Box의 F分布에 依한 漸近論의 修訂에 對한 結果

李 鍾 厚

Revision of Box Methods In F Type Approximations

By

Jonghoo Lee

目 次

Abstract

Box derived a method calculating the best critical region of $M=-2\log W$, where W is likelihood statistic, by approximation of F-distribution and discussed its results in various situations. [2] In this paper, the author derived a convenient formula calculating Bernoulli's polynomials necessry for the probability evaluation and revised the law of determination of degree of freedom in the Box method and compared the anthor's results with those of Box by pressenting some examples.

1. 緖 論

多變量分布論의 假說檢定에서는 大槪의 境遇 檢定函數의 正確한 分布를 알 수 없으므로 假說이 眞일 때 正確한 分布를 찾아서 適合한 最適有意點域을 決定하는 問題가 難點의 하나라 하

겠다.

이 論文은 尤度比 統計量 W의 對數統計量 $M=-2\log W$의 漸近分布의 最適有意點을 求하는 것으로서 잘 알려져 있는 Box의 定理

統計量 $W(0\leqq W\leqq 1)$의 h次 moment가

$$E(W^h)=K\left\{\frac{\prod_{j=1}^{b} y_j^{\,y_j}}{\prod_{k=1}^{a} x_k^{\,x_k}}\right\}^h \frac{\prod_{k=1}^{a}\Gamma[x_k(1+h)+\xi_k]}{\prod_{j=1}^{b}\Gamma[y_j(1+h)+\eta_j]},\quad h=0,1,2\cdots\cdots \tag{1}$$

이라 한다. 단 K는 $E(W^0)=1$로 하는 常數이고

$$\sum_{k=1}^{a} x_k=\sum_{j=1}^{b} y_j \tag{2}$$

일 때

$$M=-2\log W \tag{3}$$

로 두면 $0\leqq\rho\leqq 1$인 ρ에 對하여

$$\begin{aligned}P\{M\leqq M_0\}&=P\{\rho M\leqq\rho M_0\}\\&=P\{\chi_f^2\leqq\rho M_0\}+\gamma_1(P\{\chi_{f+2}^2\leqq\rho M_0\}-P\{\chi_f^2\leqq\rho M_0\})\\&\quad+[\gamma_2(P\{\chi_{f+4}^2\leqq\rho M_0\}-P\{\chi_f^2\leqq\rho M_0\})+\tfrac{1}{2}\gamma_1^2(P\{\chi_{f+4}^2\leqq\rho M_0\}-2P\{X_{f+2}^2\leqq\rho M_0\}\\&\quad+P\{\chi_f^2\leqq\rho M_0\})]+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{4}$$

인 漸近展開가 成立한다.[1] 여기서 χ_{f+m}^2은 自由度 $f+m$의 χ^2變量이며 f와 γ는 다음 式으로 주어진다.

$$f=-2\{\sum_{k=1}^{a}\xi_k-\sum_{j=1}^{b}\eta_j-\tfrac{1}{2}(a-b)\} \tag{5}$$

$$\gamma_l=\frac{(-1)^{l+1}}{l(l+1)}\left\{\sum_{k=1}^{a}\frac{B_{l+1}(u_k)}{(\rho y_k)_l}-\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{l+1}(u_j^*)}{(\rho y_j)_l}\right\} \tag{6}$$

$B_l(n)$는 l次의 Bernoulli의 多項式$[B_0(u)=1, B_1(u)=u-\frac{1}{2}, B_2(u)=u^2-u+\frac{1}{6}, B_3(u)=u^3-\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}u, \cdots\cdots\cdots\cdots]$

$$u_k=(1-\rho)x_k+\xi_k,\quad u^*_j=(1-\rho)y_j+\eta_j$$

에서 (4)의 M_0의 값을 決定하는 方法과 그들을 計算하는데 必要한 係數들에 關한 公式을 誘導하고자 한다.

Box는 有意點 即 (4)의 M_0를 決定하기 위하여 F分布에 依한 近似法을 使用했다. 筆者는 Box의 方法에서 F分布의 自由度를 決定하는 方法을 修訂하고 그 方法에 依하여 等共分散行列의 假說檢定과 獨立性의 假說檢定에 對한 M_0를 求하고 Box의 境遇와 確率을 比較하였다.

