

2次系の 制御對象에 對한 PI制御器의 最適調整에 關한 研究

河 注 植 · 陳 康 奎

The Study on the Optimal Adjustment of PI Controller
for a General Second-Order System

Ha Joo Shik · Jin Gang Gyoo

〈 目 次 〉

- | | |
|----------------|------------|
| 1. 序 論 | 4. 檢討 및 考察 |
| 2. 理論的 考察 | 5. 結 論 |
| 3. 數值計算 및 應答實驗 | 參考文獻 |

Abstract

The task of adjusting control systems which are more optimal in feed back control systems; being used the P.I.D. controllers for various process controls, in some sense, is one of important problems.

In order to keep pace with the requirements to modern control systems, the author uses the integral square error (ISE) criterion for solving the control problem of the PI controller, whose controlled objects are described by a general second-order system. In general, the controller's variables being two and above, It is of no ease that we find theoretically optimal parameters. Therefore, sometimes those are numerically computed by means of digital-computer techniques. However, the author proposes a theoretical method, in this paper, to determine the optimal parameters (τ_i : integral time, k_p : gain) of the PI controller.

Using this result, all optimal parameters can be theoretically determined by substituting the parameters of the various controlled objects into the expressions evaluated respectively. Its advantage and effectiveness can be shown by the experiments for the indicial responses and examinations for the frequency domain responses.

1. 序 論

一般的으로 우리가 다루는 制御系統은 物理的인 慣性이나 摩擦에 依해서 應答이 目標值에 完全히 一致될 수는 없다. 應答 즉 制御器들이 目標值을 追從하는 過程에서 過渡狀態가 發生하게 되며 또한 定常狀態에 到達했을 때에도 定常誤差가 생기는 경우가 많다. 따라서 適當한 制御裝置를 採用하여 所期의 速應性을 가지게 하고 最大 오우버슈트(Maximum Overshoot)나 定常誤差를 許容範圍 內에 存在하게끔 할 必要가 있다.

直列補償回路的 一種이라 볼 수 있는 比例(P), 積分(I), 微分(D) 制御器를 用해서 利程工制御 (Process Control)를 하는 플랜트(Plant)에서도 P.I.D. 制御器 단독으로는 制御系의 過渡應答과 定常應答을 同時に 向上시킬 수는 없기 때문에 所期의 目的을 達成하기 위해서는 이들을 적절히 結合해서 使用하고 있는 것이 普通이다. 이와같이 結合된 制御器를 使用할 때 制御系統의 過渡特性, 定常特性 및 速應性 등은 制御器의 퍼라미터 (Parameter)의 값에 따라 크게 달라지기 때문에 制御器의 퍼라미터의 값을 如何히 調整하느냐 하는 것은 매우 중요한 問題이다.

이에 對한 研究로서 最大 오우버슈트의 크기를 基準으로 하는 方法, 振幅의 減衰比를 基準으로 하는 方法, 閉回路 周波數傳達函數의 利得을 基準으로 하는 方法, 階段狀入力和 出力과의 誤差應答의 制御面積 또는 2乘制御面積을 最少로 하는 方法 등이 있다. 아직 어느 것이나 다 制御系의 絕對的인 評價基準이 되지는 못하고 있지만 最近의 最適制御理論은 主로 2乘制御面積을 評價函數로 利用해서 制御系를 해석하고 있으므로 本論文에서도 이 方法을 採用하기로 한다.

實際에 調整할 수 있는 制御器의 퍼라미터가 2개 以上일 때는 이 方法을 利用해서 最適 퍼라미터를 理論적으로 求한다는 것은 一般的으로 容易하지 않으며 數值計算에 의할 경우가 많다.

數值計算에 依한 境遇이지만 遲延時間을 包含하며 1次系統으로 주어지는 制御對象에 對한 PI 制御器의 最適 퍼라미터를 決定하는 研究¹⁾는 이미 發表되었으므로 本論文에서는 2次系統의 制御對象을 갖는 制御系統에 있어서 PI 制御器의 最適 퍼라미터를 求하는 한 方法을 提示한다. 이 方法에서는 最適 퍼라미터를 解析적으로 求하고 있기 때문에 制御對象이 2次系統으로 表示되는 모든 플랜트에 對해 각각의 係數를 代入하면 쉽게 最適 퍼라미터를 求할 수 있으므로 數值計算에 依한 近似根을 求하는 수고를 덜어주며, 실제 이러한 制御器를 다루는 現場 技術者들에게 많은 도움을 줄 수 있으리라 생각된다.

따라서 本論文에서는 本方法으로 求한 퍼라미터가 最適值임을 應答實驗을 통해 밝히며 周波數應答法에 依한 檢討를 통하여 本方法의 有效性을 확인한다.

2. 理論的 考察

2.1 블록線圖 및 傳達函數

一般的으로 피이드백回로를 갖는 制御系는 Fig.1과 같은 블록線圖로²⁾ 表示할 수 있는데

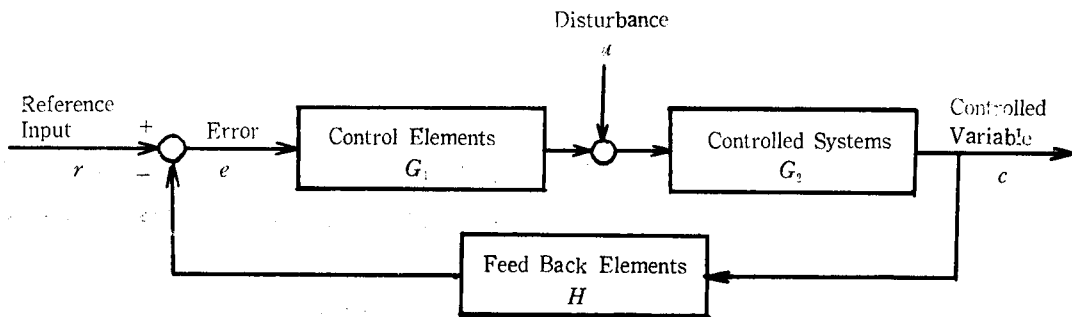


Fig. 1 Block diagram of a general feed back control system.

