Fourier 級數를 利用한 不均一斷面보의 彈性曲線에 관한 研究

A Study on the Elastic Curves of Beams of Variable Cross Section Using Fourier Series.

지도교수 王之錫

李偉瑛· 金現珠

目 次

Abstract

The integral of differential equation for the deflection of beam of variable cross section is possible with elementary function in some particular cases and is impossible in general cases. In this paper, we obtained solutions of differential equation about deflections of beams of variable cross section using Fourier Series. We also carried out experiment measuring deflections of simple beam and cantilever beam of variable cross section with dial gages for the various concentrated load and compared them with calculated results

The conclusion are as follows.

(1) If the solution of ordinary differential equation is exist at certain bound, we can solve it and represent the solutions by using Fourier Series.

(2) The formulae of elastic curves using Fourier Series are as follows.

$$y = \frac{r_0}{2}(x^2 - lx) + 2\sum_{m=1}^{\infty} r_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \left\{1 + \frac{(-1)^m - 1}{l}x - \cos\frac{m\pi}{l}x\right\}$$

simple beam

$$y = \frac{r_0}{2}x^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} r_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \left(1 - \cos\frac{m\pi}{l}x\right)$$

cantilever beam

(3) The theoretical deflections and practical deflections are almost equal and the mean relative error is 1.5%.

Ⅰ. 序 論

不均一斷面보의 처짐에 관한 微分方程式은 特殊한 경우에는 初等函數로서 積分이 可能하지만 一般的으로 初等函數로서 積分이 안되는 것이 通例이다. 이 경우 보의 처짐을 求하기 위하여서는 주어진 境界條件에 対하여 有限差分法을 利用한 數値解析에 依存하게 되는데 수치해석은 그 方法上의 問題 때문에 경계점으로 부터 멀리 떨어질수록 그 誤差가 커지는 결점을 안고있다.

本研究에서는 Fourier 級數를 利用하여 不均一斷面보의 처짐에 관한 微分方程式의 解를 求하는 方法을 제시하였고 靜定보에 대하여 彈性曲線의 式을 誘導하였다. 또한 不均一斷面보를 실제로 製作하고 荷重을 加하여 처짐을 測定하고 처짐曲線을 求하였다. 荷重은 鍾와 용수철 저울을 利用하여 一定値 加하였고 처짐은 다이얼 게이지에 依하여 測定하였다. 이렇게 하여 測定된 처짐曲線과 本研究에서 誘導한 公式에 依한 처짐曲線을 비교하였다.

Ⅱ. 函數의 Fourier 級數展開

어떤 函數 $F(x)$가 区間 $0 \leq x \leq l$ 에서 定義되고 連續이라 하면 이 函數를 Fourier 級數로서 表示할 수가 있는데 cosine 項만으로 表示하면 다음과 같다.

$$F(x) = a_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi}{l}x \qquad (1)$$

여기서 $a_m = \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{m\pi}{l}x\,dx$, $m = 0, 1, 2, \cdots \infty$

또한 $F(x)$를 sine 項으로만 表示하면

$$F(x) = 2\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi}{l}x \qquad (2)$$

여기서 $b_m = \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx$, $m=1,2,3\cdots\infty$

이다。

한편 cosine 項과 sine 項으로 $F(x)$를 表示하면 다음과 같다.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x + b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad (3)$$

Ⅲ. 彈性曲線式의 誘導

보의 처짐에 관한 微分方程式은 다음과 같다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4)$$

여기서 M은 굽힘모멘트이고 E는 彈性係數이며, I는 斷面二次모멘트이다。 均一斷面보인 경우에는 I는 일정하고 따라서 式(4)는 比較的 쉽게 積分된다. 그러나 不均一斷面보에서는 I가 일정하지 않고 x의 함수가 되고 式(4)의 解가 쉽게 구하여 지지 않는 경우가 많다。 本硏究에서는 式(4)의 右邊을 Fourier 級數로서 展開함으로서 彈性曲線式을 얻는 方法을 提示한다.

