

Digital PID Controller를 가진 D.C. Motor의
速度制御系の 安定性에 関한 研究

指導教授 朴 進 吉

丁在鎬 金敬勝 盧錫弘 李奉基

A Study on Stability of D.C. Motor Speed
Control System with Digital
PID Controller.

차례

1. 머릿말
2. 制御系の 伝達函數
3. Z -Plane 에서의 安定性
4. 實驗 및 分析
5. 맺는말
6. 参考文献

NOMENCLATURE

$G_p(s)$:	overall transfer function
$G_{tg}(s)$:	transfer function of tachogenerator
$G_c(s)$:	" of SCR bridge circuit
$G_m(s)$:	" of DC motor
$G_h(s)$:	" of zero order holder
$G(z)$:	open loop transfer function
$D(z)$:	transfer function of digital controller
$F(z)$:	closed loop transfer function
z	:	variable of Z transform
r	:	reference input signal
c	:	output signal
e	:	error signal
e_1	:	input signal of digital controller
e_2	:	output signal of digital controller
K_p	:	gain of PID controller
K_c	:	total gain of controlled system
T_i	:	integral time of PID controller
T_d	:	derivative time of PID controller
T_c	:	time constant of DC motor
T	:	sampling time
L	:	inductance of motor
R	:	resistance of motor
N	:	rpm or sampling number
T_e	:	electrical time constant of motor
T_m	:	mechanical time constant of motor
J	:	moment of inertia
T_l	:	load torque
T_e	:	electrical torque of motor

1. 머릿말

最近의 自動制御에는 마이크로 프로세서 (Micro Processor)를 應用하는 디지털 制御器 (Digital Controller)가 프로세서를 構成하고 있는 IC 素子들의 信賴性이 높아지고 아날로그 制御器 (Analog Controller)에 比하여 價格도 尙 棼 아니라 制御의 質도 憂秀하므로 曁이 利用될 趨勢이다. 이미 産業用 制御 分野에도 상당한 部分이 디지털 制御器가 利用되고 있으며 船舶 分野에도 14~20人乘의 超自動화 船舶에는 運航·保守·監視 등이 디지털 技術과 電子計算器에 依하여 遂行되고 있다. 本 論文에서는 他勵磁 直流電動機의 速度를 마이크로 프로세서를 利用할 時 制御系의 安定性에 關해서 理論과 實驗을 通하여 이를 檢討해 보고자 한다. Digital 制御에서는 샘플링 時間 (Sampling Time)과 이 때의 測定값을 홀딩 (Holding) 하는 時間이 制御의 安定性에 影響을 미치는 것으로 生覺되며 PID 制御 알고리즘 (Algorithm)을 應用할 경우에는 이들의 파라미터 (Parameter)들이 또 安定性에 重大한 影響을 미칠 것으로 生覺되어 이들에 對하여도 檢討해 보고자 한다.

2. 制御系の 伝達函數

그림 2.1 은 直流電動機의 速度制御系の 블록 圖 (Block Diagram) 이다.