2. 對數統計量 M=-2logW의 cumulant

統計量 M의 cumulant를 求해보자 M의 特性函數가

$$\phi(t)=E(e^{itM})=E(W^{-2it})$$

$$=K\left\{\frac{\prod_{j=1}^{b} y_j^{\,y_j}}{\prod_{k=1}^{a} x_k^{\,x_k}}\right\}^{-2it}\frac{\prod_{k=1}^{a}\Gamma[x_k(1-2it)+\xi_k]}{\prod_{j=1}^{b}\Gamma[y_j(1-2it)+\eta_j]} \qquad (\rho=1) \tag{7}$$

이므로[6] M의 cumulant 母函數는

$$\Phi(t)=\log\phi(t)=g(t)-g(0)$$

$$=-\frac{f}{2}\log(1-2it)+\sum_{l=1}^{\infty}\gamma_l'[(1-2it)^{-l}-1] \tag{8}$$

但 γ_l'는 (6)에서 $\rho=1$로 둔 값이다.[6]

이 式을 t의 冪으로 展開하면

$$\Phi(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(it)^j}{j!}2^{j-1}(j-1)!f\{1+\sum_{l=1}^{\infty}\binom{j+l-1}{l}\frac{2l}{f}\gamma_l'\} \tag{9}$$

이고, M의 j次 cumulant는

$$\kappa_j=2^{j-1}(j-1)!f\{1+jA_1+\frac{j(j+1)}{2}A_2+\cdots\cdots\} \tag{10}$$

$$A_l=\frac{2l\gamma_l'}{f} \tag{11}$$

으로 주어진다.

3. 自由度 2P 및 2Q인 F分布의 cumulant.

自由度 2P 및 2Q인 F分布의 確率密度函數는

$$p(F)=\text{const}\ F^{P-1}(PF+Q)^{-(P+Q)} \tag{12}$$

로 定義된다. 統計量 bF (여기서 b는 常數)의 r次 moment는

$$\mu'_r(bF)=\left(b\frac{Q}{P}\right)^r\frac{\Gamma(P+r)\Gamma(Q-r)}{\Gamma(P)\Gamma(Q)} \tag{13}$$

로 주어진다.[4] 여기서 4個의 cumulant를 取하면 다음과 같다.

$$\kappa_1(bF)=P\left(\frac{b}{P}\right)\left(1-\frac{1}{Q}\right)^{-1}$$

$$\kappa_2(bF)=P\left(\frac{b}{P}\right)^2(1+(P-1)/Q)\left(1-\frac{1}{Q}\right)^{-2}\left(1-\frac{2}{Q}\right)^{-1}$$

$$\kappa_3(bF)=2P\left(\frac{b}{P}\right)^3 1+(P-1)/Q)(1+(2P-1)/Q)\left(1-\frac{1}{Q}\right)^{-3}\left(1-\frac{2}{Q}\right)^{-1}\left(1-\frac{3}{Q}\right)^{-1}$$

$$\kappa_4(bF)=6P\left(\frac{b}{P}\right)^4\left\{(P/Q)^2\left(\frac{5}{Q}-\frac{11}{Q^2}\right)+\left(1-\frac{1}{Q}\right)^2\left(1-\frac{3}{Q}+\frac{2}{Q^2}+\frac{6P}{Q}-\frac{13P}{Q^2}\right)\right\}\cdot\left(1-\frac{1}{Q}\right)^{-4}\left(1-\frac{2}{Q}\right)^{-2}\left(1-\frac{3}{Q}\right)^{-1}\left(1-\frac{4}{Q}\right)^{-4} \qquad (14)$$

Q가 P보다 클 때 order$(P/Q)^2$ 項을 無視하면

$$\left.\begin{aligned}
\kappa_1(bF)&=P\left(\frac{b}{P}\right)\left(1+\frac{1}{Q}\right)\\
\kappa_2(bF)&=P\left(\frac{b}{P}\right)^2\left\{1+\frac{P}{Q}+\frac{3}{Q}\right\}\\
\kappa_3(bF)&=2P\left(\frac{b}{P}\right)^3\left\{1+3\frac{P}{Q}+\frac{6}{Q}\right\}\\
\kappa_4(bF)&=6P\left(\frac{b}{P}\right)^4\left\{1+6\frac{P}{Q}+\frac{10}{Q}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

됨을 알 수 있다. 여기서 Box는 $A_2-A_1^2>0$일 때 $2P=f_1=f$, $2Q=f_2=\dfrac{f_1+2}{A_2-A_1^2}$ 및

$b=\dfrac{f_1}{1-A_1-f_1/f_2}$으로 두고 自由度 f_1, f_2의 F分布에 依한 近似法을 使用하였다.[2]

이에 對하여 筆者는

$$2P=f_1=f,\quad f_2=\frac{f_1}{A_2-A_1^2},\quad b=\frac{f_1}{1-A_1-(A_2-A_1^2)}=\frac{f_1}{1-A_1-f_1/f_2}$$

으로 두었다.