式(4)의 右邊을 Fourier의 cosine 級數로 展開하면

$$\frac{M}{EI} = \gamma_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m\cos\frac{m\pi}{l}x \quad (5)$$

여기서 l은 보의 길이이며

$$\gamma_m = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{M}{EI}\cos\frac{m\pi}{l}x\,dx, \quad m=0,1,2,3\cdots\infty \quad (6)$$

이다. 式(5)를 式(4)에 代入하면

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m\cos\frac{m\pi}{l}x \quad (7)$$

式 (7)을 積分하면 처짐角과 처짐을 求할 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \gamma_0 x + 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \frac{l}{m\pi} \sin\frac{m\pi}{l}x + C_1 \qquad (8)$$

$$y = \frac{\gamma_0}{2}x^2 - 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \cos\frac{m\pi}{l}x + C_1 x + C_2 \qquad (9)$$

Fourier 係數 γ_0, γ_m 는 式 (6)으로부터 정하여지며 C_1, C_2 는 積分常數로서 境界條件으로부터 다음과 같이 정하여진다.

1) 單純보

Fig 1과 같이 길이가 l인 單純보의 경우에 境界條件은 $x=0$ 일때 $y=0$, 및 $x=l$일때 $y=0$이다 이 條件을 式(9)에 代入하여 積分常數 C_1 및 C_2를 求하면

$$C_1 = 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \frac{l}{m^2\pi^2}\left\{(-1)^m - 1\right\} - \frac{\gamma_0 l}{2}$$

$$C_2 = 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \qquad (10)$$

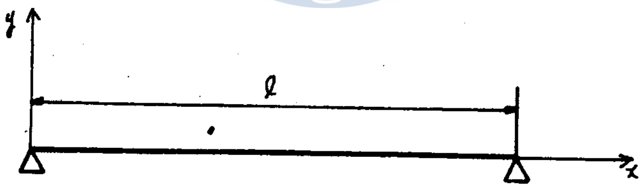

Fig 1. simple beam

式(10)을 式(8) 및 (9)에 代入함으로서 처짐角과 처짐 曲線은 다음과 같이 된다.

$$\frac{dy}{dx} = \gamma_0\left(x - \frac{l}{2}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \frac{l}{m\pi}\left\{\sin\frac{m\pi}{l}x + \frac{(-1)^m - 1}{m\pi}\right\} \qquad (11)$$

$$y = \frac{\gamma_0}{2}(x^2 - lx) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left\{1 + \frac{(-1)^m - 1}{l}x - \cos\frac{m\pi}{l}x\right\} \qquad (12)$$

2) 외팔보

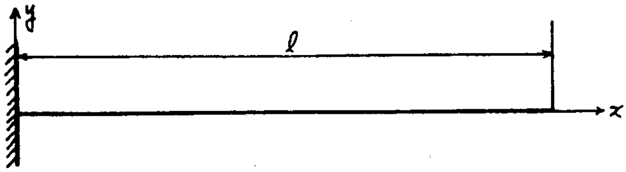

Fig 2 cantilever

Fig 2와 같이 길이가 l인 외팔보의 境界條件은 $x=0$일때 $\frac{dy}{dx}=0$ 및 $x=0$ 일때 $y=0$ 이다 이 條件을 式(8) 및 (9)에 代入하여 積分常數 C_1 및 C_2를 求하면

$$C_1=0 \quad , \quad C_2 = 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \tag{13}$$

따라서 처짐角과 처짐曲線은

$$\frac{dy}{dx} = \gamma_0 x + 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \cdot \frac{l}{m\pi} \sin\frac{m\pi}{l}x \tag{14}$$

$$y = \frac{\gamma_0}{2}x^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \left(1-\cos\frac{m\pi}{l}x\right) \tag{15}$$

Ⅳ. 實驗

前節에서 誘導한 보의 처짐曲線式을 檢討하기 위하여 不均一斷面 單純보와 외팔보를 만들고 集中荷重을 作用시켜 처짐을 測定하고, 前節의 처짐曲線式에 依한 計算値와 比較하였다. Fig 4는 試片의 形狀과 크기를 나타낸다. 單純보의 span은 500mm로 하였고 외팔보의 길이는 400mm로 하였다. 材料는 다같이 두께 5mm의 軟鋼板(SS-41)을 사용하였다. 荷重은 錘와 용수철 저울을 利用하여 加하였는데, 荷重의 크기뿐만 아니라 荷重의 作用点

도 변경시키면서 荷重을 걸어 2때마다 各点의 처짐을 다이알 게이지 (1/100 mm , 行程 10 mm) 로 測定하였다.
Fig 5 및 Fig 6은 各各 單純보및 외팔보의 처짐량 測定을 나타낸다. 荷重을 가하기전에 各 다이알 게이지를 零으로 마추어 놓고, 錘의 動的効果를 없애기 위해 조용히 荷重을 걸고 처짐을 測定하였다.