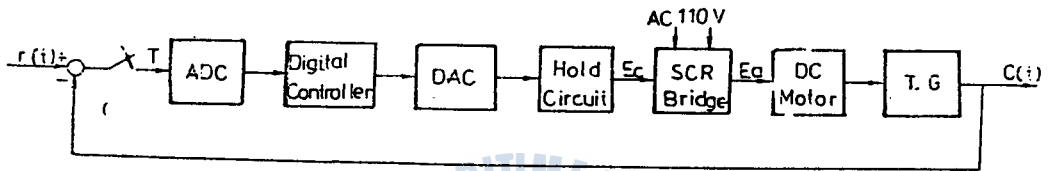


FIG2-1 Block diagram of DC Motor speed control system

$r(t)$ 는 모터의 回轉數 設定值이며 直流電動機의 回轉數 檢出裝置인 타코생電機 (Tacho-Generator) 에 나온 回轉數 信號와 比較하여 兩信號가 같으면 나가는 誤差 信號는 零이 되며 그렇지 않을 경우에는 이 誤差 信號가 아날로그 - 디지털 變換器 (A-D Converter) 에 들어가고, 速度 誤差 信號는 디지털量으로 變換 後 電子計算器에 들어가며, 이 計算器에 들어 있는 制御 알고리즘에 따라 出力이 나오게 된다. 그러나 이 信號는 디지털量이므로 이를 디지털 - 아날로그 變換器 (D-A Converter) 에서 아날로그 信號로 變換 後 홀딩 回路를 거쳐 SCR 브릿지 回路에 들어간다. DAC의 出力 信號 (電壓 信號) 는 SCR의 點火角 (Firing Angle) 을 變化

A 種 直流電動機의 電氣子 (Armature) 電壓을 調整하여 電動機 速度를 制御하도록 되어 있다. 制御系 各 要素의 伝達函數는 다음과 같다. 그림 2.2 他勵磁 直流電動機의 回路를 나타내는 그림이다.

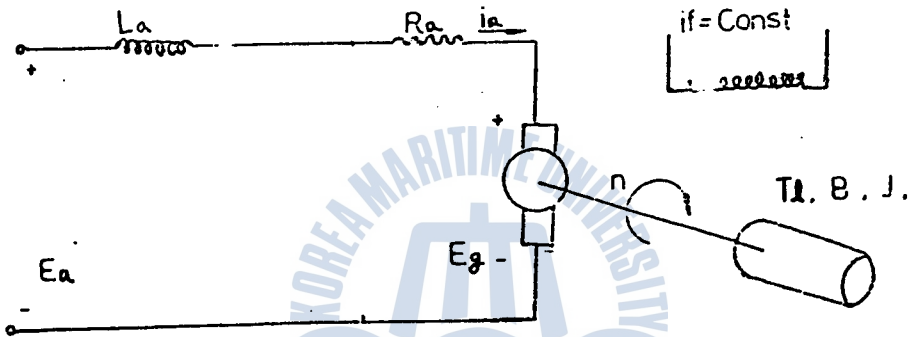


Fig 2-2 Separately excited d.c. Motor Model

이 等價回路의 伝達函數를 求하면 아래와 같다. ²⁾

$$\frac{E_a(s)}{N(s)} = \frac{K_t}{R_a \cdot B (1 + \tau_a s)(1 + \tau_m s) + K_t \cdot K_b} \quad \text{---- (2.1)}$$

여기서 $\tau_m = J/B, \quad \tau_a = L_a/R_a$

$$K_b = \frac{P \cdot Z}{a} \phi, \quad K_t = \frac{P \cdot Z}{2\pi a} \phi$$

그러나 보통 直流電動機에서 $\tau_a \ll \tau_m$ 이므로 이를

無視하면 電動機의 伝達函數는 아래와 같아진다.

$$G_m(s) = \frac{K_{me}}{1 + \tau_{me}s} \quad \text{-----} \quad (2.2)$$

여기에서 $K_{me} = \frac{K_t}{R_a B + K_t \cdot K_b}$, $\tau_{me} = \frac{R_a \cdot B \cdot \tau_m}{R_a B + K_t \cdot K_b}$

SCR 브릿지 整流器의 伝達函數는

$$G_e(s) = \frac{E_a(s)}{E_c(s)} = K_{gc} \quad \text{-----} \quad (2.3)$$

타코發電機의 伝達函數는

$$G_t(s) = \frac{E_g(s)}{N(s)} = K_{tg} \quad \text{-----} \quad (2.4)$$

0次 홀더의 伝達函數는

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad \text{-----} \quad (2.5)$$

다차 PID 制御器의 伝達函數는 ³⁾

$$D(z) = \frac{K_p (A_1 z^2 + A_2 z + A_3)}{z(z-1)} \quad \text{--- (2.6)}$$

여기에서 $A_1 = (1 + \frac{T}{2T_i} + \frac{T_d}{T})$

$$A_2 = -(1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{2T_d}{T})$$

$$A_3 = T_d / T$$

但 K_p ; 制御器의 利得 (Gain)