이것을 (15)에 代入하면 近似的으로

$$\left.\begin{aligned}
\kappa_1(bF)&=f\ \{1+A_1+A_2\}\\
\kappa_2(bF)&=2f\ \{1+2A_1+3A_2\}\\
\kappa_3(bF)&=8f\ \{1+3A_1+6A_2\}\\
\kappa_4(bF)&=48f\ \{1+4A_1+10A_2\}
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

이 얻어지고 Box의 境遇와 적으도 같은 位數에서 같으며 方程式 (10)으로 주어지는 M의

cumulant와 order n^{-2}으로서 4次까지 一致한다. 따라서 M/b는 自由度 f_1과 f_2인 F分布를 近似的으로 할 것이다. 여기서

$$f_1=f,\quad f_2=\frac{f_1}{A_2-A_1^2},\quad b=\frac{f_1}{1-A_1-(A_2-A_1^2)} \tag{17}$$

이다.

4. $A_2-A_1^2<0$일 때의 近似法

母數 P와 Q에 對해서

$$P(X)=\text{const}\ X^{P-1}(1-X)^{Q-1} \tag{18}$$

인 分布를 가지는 統計量 X를 생각한다. 이 때 X는 Beta分布를 한다. 따라서 bX(b는 常數)의 r次 moment는

$$\mu_r'(bX)=b^r\frac{\Gamma(P+r)\Gamma(P+Q)}{\Gamma(P)\Gamma(P+Q+r)} \tag{19}$$

으로 주어진다.(3) 이로부터 bX의 처음의 4個의 cumulant는 다음과 같이 된다.2)

$$\left.\begin{aligned}
\kappa_1(bX)&=P\left(\frac{b}{Q}\right)\left(1+\frac{P}{Q}\right)^{-1}\\
\kappa_2(bX)&=P\left(\frac{b}{Q}\right)^2\left(1+\frac{P}{Q}\right)^{-2}(1+(P+1)/Q)^{-1}\\
\kappa_3(bX)&=2P\left(\frac{b}{Q}\right)^3\left(1-\frac{P}{Q}\right)\left(1+\frac{P}{Q}\right)^{-3}(1+(P+1)/Q)^{-1}(1+(P+2)/Q)^{-1}\\
\kappa_4(bX)&=6P\left(\frac{b}{Q}\right)^4\left\{1+\frac{1}{Q}-\frac{2P}{Q}-\frac{4P}{Q^2}-\frac{2P^2}{Q^2}+\frac{P^2}{Q^3}+\frac{P^3}{Q^3}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\cdot\left(1+\frac{P}{Q}\right)^{-4}(1+(P+1)/Q)^{-2}(1+(P+2)/Q)^{-1}(1+(P+3)/Q)^{-1}$$

여기서 앞에에서와 같이 Q가 P보다 클때 order$(P/Q)^2$을 無視하면 다음 式을 얻는다.

$$\left.\begin{aligned}
\kappa_1(bX)&=P\left(\frac{b}{Q}\right)\left\{1-\frac{P}{Q}\right\}\\
\kappa_2(bX)&=P\left(\frac{b}{Q}\right)^2\left\{1-3\frac{P}{Q}+\frac{1}{Q}\right\}\\
\kappa_3(bX)&=2P\left(\frac{b}{Q}\right)^3\left\{1-\frac{6P}{Q}-\frac{3}{Q}\right\}\\
\kappa_3(bX)&=6P\left(\frac{b}{Q}\right)^4\left\{1-10\frac{P}{Q}-\frac{6}{Q}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Box는 自由度 f_1, f_2와 b를

$$2P=f_1=f,\quad 2Q=f_2=\frac{f_1+2}{A_1^2-A_2}\quad \text{및}\quad b=\frac{f_2}{1-A_1+\frac{2}{f_2}}$$

와 같이 取하는데(2) 對해서 筆者는

$$2P=f_1=f,\quad 2Q=f_2=\frac{f_1}{A_1^2-A_2} \quad \text{및} \quad b=\frac{f_2}{1-A_1+1/f_2}$$