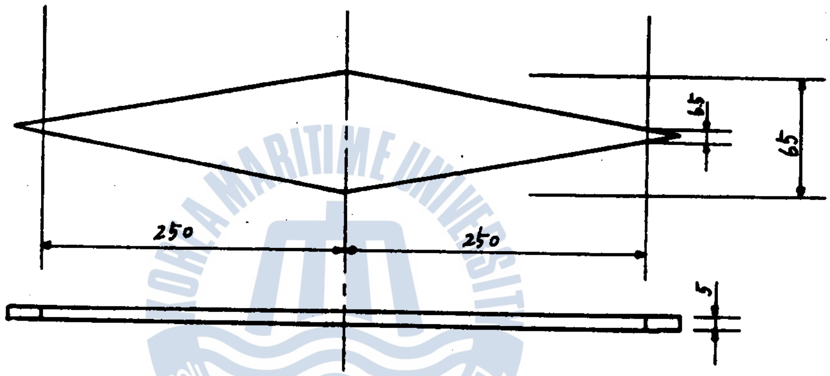

Fig 4-1 simple beam

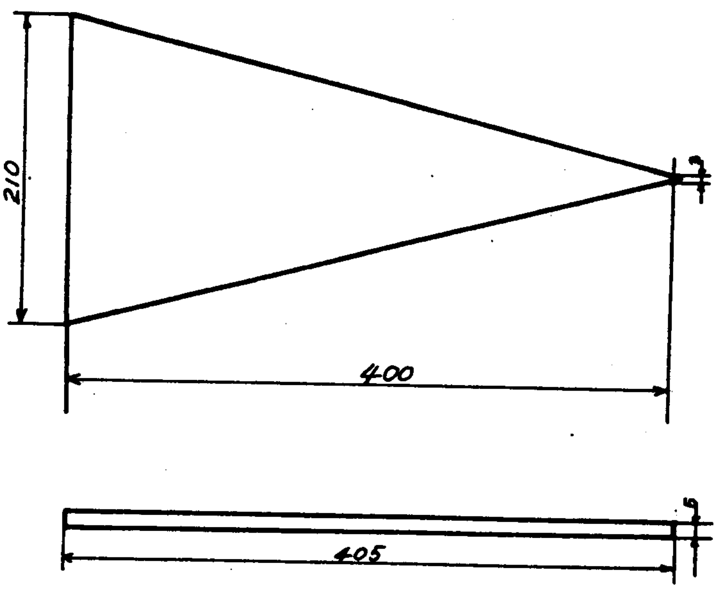

Fig 4-2 cantilever beam

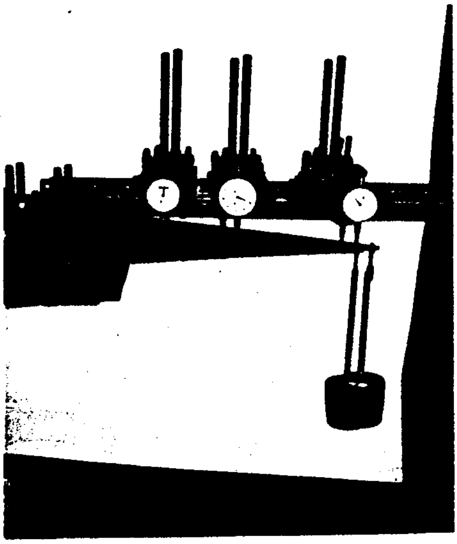

Fig 5
Deflection measurement
of simple beam

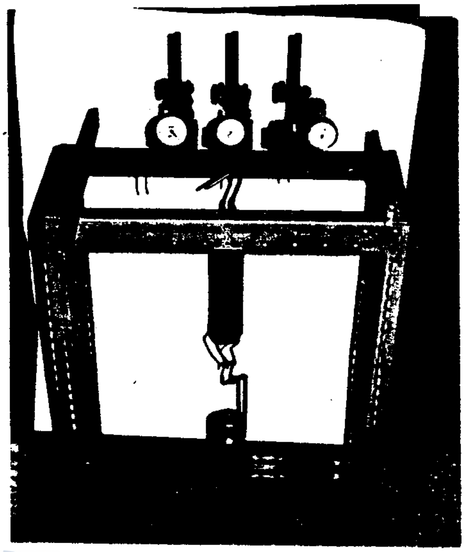

Fig 6.
Deflection measurement
of cantilever beam

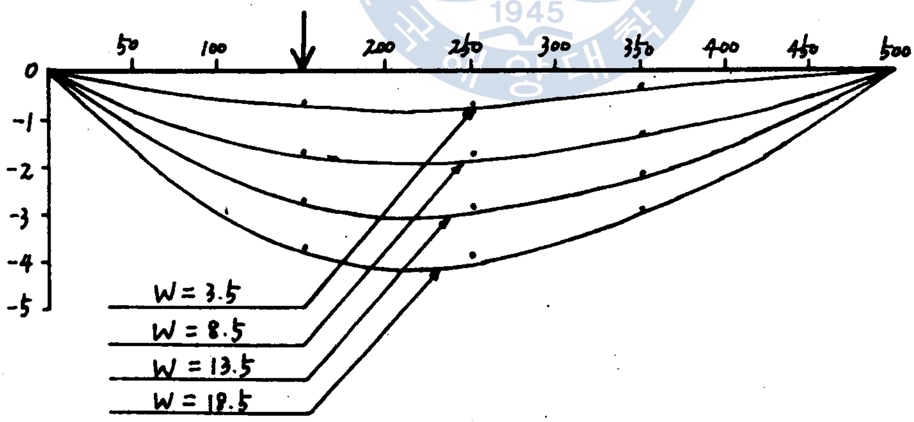