本論文에서는 2次系統의 制御對象을 갖는 單位 피드백 制御系統을 PI 制御하므로
 制御器의 傳達函數를

$$G_1(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \dots\dots\dots (2.1)$$

단, k_p : 利得 τ_i : 積分時間 $k_p, \tau_i > 0$

制御對象의 傳達函數를

$$G_2(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dots\dots\dots (2.2)$$

단, k : 利得 ζ : 減衰率 ω_n : 固有角 周波數 $k, \zeta, \omega_n > 0$

로 表示할 수 있으며 의란에 對한 影響은 無視하기로 한다. 以上을 綜合하여 블록線圖를 作成하면 Fig. 2 의 같이 되므로.

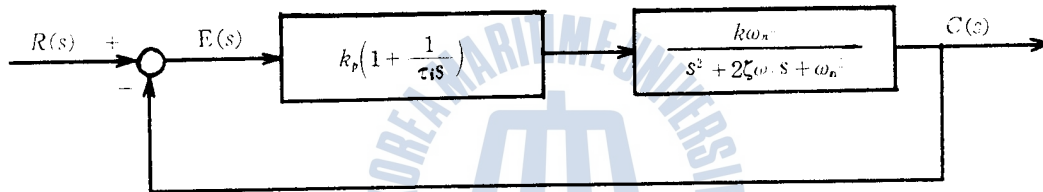


Fig. 2 Block diagram of the PI controller for a second-order system.

이 系統의 開回路傳達函數를 $G(s)$, 閉回路傳達函數를 $F(s)$ 라 하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G(s) &= k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \left(\frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \\ &= \frac{kk_p\omega_n^2 \left(s + \frac{1}{\tau_i} \right)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \dots\dots\dots (2.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \\ &= \frac{kk_p\omega_n^2 \left(s + \frac{1}{\tau_i} \right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 (1 + kk_p) s + \frac{kk_p\omega_n^2}{\tau_i}} \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

本論文에서는 2次系統의 制御對象을 갖는 單位 피드백 制御系統을 PI 制御하므로 制御器의 傳達函數를

$$G_1(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \dots\dots\dots (2.1)$$

단, k_p : 利得 τ_i : 積分時間 $k_p, \tau_i > 0$

制御對象의 傳達函數를

$$G_2(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dots\dots\dots (2.2)$$

단, k : 利得 ζ : 減衰率 ω_n : 固有角 周波數 $k, \zeta, \omega_n > 0$

로 表示할 수 있으며 의란에 對한 影響은 無視하기로 한다. 以上을 綜合하여 블록線圖를 作成하면 Fig. 2와 같이 되고.

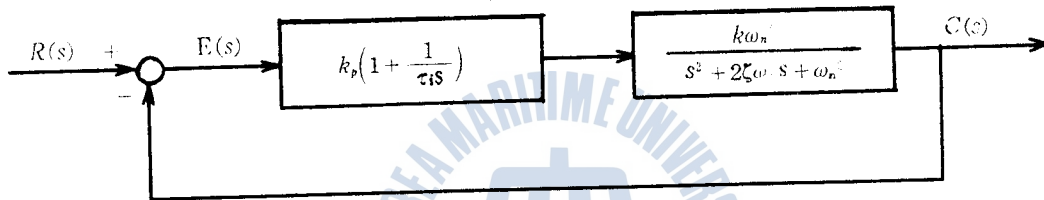


Fig. 2 Block diagram of the PI controller for a second-order system.

이 系統의 開回路傳達函數를 $G(s)$, 閉回路傳達函數를 $F(s)$ 라 하면 각각 다음과 같다.

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \left(\frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) = \frac{kk_p\omega_n^2 \left(s + \frac{1}{\tau_i} \right)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \dots\dots\dots (2.3)$$

$$F(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{kk_p\omega_n^2 \left(s + \frac{1}{\tau_i} \right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 (1 + kk_p) s + \frac{kk_p\omega_n^2}{\tau_i}} \dots\dots\dots (2.4)$$

2.2 定常誤差特性

誤差의 傳達函數를 $E(s)$ 라 두면 式(2.3)에서

$$E(s) = R(s) - C(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \frac{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 (1 + kk_p) s + \frac{kk_p\omega_n^2}{\tau_i}} R(s) \dots\dots\dots (2.5)$$

單位階段入力에 對한 定常誤差(off-set)를 ϵ_p 라 두면 最終值定理에서

$$\begin{aligned}
 e_p &= \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t)] r_{(t)} = \mathcal{U}_{\omega}(t) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2(1 + kk_p)s + \frac{kk_p\omega_n^2}{\tau_i}} \frac{1}{s} \\
 &= 0 \dots \dots \dots (2.6)
 \end{aligned}$$

이 되며 制御系統은 積分因子를 包含하므로 定常誤差가 改善되어 짐을 알 수 있다.

2.3 安定性 判別

가. Hurwitz 安定條件

式(2.4)에서 制御系統의 特性方程式은

$$s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2(1 + kk_p)s + \frac{kk_p\omega_n^2}{\tau_i} = 0 \dots \dots \dots (2.7)$$

이 方程式의 根이 負의 實數部를 갖기 위한 必要充分條件은 特性方程式의 各 係數 및 Hurwitz의 行列式이 다음 條件들을 만족하여야만 한다.