를 代入하여 (16)式과 같은값을 近似的으로 얻었다. 그 값은 M의 cumulant의 처음의 4個의 값과 近似的으로 같다. 따라서 M/b는 $2P=f_1$, $2Q=f_2$ 및

$$f_1=f,\quad f_2=\frac{f_1}{A_1^2-A_2},\quad b=\frac{f_2}{1-A_1+1/f_2} \tag{22}$$

으로서 (18)式의 X와 같은 分布를 할 것이다. 바꾸어서 말하면 $F(f_1, f_2)$가 自由度 f_1, f_2의 F分布를 하면 $\frac{f_1F}{f_2+f_1F}$는 Beta分布 $B(\frac{1}{2}f_1,\ \frac{1}{2}f_2)$ 즉 $\frac{f_1F}{f_2+f_1F}=M/b$이다[3]. 그러므로 $\frac{f_2M}{f_1(b-M)}$은 自由度 f_1 및 f_2를 갖는 F分布를 할 것이다.

5. γ_l에 關한 公式

γ_l은, (4)式의 確率을 計算하는데 必要한 係數이며 (6)式으로 表示되는 값이다. 確率을 求하기 위해서는 具體的으로 表示되어야 한다. 여기서는 (11)式에서 주어진 方程式

$$A_l=\frac{2l\gamma_l'}{f} \quad (\gamma_l'\text{는 }\gamma_l\text{에서 }\rho=1\text{로 둔 값})$$

와의 關係를 考察한다. Box는 Bernoulli의 多項式의 近似式을 利用하여 關係式을 求한바 있다. 筆者는 近似式을 쓰지 않고 直接 複雜한 計算을 通하여 다음의 關係式을 얻었다.

$\rho=1-A_1$으로 두면 $\gamma_1=0$이 된다. 이 ρ에 대해서 $\{A_l\}$과 $\{\gamma_l\}$ 사이의 關係式을 求하면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1&=0\\
\gamma_2&=\frac{f}{4\rho^2}(A_2-A_1^2)\\
\gamma_3&=\frac{f}{6\rho^3}(A_3-3A_1A_2+2A_1^3)\\
\gamma_4&=\frac{f}{8\rho^4}(A_4-4A_1A_3+6A_1^2A_2-3A_1^4)\\
\gamma_5&=\frac{f}{10\rho^5}(A_5-5A_1A_4+10A_1^2A_3-10A_1^3A_2+4A_1^5)\\
\gamma_6&=\frac{f}{12\rho^6}(A_6-6A_1A_5+15A_1^2A_4-20A_1^3A_3+15A_1^4A_2-5A_1^6)
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

다음에 Box의 境遇와 筆者의 境遇의 近似의 程度를 比較하기 위하여 等分散假說檢定과 獨立性檢定規準으로 나누어서 생각한다.

6. 等共分散行列의 假說檢定

$X'_{(h)}(k\times n_h)=(x'_{(h)1}\cdots\cdots x'_{(h)n_h})$ $h=1,\cdots\cdots,q$를 各各 正規分布 $N(\mu_{(h)},\ \Lambda_{(h)})$, $h=1,\cdots\cdots,q$에서

의 任意標本이라 한다. 이에 對해서 假說 $H_0:\boldsymbol{\Lambda}_{(1)}=\cdots=\boldsymbol{\Lambda}_{(q)}$를 檢定하는 尤度比規準 λ는 各 標本에 있어서의 積和行列을 $\boldsymbol{V}_{(h)}=\boldsymbol{X}'_{(h)}\boldsymbol{X}_{(h)}-n\bar{\boldsymbol{x}}'_{(h)}\bar{\boldsymbol{x}}_{(h)}=\sum_{\alpha=1}^{n_h}(\boldsymbol{x}_{(h)\alpha}-\bar{\boldsymbol{x}}_{(h)})'(\boldsymbol{x}_{(h)\alpha}-\bar{\boldsymbol{x}}_{(h)})$, $\sum_{h=1}^{q}\boldsymbol{V}_{(h)}=\boldsymbol{V}$, $\sum_{h=1}^{q}n_h=n$으로 두면

$$\lambda=\frac{\prod_{h=1}^{q}|\boldsymbol{V}_{(h)}|^{\frac{1}{2}n_h}}{|\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{2}n}}\cdot\frac{n^{\frac{1}{2}kn}}{\prod_{h=1}^{q}n_h^{\frac{1}{2}kn_h}} \tag{24}$$