Fig 7. Deflections of simple beam for the various concentrated loads when the acting point of loads is 150 mm from left support.

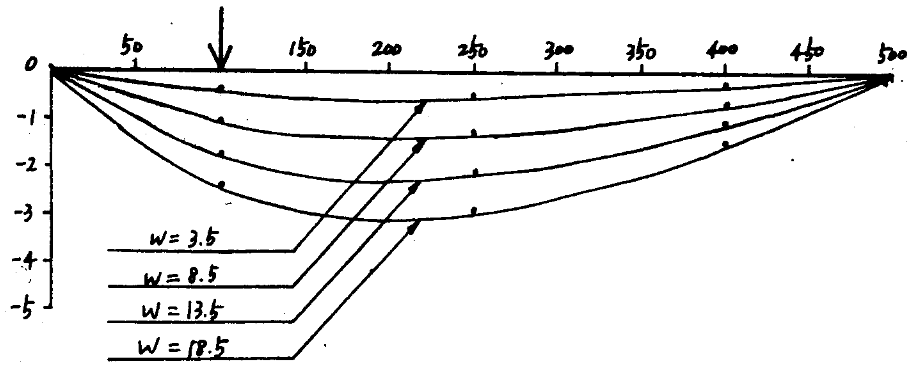

Fig 8 Deflections of simple beam for the various concentrated loads when the acting point of loads is 100mm from left support.

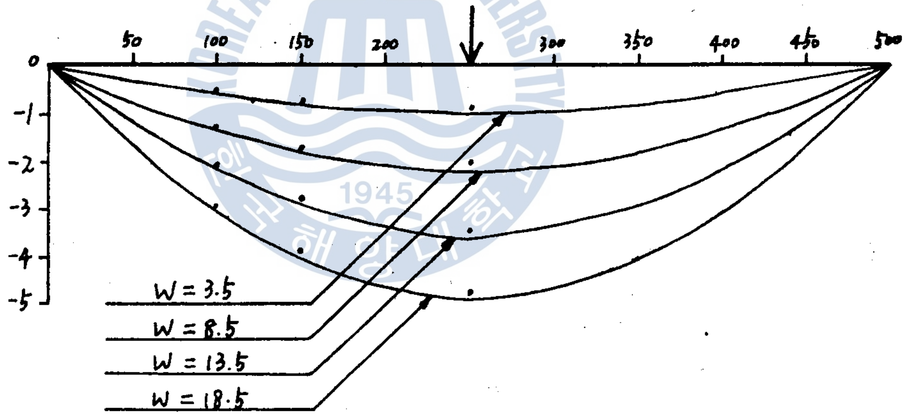

Fig 9 Deflections of simple beam for the various concentrated loads when the acting point of loads is 250mm from left support