T_i ; " 積分時間

T_d ; " 微分時間

따라서 速度制御系의 開루프 (Open Loop) 伝達函數는

$$G_P = D(z) \cdot \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K_m \cdot K_{gc} \cdot K_{tg}}{1 + T_m s} = \frac{D(z)(1 - e^{-sT})K_{me}}{s(1 + T_m s)} \quad \text{--- (2.7)}$$

(2.7) 式을 z 變換하면

$$G_P(z) = D(z) \cdot (1 - z^{-1}) z \left[\frac{K_{me} / T_m}{s(s + 1/T_m)} \right]$$

$$= D(z) \frac{K_{me}(1 - e^{-T/T_m})}{z - e^{-T/T_m}} = D(z) \frac{(1 - B_1)}{(z - B_1)} \quad \text{--- (2.8)}$$

但 $B_1 = e^{-T/T_m}$

直流電動機の速度制御系の閉回路 (Closed Loop) 伝達関数

$$\begin{aligned} G_c(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_p(z)}{1 + G_p(z)} \\ &= \frac{K_p B_z (A_1 z^2 + A_2 z + A_3)}{z^3 + (K_p A_1 B_z + B_1 - 1) z^2 + (K_p A_2 B_z - B_1) z + K_p A_3 B_z} \quad \text{---(2.9)} \end{aligned}$$

위의 伝達関수로부터 電動機 速度制御系の 過渡特性和 安定性を 分析할 수 있다.



3. z-Plane에서의 안정성

速度制御系の 안정성과 過渡特性은 (2.9) 式을 z逆變換하면 알 수 있다. 萬若 $R(z) = 1/(1-z^{-1})$ 의 階段上 入力일 경우에는

$$C(z) = \frac{b_1}{z-a_1} + \frac{b_2}{z-a_2} + \frac{b_3}{z-a_3} + \frac{1}{1-z^{-1}} \dots (3.1)$$

(3-1) 式을 z逆變換하면

$$C(kT) = b_1 a_1^{k-1} + b_2 a_2^{k-1} + b_3 a_3^{k-1} + 1 \dots (3.2)$$

但 $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$

(3.2) 式에서 萬若 a_1, a_2, a_3 의 中 하나라도 1보다 큰 것이 있으면 $C(\infty) = b_i a_i^\infty = \infty$ 가 되어 이 制御系는 發散하여 不安定하게 된다. 萬若 $0 < a_i < 1$ 이면 $C(kT)$ 는 持續적으로 振動없이 減衰하고, $-1 < a_i < 0$ 이면 $(k-1)$ 이 偶數이면 $C(kT)$ 는 正의 값을, 奇數이면 負의 값을 가지므로 振動하면서 減衰하게 된다. 이를 그림으로 表現하면 아래와 같다."

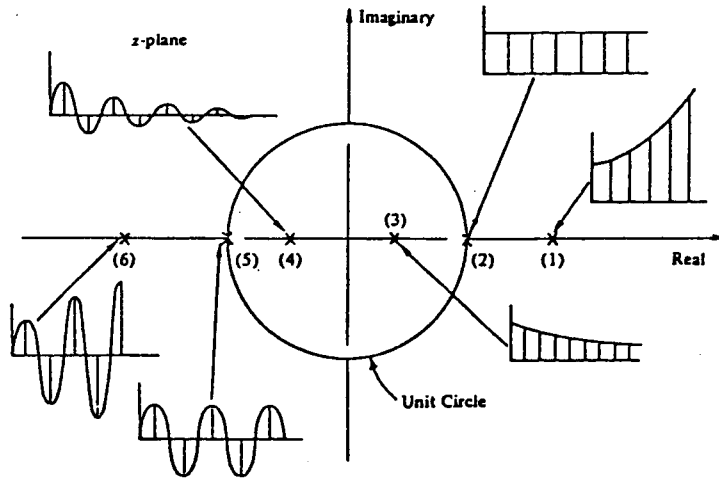


Fig3-1. Transient responses at sampling intervals corresponding to various locations of a real pole.