을 얻는다. 그러나 實際는 Bartlett의 方法에 따라 常數因子를 없에고, n_h 代身에 自由度 $\nu_h=n_h-1$, $\nu=n-q$를 使用하여

$$W=\frac{\prod_{h=1}^{q}|\boldsymbol{V}_{(h)}|^{\frac{\nu_h}{2}}}{|\boldsymbol{V}|^{\frac{\nu}{2}}} \tag{25}$$

를 統計量으로 한다.[5]

假說 $H_0:\boldsymbol{\Lambda}_{(1)}=\boldsymbol{\Lambda}_{(2)}=\cdots=\boldsymbol{\Lambda}_{(q)}=\boldsymbol{\Lambda}_{(0)}$이 眞일 때 $\boldsymbol{V}_{(h)}$, 와 $\boldsymbol{V}$의 分布는 Wishart分布 $\boldsymbol{V}_{(h)}\sim W(\boldsymbol{\Lambda}_{(0)},k,\nu_h)$, $\boldsymbol{V}=\sum_{h=1}^{q}\boldsymbol{V}_{(h)}\sim\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\Lambda}_{(0)},k,\sum_{1}^{q}\nu_h)$를 하므로 $r=0,1,2,\cdots\cdots$에 對한 r次 moment는

$$E(w^r)=\prod_{\alpha=1}^{k}\left\{\prod_{h=1}^{q}\frac{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu_h+r\nu_h+1-\alpha)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu_h+1-\alpha)]}\right\}\frac{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu+1-\alpha)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu+r\nu+1-\alpha)]} \tag{26}$$

이다. 다시 統計量

$$\lambda^*=w\frac{\nu^{\frac{1}{2}k\nu}}{\prod_{h=1}^{q}\nu_h^{\frac{1}{2}k\nu_h}}=\frac{\prod_{h=1}^{q}|\boldsymbol{V}_{(h)}|^{\frac{1}{2}\nu_h}}{|\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{2}\nu}}\prod_{h=1}^{q}\left(\frac{\nu}{\nu_h}\right)^{\frac{1}{2}k\nu_h} \tag{27}$$

를 생각하여 漸近展開를 求한다. λ^*의 moment는 式(26)에서

$$E(\lambda^{*r})=C\left(\frac{\prod_{j=1}^{k}(\frac{1}{2}\nu)^{\frac{1}{2}\nu}}{\prod_{h=1}^{q}\prod_{j=1}^{k}(\frac{1}{2}\nu_h)^{\frac{1}{2}\nu_h}}\right)^r\frac{\prod_{h=1}^{q}\prod_{i=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}\nu_h(1+r)+\frac{1}{2}(1-i)]}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}\nu(1+r)+\frac{1}{2}(1-j)]} \tag{28}$$

으로 表示된다. 式 (1), (2) 및 (5)와 比較하면 記號의 對應은

$a=kq$, $x_i=\frac{1}{2}\nu_h$, $i=(h-1)k+1,\cdots,hk$, $h=1,\cdots,q$,

$\xi_i=\frac{1}{2}(1-i)$, $\xi_{k+i}=\frac{1}{2}(1-i),\cdots$, $\xi_{(q-1)k+i}=\frac{1}{2}(1-i)$, $i=1,\cdots,k$,

$b=k$, $y_j=\frac{1}{2}\nu$, $\eta_j=\frac{1}{2}(1-j)$, $j=1,\cdots,k$.

이며 $\gamma_1=0$으로 두면 自由度 f 및 ρ는

$$f=\tfrac{1}{2}(q-1)k(k+1) \tag{29}$$

$$\rho=1-A_1=1-\frac{2k^2+3k-1}{6(q-1)\ (k+1)}\left(\sum^{q}\frac{1}{\nu_l}-\frac{1}{\nu}\right) \tag{30}$$

와 같이 計算된다. 그리고 A_i를 計算하면 다음과 같다. 먼저

$$S_r=\sum_{l=1}^{q}\frac{1}{\nu_l{}^r}-\frac{1}{\nu^r},\quad \nu=\sum_{l=1}^{q}\nu_l \tag{31}$$