特性方程式의 係數

$$2\zeta\omega_n > 0, \omega_n^2(1 + kk_p) > 0, \frac{kk_p\omega_n^2}{\tau_i} > 0 \dots \dots \dots (2.8)$$

行列式의 값

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2\zeta\omega_n & kk_p\omega_n^2/\tau_i \\ 1 & \omega_n^2(1 + kk_p) \end{vmatrix} > 0 \dots \dots \dots (2.9)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2\zeta\omega_n & kk_p\omega_n^2/\tau_i & 0 \\ 1 & \omega_n^2(1 + kk_p) & 0 \\ 0 & 2\zeta\omega_n & kk_p\omega_n^2/\tau_i \end{vmatrix} > 0 \dots \dots \dots (2.10)$$

$\zeta, \omega_n, k, k_p, \tau_i > 0$ 인 條件을 考慮하여 式(2.8), 式(2.9), 式(2.10)을 간단히 하면

$$\tau_i > \frac{kk_p}{2\zeta\omega_n(1 + kk_p)} \dots \dots \dots (2.11)$$

따라서 制御系統은 式(2.11)의 條件을 만족하는 한 恒時 安定한 狀態에 있게 된다.

나. 根軌跡法에 依한 安定條件

式(2.3)의 開回路傳達函數式

$$G(s) = \frac{kk_p\omega_n^2(s + \frac{1}{\tau_i})}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \dots \dots \dots (2.12)$$

에는 2개의 퍼래미터가 同時에 變하고 있으므로 一般化 根軌跡法³⁾을 利用하여 安定條件을 求하는 것이 容易하다. 式(2.12)에서 $kk_p\omega_n^2 = K$, $1/\tau_i = T_i$ 라 두고 τ_i 를 포함하지 않는 項을 $K/s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = P(s)$ 라 두면

$$G(s) = (s + T_i)P(s)$$

이 系의 閉回路傳達函數는

$$\begin{aligned} \frac{C'(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + (s + T_i)P(s)} \\ &= \frac{\frac{G(s)}{1 + sP(s)}}{1 + \frac{T_i P(s)}{1 + sP(s)}} \end{aligned}$$

等價系의 閉回路傳達函數를 $G'(s)$ 라 하면

$$\begin{aligned} G'(s) &= \frac{T_i P(s)}{1 + sP(s)} \\ &= \frac{T_i \frac{K}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}}{1 + s \frac{K}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}} \\ &= \frac{T_i K}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + K)} \quad \dots\dots\dots (2\cdot13) \end{aligned}$$

이 等價 閉回路傳達函數의 極은 積分制御器가 없는 ($T_i=0$ 즉 $\tau_i \rightarrow \infty$) 閉回路系의 特性方程式의 根에나 原點에서 極 하나가 더 追加된 형태이며 出發點은 2次系の 根軌跡上의 任意의 2點과 原點이 된다.

根軌跡을 追跡하기 위해 根軌跡의 漸近線의 交點(σ_0), 漸近線의 角度(θ), 分枝點(BP), 虛軸과의 交叉點(γ), 이때의 T_i 값들을 計算해보면 다음과 같다.

i) 漸近線의 交點

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{\Sigma G'(s) \text{의 極} - \Sigma G'(s) \text{의 零點}}{P - Z} \\ &= \frac{(0 - \zeta\omega_n + \sqrt{\omega_n^2(\zeta^2 - 1)} - K) - (\zeta\omega_n - \sqrt{\omega_n^2(\zeta^2 - 1)} - K) - 0}{3 - 0} \\ &= -\frac{2}{3}\zeta\omega_n \end{aligned}$$

단, P : 極의 數 Z : 零點의 數

ii) 漸近線의 角度

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(2n+1)\pi}{P-Z} \\ &= \frac{(2n+1)\pi}{3} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ (n=0, 1, 2) \end{aligned}$$

iii) 分枝點

式(2·13)의 特性方程式

$$1 + G'(s) = s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + K) + T_i K = 0 \quad \dots\dots\dots (2\cdot14)$$

에서 T_i 를 s 에 關하여 微分하면

$$\begin{aligned} K \frac{dT_i}{ds} &= -(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + K) - s(2s + 2\zeta\omega_n) \\ &= -(3s^2 + 4\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + K) = 0 \end{aligned}$$

s에 對해 풀면 實軸上의 分枝點은

$$BP = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(4\zeta^2 - 3)\omega_n^2 - 3K}}{3}$$

iv) 虛軸과의 交叉點

虛軸을 ぬ는 點에서의 周波數는 式(2.14)로 주어지는 特性方程式의 Routh 表를 作成하면 求할 수 있다.

s^3	1	$\omega_n^2 + K$
s^2	$2\zeta\omega_n$	$T_i K \leftarrow$ 補助方程式 係數
s^1	$\frac{2\zeta\omega_n(\omega_n^2 + K) - T_i K}{2\zeta\omega_n}$	0
s^0	$T_i K$	0

s^1 의 第1要素를 0으로 놓으면

$$T_i K = 2\zeta\omega_n(\omega_n^2 + K) \dots \dots \dots (2.15)$$

補助方程式 $2\zeta\omega_n s^2 + T_i K = 0$ 에 式(2.15)를 代入하고 s에 對해 풀면

$$r = \pm j\sqrt{\omega_n^2 + K}$$

v) 虛軸과의 交叉點에서의 T_i 값

式(2.15)에서

$$T_i = \frac{2\zeta\omega_n(\omega_n^2 + K)}{K}$$

以上을 綜合하여 T_i 를 0에서 ∞ 까지 變化시킬 때의 $K = K_1, K_2$ (K_1, K_2 : 任意常數, $K_2 > K_1$) 根軌跡을 追跡해 보면