萬若 (2.9) 式의 分母에 複素虛根이 있다고 하면

$$C(z) = \frac{b_1}{z-a_1} + \frac{b_2}{z-a_2+jc_2} + \frac{b_3}{z-a_2-jc_2} + \frac{z}{z-1} \quad \text{--- (3.3)}$$

(3.3) 式을 z 逆變換을 하면

$$C(kT) = b a_1^{k-1} + d r^{k-1} \cos [(k-1)\theta + \varphi] + 1 \quad \text{--- (3.4)}$$

여기에서 d, φ 는 境界條件에 依하여 決定되면

$$r = \sqrt{a_2^2 + c_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1} c_2/a_2 \text{ 이다.}$$

(3.4) 式에서 알 수 있는 바와 같이 萬若 $r > 1$ 이면 制御系는 $C(kT) = \infty$ 되어 不安定하게 되고 $r = 1$ 이면 安定限界, $0 < r < 1$ 이면 安定하다. 귀와 같이 $G(z)$ 의 根中 複素虛根이 있게 되면 언제나 $C(kT)$ 는 振動하게 됨을 알 수 있다. 이를 그림으

로 表現하면 아래와 같다.

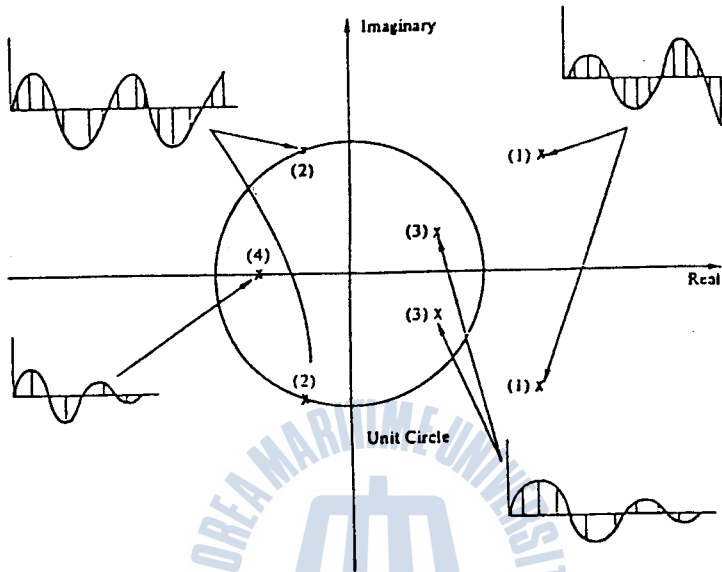
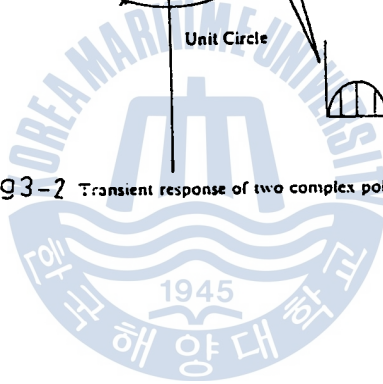


Fig3-2 Transient response of two complex poles.



4. 實驗의 分析

아래 그림은 實驗裝置의 그림이다.