로 두면

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=\frac{2k^2+3k-1}{6(q-1)\ (k+1)}S_1\\
A_2&=\frac{(k-1)(k+2)}{6(q-1)}S_2\\
A_3&=\frac{6k^4+15k^3-10k^2-30k+3}{60(k+1)(q-1)}S_3\\
A_4&=\frac{1}{30(q-1)}(k-1)(k+2)(2k^2+2k-7)S_4\\
A_5&=\frac{1}{126(q-1)(k+1)}(42k^6-105k^5+105k^4-105k^3-21k^2+147k+1)S_5\\
A_6&=\frac{1}{84(q-1)(k+1)}(k-1)(3k^6+159k^5-359k^4+61k^3+82k^2+110k+100)S_6
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$\gamma_1=0$이 되는 ρ는

$$\rho=1-\frac{2k^2+3k-1}{6(k+1)(q-1)}S_1=1-A_1 \tag{33}$$

Table1. 1% and 5% significance points for M. (test of homoscedascity)

ν	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	f		5% M	5% probability Exact	5% probability Series	1% M	1% probabiilty Exact	1% probabiilty Series
95	19	19	19	19	19	40	B	61.471659	0.050234	0.050145	70.230669	0.010074	0.010042
							L	61.479834	0.050166	0.050076	70.240707	0.010054	0.010022
95	9	9	19	29	29	40	B	63.984327	0.053053	0.050596	73.142210	0.011010	0.010141
							L	64.017719	0.052775	0.050326	73.183140	0.010927	0,010062
95	9	9	9	9	59	40	B	67.506831	0.054228	0.051161	77.190930	0.011351	0.010265
							L	67.557741	0.053822	0.050768	77.253174	0.011229	0.010151
45	9	9	9	9	9	40	B	69.842285	0.053788	0.051397	79.848895	0.011529	0.010351
							L	69.888348	0.053434	0.051052	79.905099	0.011047	0.010250

이다.

이들에 依하여 (23)式의 γ_l을 計算한다.

等共分散 假說檢定에서 特히 $k=4, q=5$일 때 Box의 近似法과 筆者의 漸近分布의 5% 및 1% 有意點에 對한 確率을 比較하면 앞의 表 1과 같다.

7. 獨立性의 檢定規準의 漸近分布

確率 Vector $\boldsymbol{x}(1\times k)\sim N(\mu, \boldsymbol{\Lambda})$에 있어서 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1(1\times k_1), \cdots, \boldsymbol{x}_m(1\times k_m))$, $k=k_1+\cdots+k_m$이라 한다. 이에 對應하는 μ, $\boldsymbol{\Lambda}$의 分割을

$$\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_m), \quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{11} & \boldsymbol{\Lambda}_{12}\cdots\boldsymbol{\Lambda}_{1m} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{21} & \boldsymbol{\Lambda}_{22}\cdots\boldsymbol{\Lambda}_{2m} \\ \\ \boldsymbol{\Lambda}_{m1} & \boldsymbol{\Lambda}_{m2}\cdots\boldsymbol{\Lambda}_{mm} \end{pmatrix} \tag{34}$$

으로 둔다. 이 때 假說 $H_o : \boldsymbol{\Lambda}_{ij}=0$, $i\neq j$에 對한 尤度比規準 λ는 H_o가 眞일 때

$$w=\frac{|\boldsymbol{V}|}{\prod_{i=1}^{m}|\boldsymbol{V}_{ii}|}=|\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_V^{-1}|, \quad \boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{V}_{11}, \cdots\boldsymbol{V}_{mm}) \tag{35}$$

으로 두면

$$\lambda=w^{\frac{n}{2}} \tag{36}$$

과 같이 된다. 그리고 그 moment는

$$E(\lambda^h)=E\left(w^{\frac{hn}{2}}\right)=C\frac{\prod_{i=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}\{n(1+h)-i\}]}{\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_i}\Gamma[\frac{1}{2}\{n(1+h)-j\}]} \tag{37}$$

으로 表示된다. (단 C는 $E(\lambda^0)=1$되는 常數)

方程式 (1), (2) 및 (5)와 對應시키면

$$a=k, \quad x_i=\frac{n}{2}, \quad \xi_i=-\frac{i}{2}, \quad b=k, \quad y_j=\frac{n}{2}, \; \eta_j=(k_1+\cdots+k_{i-1}-j)/2$$
$$j=k_1+\cdots+k_{i-1}+1, \; \cdots, k_1+\cdots+k_i, \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

와 같이 된다.