Fig 7은 單純보에서 作用點이 左側支點으로 부터 150mm 일경우 여러 荷重에 依한 처짐의 實測値와 計算値를 나타낸다 Fig 8 및 Fig 9는 單純보에서 荷重의 作用點이 左側支點으로 부터 各各 100mm 및 250mm 일때 여러 荷重에 의한 처짐을 나타낸다

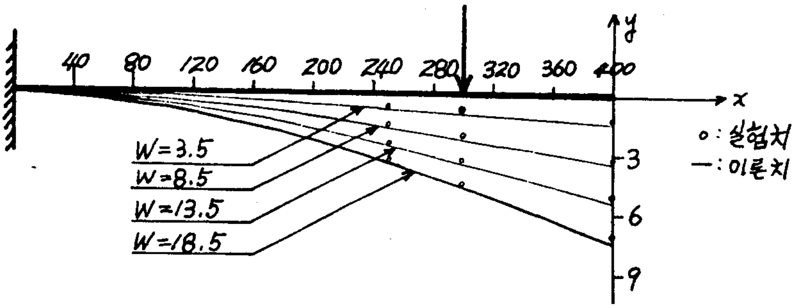

Fig 10. Deflections of cantilever beam for the various concentrated loads when the acting point of loads is 300 mm from fixed end

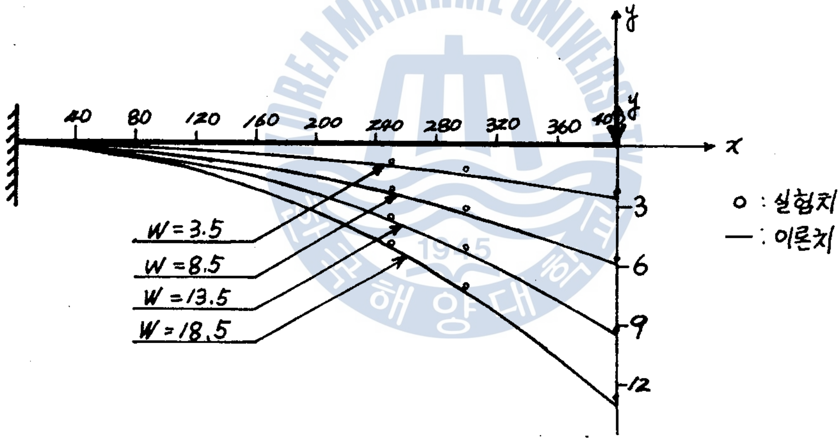

Fig 11 Deflections of cantilever beam for the various concentrated loads when the acting point of loads is 400 mm from fixed end.

Fig 10 및 Fig 11은 외팔보에서 荷重의 作用点이 固定端에서 各各 300 mm, 400 mm 일때 여러 荷重에 의한 처짐의 實測値와 計算値를 나타낸다.

그림들에서 보는 바와 같이 Fourier 級数를 応用하여 求한 처짐曲線式은 實際와 거의 一致하고 있음을 알수있다.

Ⅴ. 結 論

이상의 理論式과 實驗으로서 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 常微分方程式의 解가 어떤 区間에서 存在할때는 Fourier 級數를 利用함으로써 그 解를 求할수 있고 Fourier 級數로 표시할 수 있다

(2) Fourier 級數를 이용한 彈性曲線式은 다음과 같이 나타내어 진다

$$y = \frac{\gamma_0}{2}(x^2 - lx) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \left\{1 + \frac{(-1)^m - 1}{l}x - \cos\frac{m\pi}{l}x\right\}$$

······ simple beam

$$y = \frac{\gamma_0}{2}x^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \left(1 - \cos\frac{m\pi}{l}x\right)$$

······ cantilever beam

(3) Fourier 級數에 의한 計算値와 實測値는 잘 一致하였으며 本實驗에서는 평균 1.5%정도의 誤差가 있었다.

參考文献

(1). Ruel V. Churchill and James W. Brown, "Fourier Series and Boundary value problems", McGRAW-HILL

(2). C. Ray Wylie, " Advanced Engineering Mathematics" McGRAW-HILL

(3) J. W. Dally & W. F. Riley, " Experimental Stress Analysis."

(4) Timoshenko & Goodier, " Theory of Elasticity".