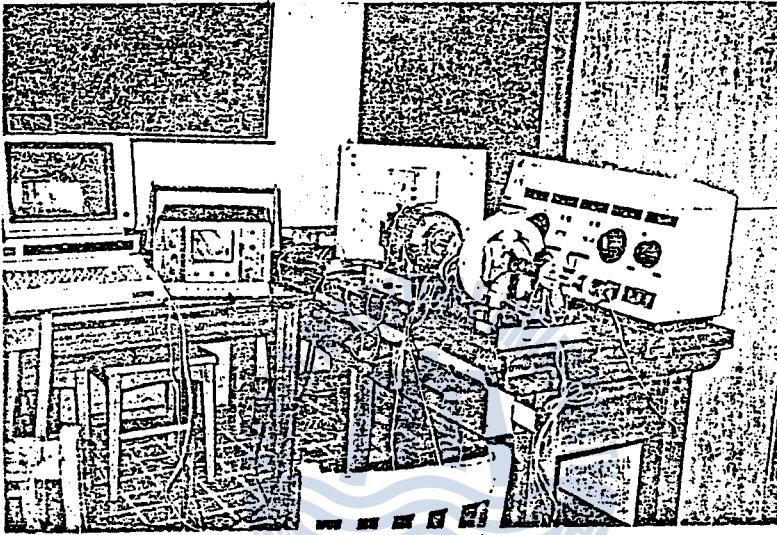


Fig 4-1 Picture of the experiment system

이 實驗裝置를 實驗 結果는 아래와 같다.

$$k_{me} = 2.46, \quad \tau_{me} = 0.6 \text{ sec}$$

아래 그림은 $T = 50 \text{ ms}$ 에서 PID의 最適調整值
 $K_p = 4.15, \quad T_i = 0.2 \text{ sec}, \quad T_d = 0.01 \text{ sec}$ 일 때, 階段入
력이 들어 갔을 경우의 過渡 応答 이다.

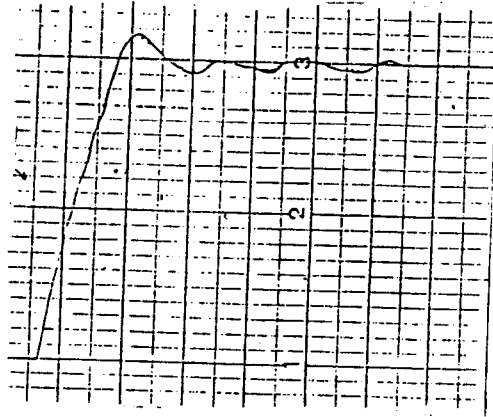


Fig4-2 Transient Response of A DC motor speed with digital PID controller adjusted optimally

아래 그림 4.3 a 는 샘플링 시간 T 를 증가시켰을 때의 제어계의 근궤적이며 $T = 110 \text{ ms}$ 以上이면 근 중 하나는 -1 보다 작아져서階段上 입력의 경우 振動하면서 發散한다. 그림 4.3 b 는 $T = 200 \text{ ms}$ 일 경우 過渡反應이다.

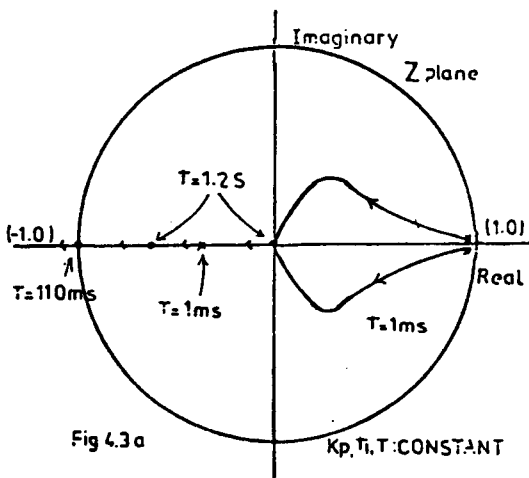


Fig 4.3a

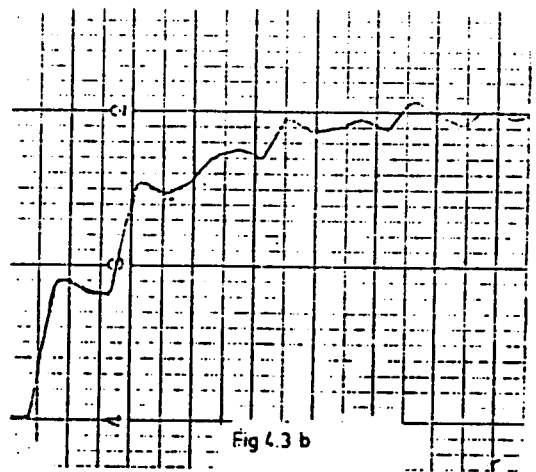


Fig 4.3 b

Fig4-3 Root loci and transient response of digital PID control system when sampling time is changed

그림 4.4는 PID 제어기의 이득 K_p 를 증가시켰을 때의 근軌跡과 過渡応答이다. K_p 가 증가하면 根中 하나가 -1 보다 작아져서 振動하면서 發散하게 된다. 그림 4.4 b는 $k_p = 15$ 의 때 過渡応答이다.