① $0 < K_1 < K_2 \leq \omega_n^2(\zeta^2 - 1)$

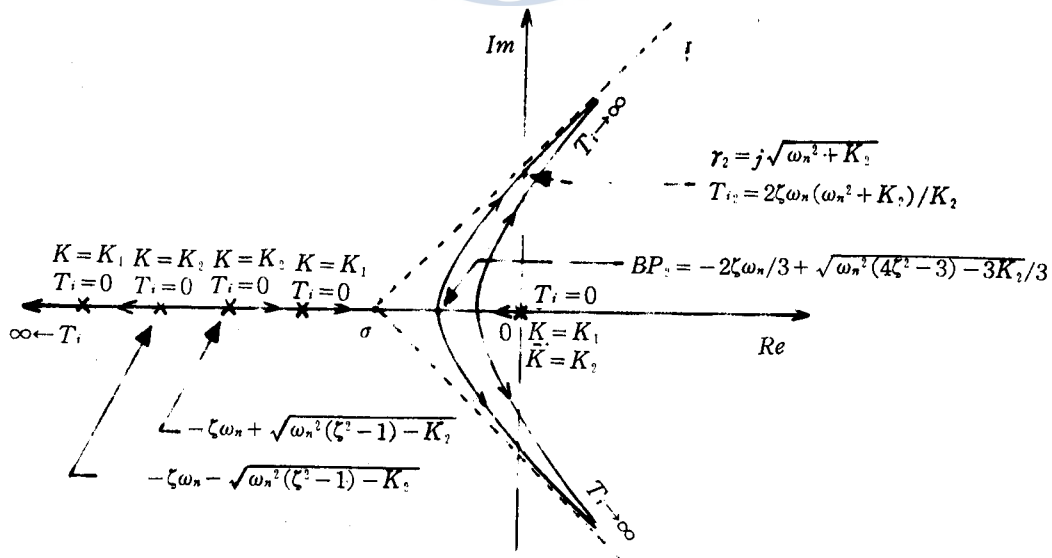


Fig. 3 Root locus of the system for $0 < K \leq \omega_n^2(\zeta^2 - 1)$.

② $\omega_n^2(\zeta^2 - 1) < K_1 < K_2 \leq \omega_n^2(4\zeta^2 - 3)/3$

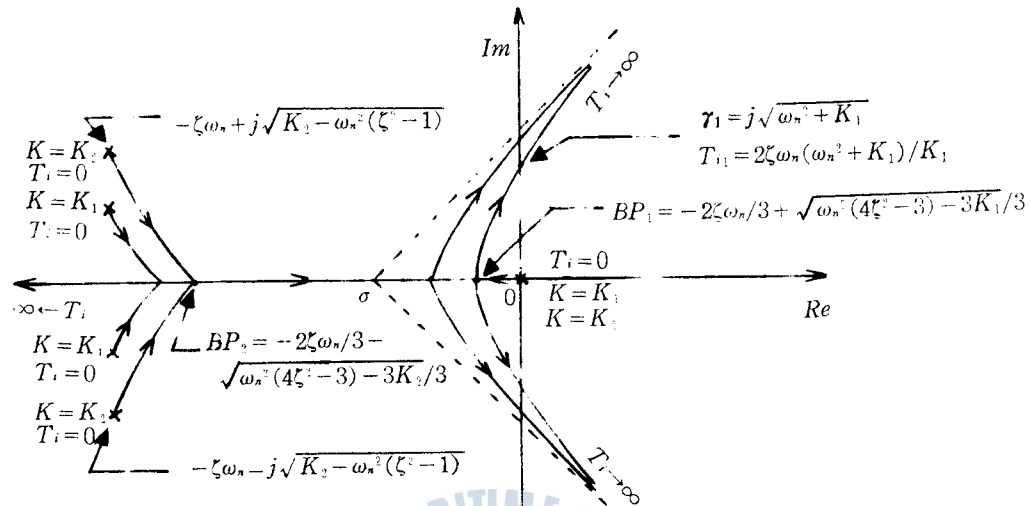


Fig. 4 Root locus of the system for $\omega_n^2(\zeta^2 - 1) < K \leq \omega_n^2(4\zeta^2 - 3)/3$.

③ $K_1 > \omega_n^2(4\zeta^2 - 3)/3$

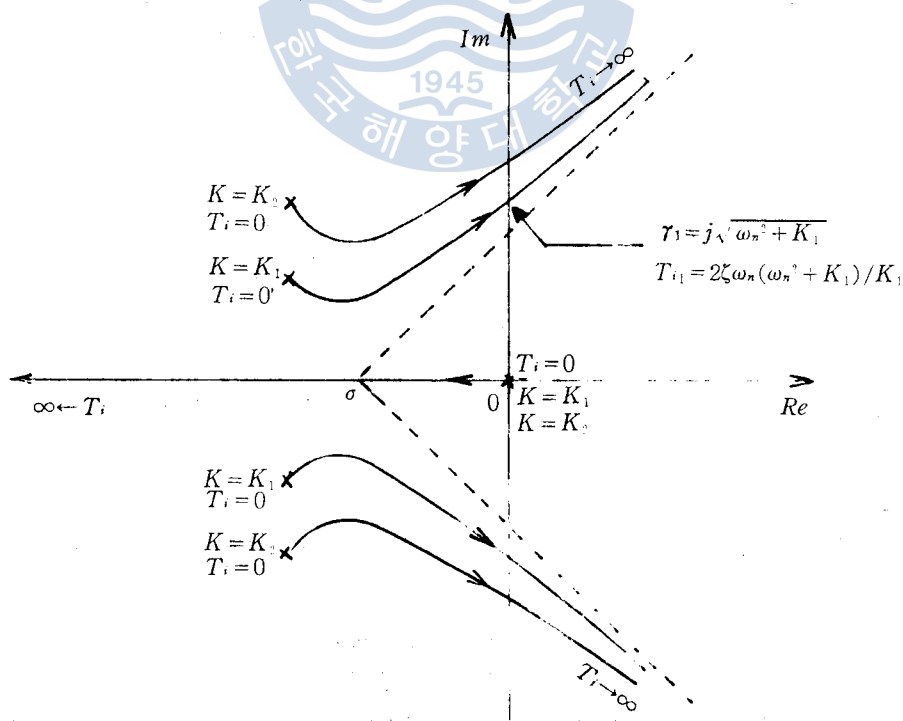


Fig. 5 Root locus of the system for $K > \omega_n^2(4\zeta^2 - 3)/3$.

Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5에서 알 수 있듯이 어느 것이나 T_i 를 크게 하면 즉 τ_i 를 적게 하면 系는 점점 振動하게 되고 臨界值 $T_i = 2\zeta\omega_n(\omega_n^2 + K)/K$ 를 넘어서면 不安定한 系가 됨을 알 수 있다. 따라서 安定한 系가 되기 위해서는 $T_i < 2\zeta\omega_n(\omega_n^2 + K)/K$ 즉 $\tau_i > K/2\zeta\omega_n(\omega_n^2 + K) = kk_p/2\zeta\omega_n(1 + kk_p)$ 가 成立해야 하며 이것은 앞에서 求한 條件과 一致한다.

다. Nyquist 安定條件

式(2.3)의 周波數傳達函數는

$$G(j\omega) = \frac{kk_p\omega_n^2[(j\omega) + \frac{1}{\tau_i}]}{j\omega[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2]} \dots\dots\dots (2.16)$$

式(2.16)의 分母, 分子에 ω_n^3 을 나누고 $\omega/\omega_n = u$ (相對角周波數)라 두면

$$G(j\omega) = \frac{kk_p[(ju) + \frac{1}{\tau_i\omega_n}]}{ju[(ju)^2 + 2\zeta(ju) + 1]} \dots\dots\dots (2.17)$$

$$= \frac{kk_p(\frac{1}{\tau_i\omega_n} + ju)}{u[-2\zeta u + j(1-u^2)]}$$

$$= \frac{kk_p[(\frac{1}{\tau_i\omega_n})^2 + u^2]}{u\{[u(1-u^2) - \frac{2\zeta u}{\tau_i\omega_n}] + j[\frac{1-u^2}{\tau_i\omega_n} + 2\zeta u^2]\}} \dots\dots\dots (2.18)$$

Nyquist 線圖가 實軸을 끊을 때 이 點에 對應하는 相對角周波數를 u_c (Critical relative angular velocity)라 하면 $u_c^2 = 1/(1 - 2\zeta\omega_n\tau_i)$ 가 되며 實軸과의 交點을 G_c 라 두면

$$G_c = \frac{kk_p(\frac{1}{\tau_i^2\omega_n^2} + u_c^2)}{u_c^2(1 - u_c^2 - \frac{2\zeta}{\tau_i\omega_n})}$$

$$= \frac{kk_p(\frac{1}{1 - 2\zeta\omega_n\tau_i} + \frac{1}{\tau_i^2\omega_n^2})}{\frac{1}{1 - 2\zeta\omega_n\tau_i}(1 - \frac{1}{1 - 2\zeta\omega_n\tau_i} - \frac{2\zeta}{\tau_i\omega_n})}$$

$$= \frac{kk_p(2\zeta\omega_n\tau_i - 1)}{2\zeta\omega_n\tau_i} \dots\dots\dots (2.19)$$

時計 方向으로 回轉하는 Nyquist 經路에 對한 Nyquist 線圖를 安定系와 不安定系로 區分해서 생각 해 보면

i) 安定系

式(2.3) 開回路傳達函數의 Nyquist 線圖가 GH 平面上的 點(-1, $j0$)를 一周하는 廻수를 N 라 하면

$$N = Z - P$$

Z : s 平面의 右半平面에 存在하는 $1 + G(s)$ 零點數

P : s 平面의 右半平面에 存在하는 $1 + G(s)$ 極點數

安定系에서는 $Z=0, P=0$ 이므로 $N=0$ 이 되어 Nyquist 線圖는 點(-1, $j0$)를 包圍하지 않는다. 따라서 Nyquist 經路가 $+j\infty$ 에서 $+j0$ 까지 變할 때 이에 對應하는 $G(s)H(s)$ 線圖를 圖示해 보면



$$\lim_{s \rightarrow +j\infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow +j\infty} \frac{kk_p \omega_n^2 s}{s^3} = 0 / -180^\circ$$

$$\lim_{s \rightarrow +j0} G(s) = \lim_{s \rightarrow +j0} \frac{kk_p \omega_n^2 / \tau_i}{\omega_n^2 s} = \infty / -90^\circ$$

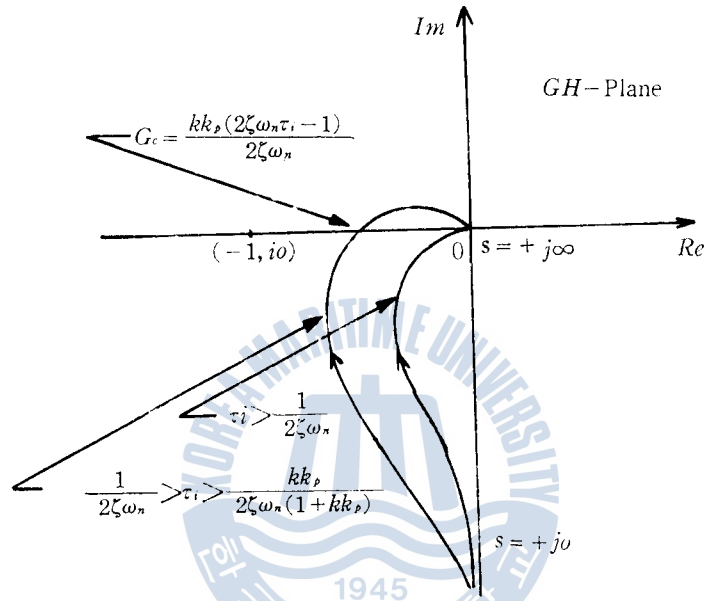


Fig. 6 Polar plot of $1+G(s)$ for the stable system.