다음에 A_l의 값을 求하기 위하여

$$\Sigma_r=\left(\sum_{l}^{m}k_l\right)^r-\sum_{l=1}^{m}k_l^r \tag{38}$$

으로 두면

$$f=\tfrac{1}{2}(k^2-\sum k_i^2)=\tfrac{1}{2}\Sigma_2 \tag{39}$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=\frac{1}{6n\Sigma_2}[2\Sigma_3+9\Sigma_2]\\
A_2&=\frac{1}{6n^2\Sigma_2}[\Sigma_4+6\Sigma_3+11\Sigma_2]\\
A_3&=\frac{1}{60n^3\Sigma_2}[6\Sigma_5+45\Sigma_4+110\Sigma_3+90\Sigma_2]\\
A_4&=\frac{1}{30n^4\Sigma_2}[2\Sigma_6+18\Sigma_5+55\Sigma_4+60\Sigma_3+3\Sigma_2]\\
A_5&=\frac{1}{40n^5\Sigma_2}[2\Sigma_7+21\Sigma_6+77\Sigma_5+105\Sigma_4+7\Sigma_3-63\Sigma_2]\\
A_6&=\frac{1}{84n^6\Sigma_2}[3\Sigma_8+36\Sigma_7+154\Sigma_6+252\Sigma_5+21\Sigma_4-252\Sigma_3-10\Sigma_2]
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$\gamma_1=0$ 되는 ρ는

$$\rho=1-\frac{2\Sigma_3+9\Sigma_2}{6n\Sigma_2}=1-A_1 \tag{41}$$

이다.

위에서 보는 바와 같이 獨立性檢定 때와 等共分散 假說檢定 때의 A_i의 값은 各各 다르다. 그러나 A_i에 依하여 γ_l을 表示하는 式은 兩쪽 다 (23)式과 같이 同一한 方程式으로 表示된다.

特殊한 境遇 $m=2$ 즉 $k=k_1+k_2$일 때 $k_1=p$, $k_2=q$라 두고 $\gamma_1=0$이 되는 $\rho=1-A_1$에 관해서 γ_l을 計算하면 $f=pq$,

$$\rho=1-\frac{p+q+3}{2n}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_1=0,\quad \gamma_2=\frac{pq}{48n^2\rho^2}(p^2+q^2-5)\\
&\gamma_3=0,\quad \gamma_4=\frac{pq}{1920n^4\rho^4}\{3(p^4+q^4)+10p^2q^2-50(p^2+q^2)+159\}\\
&\gamma_5=0,\quad \gamma_6=\frac{pq}{16128n^6\rho^6}\{3(p^6+q^6)-105(p^4+q^4)+1113(p^2+q^2)\\
&\qquad\qquad+(21p^2-350+21q^2)p^2q^2-2995\}
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

와 같이 된다.

Box와 筆者의 두 漸近分布를 몇가지 境遇에 관해서 5% 및 1%의 有意點에 對한 確率을 計算하여 比較하면 다음 表2, 3과 같다.

Table 2. 5% significance points for M. (test of independence)

p	q	$p+q$	f	n	Box			Lee			ρ
					M	probability		M	probability		
						Exact	Series		Exact	Series	
1	5	6	5	10	20. 805129	0. 059894	0. 057975	21. 085123	0. 056844	0. 054942	0. 55
				20	14. 378564	0. 050619	0. 050589	14. 416417	0. 050057	0. 050028	0 775
1	10	11	10	20	29. 154832	0. 058268	0. 055799	29. 359321	0. 056161	0. 053719	0. 65
				40	22. 350916	0. 050610	0. 050549	22. 383233	0. 050201	0. 050140	0. 825
2	2	4	4	9	15. 607858	0. 051060	0. 051035	15. 649334	0. 050538	0. 050513	0. 6$\dot{1}$
2	5	7	10	10	38. 202883	0. 071269	0. 063416	38. 534109	0. 068349	0. 060598	0. 5
				20	24. 598494	0. 051032	0. 050942	24. 636578	0. 050591	0. 050502	0. 75
2	10	12	20	20	52. 136613	0. 062936	0. 057426	52. 331182	0. 061337	0. 055882	0. 625
				40	38. 944429	0. 050848	0, 050731	38. 973157	0. 050567	0. 050450	0. 8125
4	4	8	16	10	61. 624577	0. 097772	0. 070430	62. 044286	0. 094333	0. 067428	0. 45
				20	36. 592730	0. 051598	0. 051382	36. 633291	0. 051210	0. 050995	0. 725
1	1	2	1	9	5. 296083	0. 049737	0. 049719	5. 2731106	0. 050237	0. 050219	0. 7$\dot{2}$