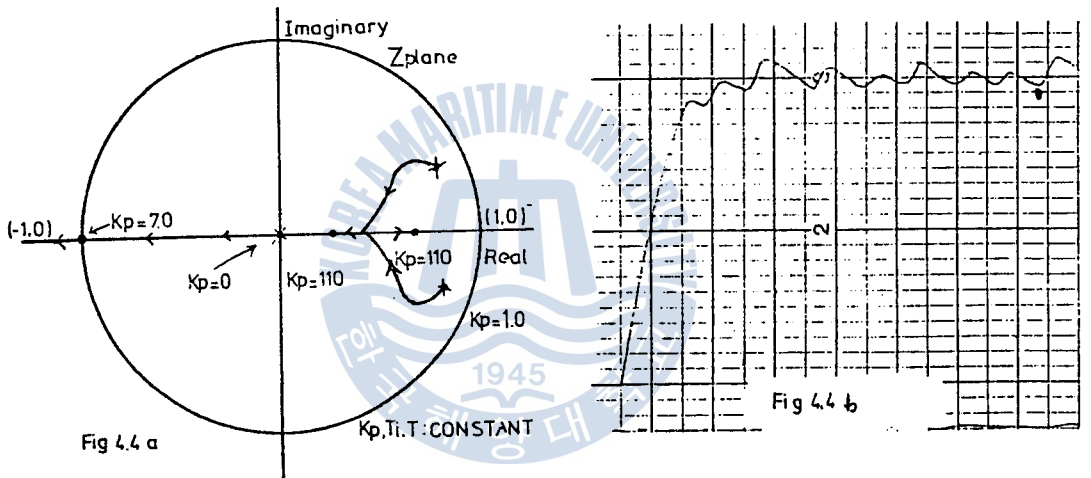


Fig4-4 Root loci and transient response of digital PID control system when gain(k_p) is changed

그림 4.5는 PID 제어기의 積分時間을 크게 했을 때의 근軌跡과 過渡応答이다. 積分時間은 增加할수록 安定하게 된다. 그림 4.5 b는 $T_i = 0.005$ sec의 때의 過渡応答이다. T_i 가 작을수록 制御系는 不安定하면 振動하면서 發散한다.

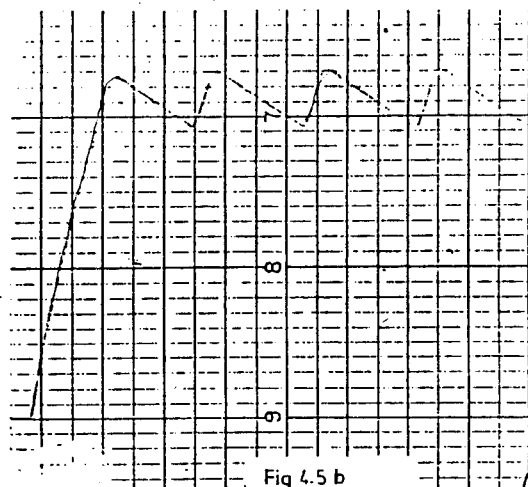
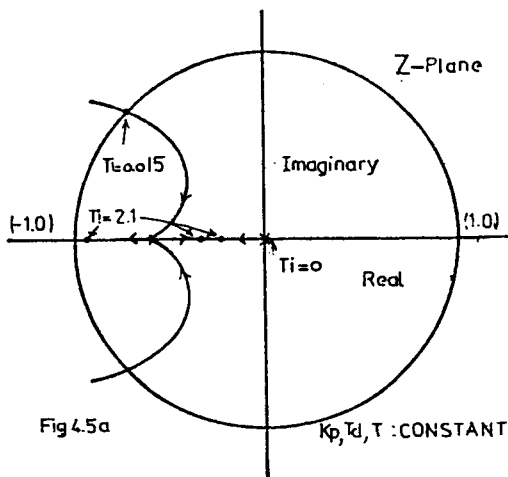