Fig. 6 과 같으며 여기서 τ_i 가 점점 커지면 $G(s)H(s)$ 線圖는 點 $(-1, j0)$ 가까이를 지나게 되나 點 $(-1, j0)$ 을 包圍하지 않는다는 사실을 確認할 수 있다.

ii) 不安定系

不安定系에서는 Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5 에서 알 수 있듯이 特性方程式의 根 2 개가 s 平面의 右半平面에 存在하게 되므로 $N=Z-P=2$ 가 되어 Nyquist線圖는 點 $(-1, j0)$ 을 包圍하면서 2回轉하게 된다.

따라서 Fig. 7 과 같은 不安定한 系가 安定하기 위해서는

$$G_c = \frac{kk_p(2\zeta\omega_n\tau_i - 1)}{2\zeta\omega_n\tau_i} > -1$$

즉 $\tau_i > kk_p / 2\zeta\omega_n(1 + kk_p)$ 가 成立해야 하며 이것도 앞에서 求한 條件과 一致한다.

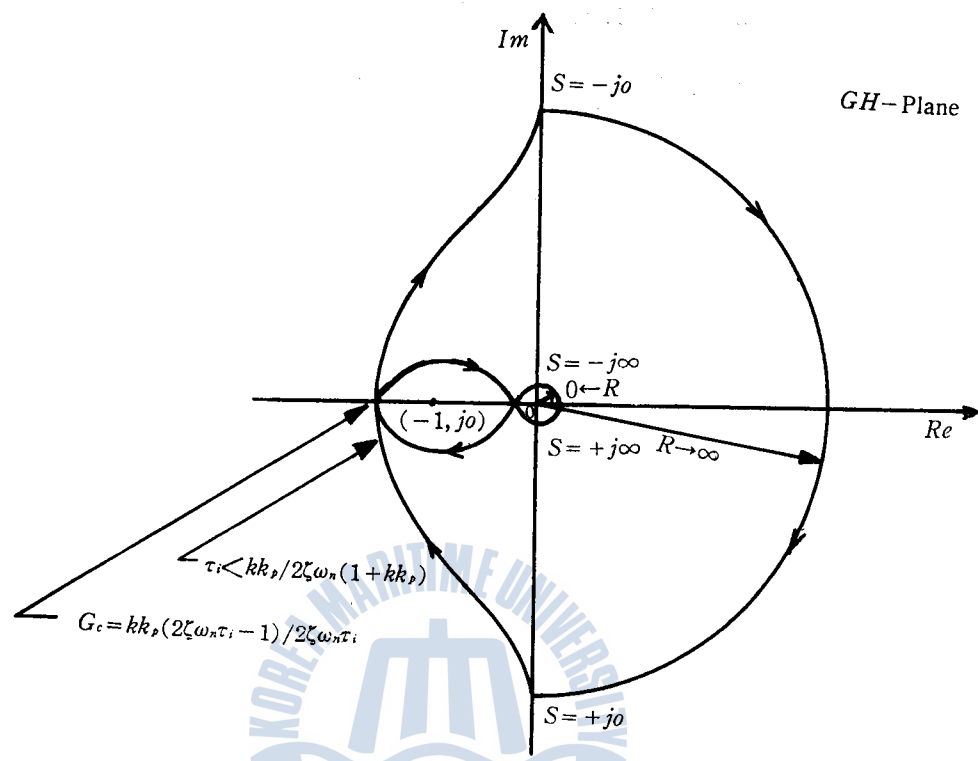


Fig. 7 Polar plot of $1+G(s)$ for the unstable system.

2.4 最適 퍼라미터 推定

여기서는 序論에서 밝힌 바와 같이 過渡應答의 質을 評價하는데 制御誤差의 2乘面積 즉 2乘制御面積을 導入하여 이것이 最少가 되도록 制御系統의 퍼라미터를 적절히 結定하기로 한다.

2乘制御面積²⁾을 F_2 라고 하면

$$F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [e(t) - e(\infty)]^2 dt + \alpha \cdot |e(\infty)|^2$$

단, α : 荷重係數

$e(\infty) = \varepsilon, = 0$ 이므로

$$F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(t) dt$$

Parseval 定理를 利用하면

$$F_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega$$

여기서 $|E(j\omega)|^2$ 은 ω 에 對한 偶函數이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E(j\omega) \cdot E(-j\omega) d\omega$$

式(2.5)에서



$$E(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2(1 + kk_p)s + kk_p\omega_n^2/\tau_i}$$

라 두면

$$\begin{aligned} D(s) &= s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2(1 + kk_p)s + kk_p\omega_n^2/\tau_i \\ N(s) \cdot N(-s) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \cdot (s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \\ &= s^4 + 2\omega_n^2(1 - 2\zeta^2)s^2 + \omega_n^4 \end{aligned}$$

2次制御面積 F_2 는 다음과 같이 求해진다.

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{N(j\omega) \cdot N(-j\omega)}{D(j\omega) \cdot D(-j\omega)} d\omega \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{B}{2\alpha H_2} \\ &= \frac{kk_p + 4\zeta^2 - 1 + \frac{2\zeta\omega_n\tau_i}{kk_p}}{4\zeta\omega_n(1 + kk_p - \frac{kk_p}{2\zeta\omega_n\tau_i})} \quad (2\cdot20) \end{aligned}$$

만, $a_1 = 1$ $a_2 = 2\zeta\omega_n$ $a_3 = \omega_n^2(1 + kk_p)$ $a_4 = kk_p\omega_n^2/\tau_i$

$b_1 = 1$ $b_2 = 2\omega_n^2(1 - 2\zeta^2)$ $b_3 = \omega_n^4$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

式(2·20)에서

$$\left. \begin{aligned} 2\zeta\omega_n = a > 0 \\ 4\zeta^2 - 1 = b > -1 \\ kk_p = x > 0 \\ a\tau_i = y > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2\cdot21)$$

라 두면

$$F_2 = \frac{x + b + \frac{1}{z}}{2a(1 + x - z)} \quad (2\cdot22)$$

여기서

$$2aF_2 = J(x, z) = \frac{x + b + \frac{1}{z}}{x + 1 - z} \quad (2\cdot23)$$

라 定義한다.