Table 3. 1% significance points for M (test of independence)

p	q	$p+q$	f	n	Box			Lee			ρ
					M	probability		M	probability		
						Exact	Series		Exact	Series	
1	5	6	5	10	28. 495108	0. 013806	0. 0126321	28. 936754	0. 012671	0. 011544	0. 55
				20	19. 618944	0. 010233	0. 010214	19. 680480	0. 010037	0. 010019	0. 775
1	10	11	10	20	37. 113177	0. 012929	0. 011657	37. 404048	0. 012208	0. 010976	0. 65
				40	22. 350916	0. 010213	0. 010180	28. 411760	0. 010080	0. 010047	0. 825
2	2	4	4	9	21. 862246	0. 010407	0. 010390	21. 931040	0. 010223	0. 010201	0. 6$\dot{1}$

				10	48.631060	0.017952	0.013836	49.092813	0.016846	0.012884	0.5
2	5	7	10	20	31.217285	0.010359	0.010311	31.272005	0.010217	0.010169	0.75
2	10	12	20	20	62.534158	0.014372	0.011856	62.785576	0.013836	0.011380	0.625
				40	46.610335	0.020276	0.010220	46.648081	0.010190	0.010134	0.8125
4	4	8	16	10	75.258542	0.028032	0.015165	75.804841	0.026570	0.014193	0.45
				20	44.569450	0.010533	0.010428	44.623812	0.010412	0.010309	0.725
1	1	2	1	9	9.1341654	0.098713	0.09857	9.068477	0.010142	0.010128	0.72

8. 結　論

確率計算은 小數點아래 6자리까지 正確히 셈 하였다. 表에서 正確한 確率이라 함은 式 (4)에서 位數 γ_6項까지의 全項을 計算한 漸近確率이며 級數라 함은 γ_2項까지의 漸近確率이다. 이것은 γ_2項까지만 取할 때의 實用性을 보기 위한 것이다.

(1) γ_i의 公式은 方程式 (6)에 Bernoulli 多項式의 값을 具體的으로 代入하여 計算한 다음 그 값을 A_i에 依하여 表示한 것이다. 이 結果는 等共分散 假說檢定일 때나 獨立性檢定일 때나 다 $\gamma_i(i=1,\cdots,6)$가 $A_i(i=1,\cdots,6)$에 依하여 꼭 같은 式으로 表示된다. 그리고 簡單한 規則性을 가지므로 表現에 大端히 便利함은 特記 할 만하다. 그러나 모든 i에 對하여 이와 같이 表示된다는 것을 證明못했다.

(2) Box의 境遇와의 確率의 近似性의 比較는 $A_2-A_1^2>0$일 때 大端히 좋은 成果를 얻었다고 생각된다. 또 標本의 크기 n이 增加 할 때의 確率의 收斂性도 著者의 方法이 Box의 것보다 빠르다.

(3) F分布로 近似시키는 問題에서 처음의 4個의 cumulant만 近似的으로 같음을 確認하였다. 앞으로 더 높은 次數의 cumulant에 對하여 즉 order$(P/Q)^{-2}$ 보다 더 高位의 無限小까지 近似되나의 與否를 糾明하는 것과 等平均檢定과 等平均 및 等共分散 同時假說檢定에 對한 確率收斂의 具體的인 比較가 남아있다.

끝으로 위의 計算을 위하여 많은 協助를 해 주신 日本國 九州大學 數學科에서 留學中인 崔在龍敎授에게 深甚한 感謝를 들입니다.

參 考 文 献

1. Anderson, An introduction to multivariate statistical analysis. (1958) John Wiley & Sons.
2. G. E. P. Box, A general distribution thory for a class of likelihood criteria Biomtreica. (1949) 36. p317.
3. H. Cramér, Mathematical mtehods of statistics. (1945) Princeton University.
4. S. S. Wilks, Mathematical statistics. (1962) John Wiley & Sons.
5. 北川敏男, 多變量解析論(1966) 情報科學講座 A5 3共立社
6. 李鍾厚, G. E. P. Box의 尤度比分布와 S. S. Wilks의 尤度比分布 $-2\log\lambda$와의 比較, 韓國海洋大學論文集 (1973). p181～207.