Fig4-5 Root loci and transient response of digital PID control system when integral time(T_i) is changed

아래 그림은 PID 제어기의 미분시간(T_d)를 조정했을 경우의 근궤적과 4.5 과도응답이다. 미분시간이 증가할수록 제어계는 불안정하며 진동하면서 발산한다. 그림 4.6은 $T_d = 0.5 \text{ sec}$ 일 경우의 과도응답이다. 위의 분석에서 알 수 있는 바와 같이 디지털 PID 제어기에서는 파라미터가 잘 조정이 되면 좋은 제어 결과를 얻을 수 있으나 이를 잘못하면 제어계는 쉽게 불안정해질 수 있다.

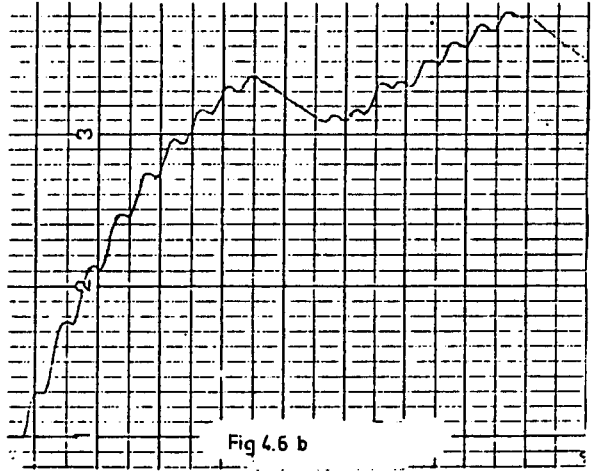
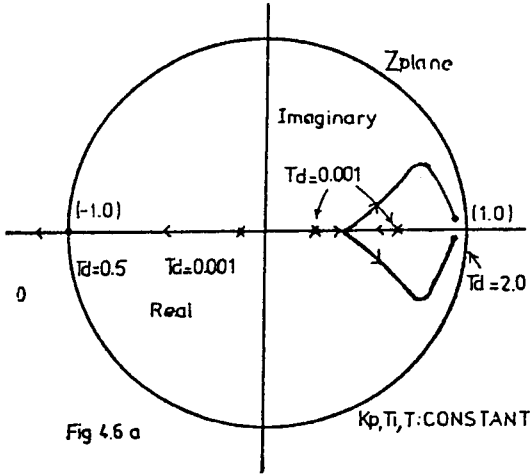
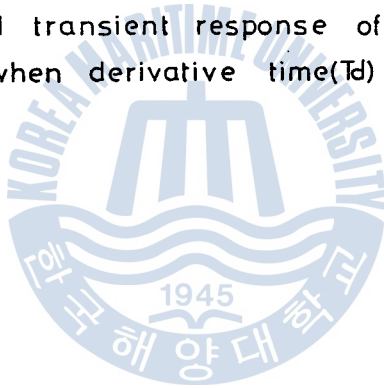


Fig4-6 Root loci and transient response of digital PID control system when derivative time(T_d) is changed



5. 맺는 말

制御系の安定性は制御系の伝達函数의分母의根中 하나라도 그 값이 1보다 커지면 시스템은 불안定해진다. 디지털 PID 制御器에서 샘플링時間, 利得, 微分時間이 커지면 불안定해지고 積分時間은 적을수록 불안定해진다.

6. 参考文献

1. James A. Cadzow & Hinrich R. Martens ;
"Discrete-Time and Computer Control System."
2. 盧永梧 ; 마이크로 프로세서를 이용한 直
流電動機의 速度制御에 関한 研
究(1985)
3. Rolf Iserman , Digital Control System,
Springer-verlag, Berlin
1981, P42, 43 76~87