한편 式(2·11)의 安定條件에 式(2·21)을 代入하면 $1 + x > x/y$ 가 되며 Fig. 8은 이것을 $x-z$ 平面에 圖示한 것이다.

安定한 系는 빗금친 部分 內에 存在해야 함을 알 수 있으며 위 條件을 다시 $1 + x > z$ 로 表示하면 Fig. 9와 같이 $x-z$ 平面에 圖示할 수 있다.

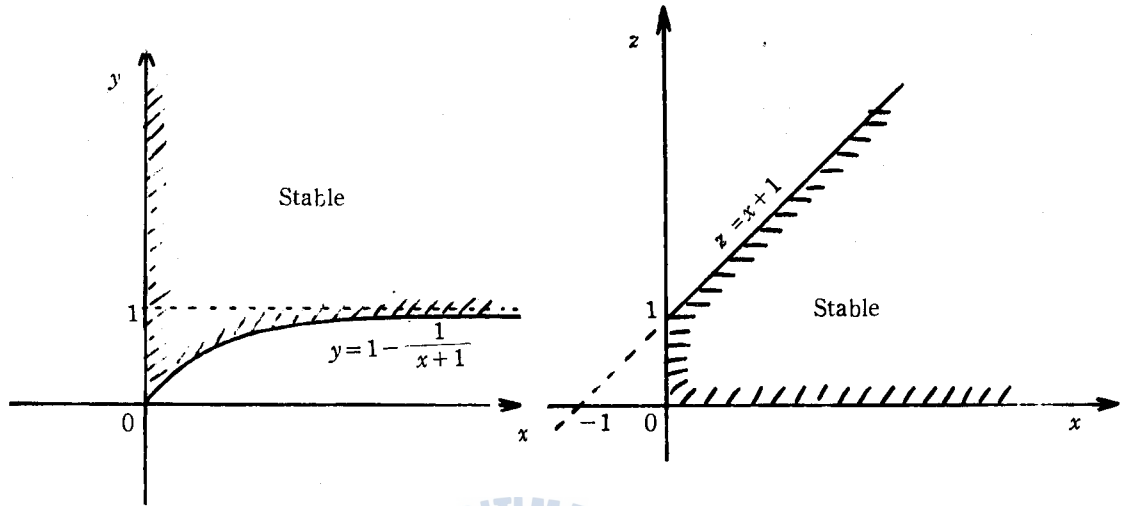


Fig. 8 Stability in x-y plane.

Fig. 9 Stability in x-z plane.

式(2·23)에서

$$\left. \begin{aligned} b + \frac{1}{z} &= P \\ 1 - z &= Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2\cdot24)$$

라 놓으면

$$\begin{aligned} J(x, z) &= \frac{x+P}{x+Q} \\ &= 1 + \frac{P-Q}{x+Q} \end{aligned} \dots\dots\dots (2\cdot25)$$

式(2·25)를 圖示한 Fig. 10에서 보면 x 가 0에서 增加할 때 $J(x, z)$ 는 P, Q 값에 따라 一定하든지 또는 單調增加, 單調減少 狀態를 나타낼 뿐 極點이 存在하지 않는다.

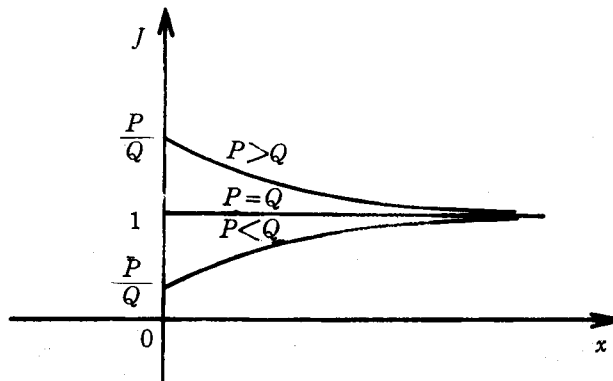


Fig. 10 Corresponding relation of J versus x

式(2.24)의 P, Q 交點은 $b + \frac{1}{z} = 1 - z$ 에서

$$z = \frac{-(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4}}{2}$$

따라서 根號안의 $(b-1)^2 - 4$ 의 크기에 따라 $z-P, Q$ 平面上的 P, Q 模樣을 調査해보면,

i) $(b-1)^2 < 4$ 즉 $0 < \zeta < 1$ 일 때 and Q

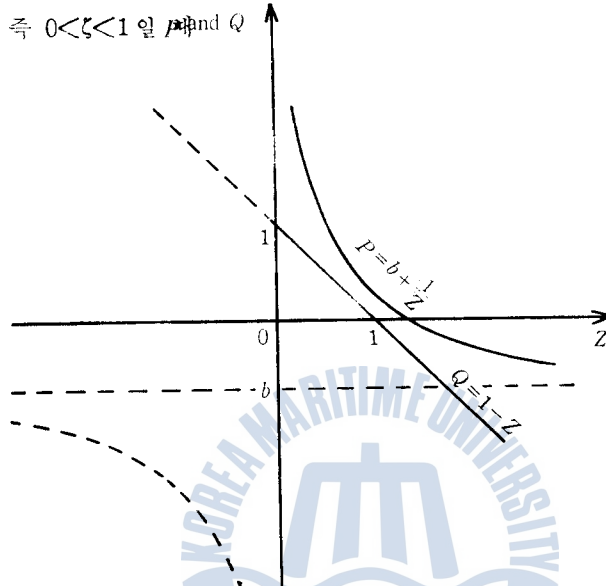


Fig. 11 Corresponding relation of P and Q versus z when $0 < \zeta < 1$.

