 實用上 有用性을 갖는다고 생각된다. 그러나 보다 넓은 實用性을 갖기 위해서는 모든값의 轉位係數와 이에 따른 물림효율, 干涉限界 및 기타 물림特性까지도 포함된 綜合的인 檢討 考察이 필요하다고

생각된다.

參 考 文 獻

- 1) T. Sunaga: Planetary Reducers of Involute Internal Gear with Small Tooth Difference, JSME Proceedings of Semi International Symposium(gearing), 1967-9-6, p. 87
- 2) Buckingham: Manual of gear design, section 2, p. 38
- 3) 藤井康治 : 齒車の研究, 養賢堂, 東京, p. 364.
- 4) 中田 孝 : 轉位齒車, 誠文堂, 東京, 1971, p. 136.
- 5) 中田 孝 : 轉位齒車, 誠文堂, 東京, 1971, p. 136.
- 6) 野口 尚 : 機構學, 山海堂, 東京, 1936
- 7) 仙波正莊 : 齒車1卷, 日刊工業, p. 152.