ii) $(b-1)^2 = 4$ 즉 $\zeta = 1$ 일 때

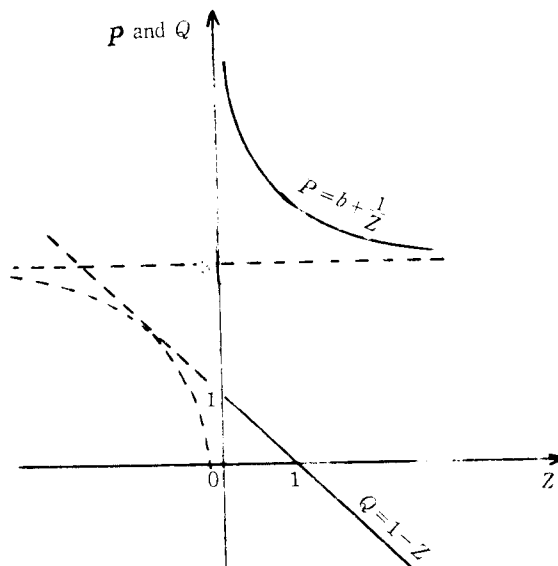


Fig. 12 Corresponding relation of P and Q versus z when $\zeta = 1$.

iii) $(b-1)^2 > 4$ 즉 $\zeta > 1$ 일 때

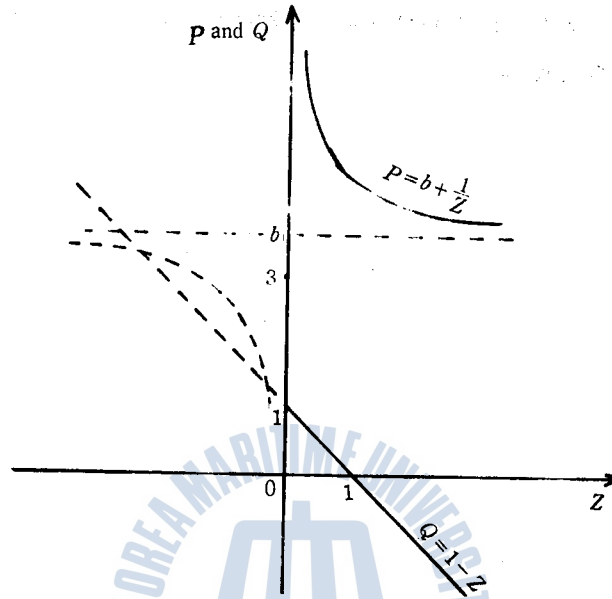


Fig. 13 Corresponding relation of P and Q versus z when $\zeta > 1$.

式(2·23)에서 $J_1(x, z) = x + 1 - z$, $J_2(x, z) = x + b + \frac{1}{z}$ 라 두고 이것을 z - J_1 , J_2 平面에 圖示해 보면 Fig. 11, Fig. 12, Fig. 13에서 밝혔듯이 $z > 0$ 인 條件下에서는 恒時 $P > Q$ 이기 때문에 Fig. 14의 上部와 같은 境遇만 생기게 된다.

여기서 x , z 의 變化에 對한 $J(x, z)$ 의 變化를 살펴보면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{z \rightarrow x+1} [J(x, z)] \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{z \rightarrow x+1} \left(\frac{x+b+\frac{1}{z}}{x+1-z} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{x+b+\frac{1}{z}}{x+1-z} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+b+1}{x} \right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} [J(x, z)] \right\} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{z \rightarrow x+1} [J(x, z)] \right\} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} [J(x, z)] \right\} = \infty$$

z 가 0이나 $x+1$ 點 근방에 있을 때는 $x > 0$ 인 모든 값에 對해 $J(x, z)$ 의 값은 無限大가 되며 0이나 $x+1$ 點 근방이 아닌 곳에서는 下部 極少點을 中心으로 曲線을 나타내며 x 가 增加할수록 $J(x, z)$ 의 極少值는 減少하여 x 가 無限大의 값을 가질 때는

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+b+\frac{1}{z}}{x+1-z} \right) = 1$$

에 接近하게 된다.

따라서 任意의 x 값에서 $J(x, z)$ 의 最少 값은 Fig. 14 下部 曲線의 最右한 部分에서 얻기며 이 點에서의 z 는 式(2.23)을 z 에 關해 微分하면 求할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x, z)}{\partial z} &= \frac{dJ(x, z)}{dz} \\ &= -\frac{1}{z^2} (x+1-z) + \frac{x+b+\frac{1}{z}}{(x+1-z)^2} = 0 \end{aligned}$$

整理하여 z 에 對해 보면

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{2}{x+b}z - \frac{x+1}{x+b} &= 0 \\ z &= \frac{-1 + \sqrt{(x+1)(x+b)+1}}{x+b} \quad (z > 0) \end{aligned}$$

$J(x, z)$ 값을 最少로 하는 條件을 要約하면

- i) x 를 可能한 限 크게 한다.
- ii) 그때의 x 값에 對한 $z = \frac{\sqrt{(x+1)(x+b)+1}-1}{x+b}$ 이다.

式(2.21)을 代入하면 2乘制御面積을 最少로 하는 最適 퍼래미터는

- i) k_p 값은 可能한 限 큰 값을 取하며 이때의 k_p 값을 \hat{k}_p 라 한다.
- ii) 그때의 \hat{k}_p 값에서

$$\hat{\tau}_i = \frac{x}{az} = \frac{k\hat{k}_p(k\hat{k}_p+4\zeta^2-1)}{2\zeta\omega_n(\sqrt{(k\hat{k}_p+1)(k\hat{k}_p+4\zeta^2-1)+1}-1)} \quad \dots \dots \dots (2.26)$$

을 만족해야 한다.

이때 2乘制御面積의 最少값은 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{F}_2 = \frac{x+b+\frac{1}{z}}{2a(x+1-z)} = \frac{k\hat{k}_p+4\zeta^2-1 + \frac{2\zeta\omega_n\hat{\tau}_i}{k\hat{k}_p}}{4\zeta\omega_n(k\hat{k}_p+1 - \frac{k\hat{k}_p}{2\zeta\omega_n\hat{\tau}_i})}$$

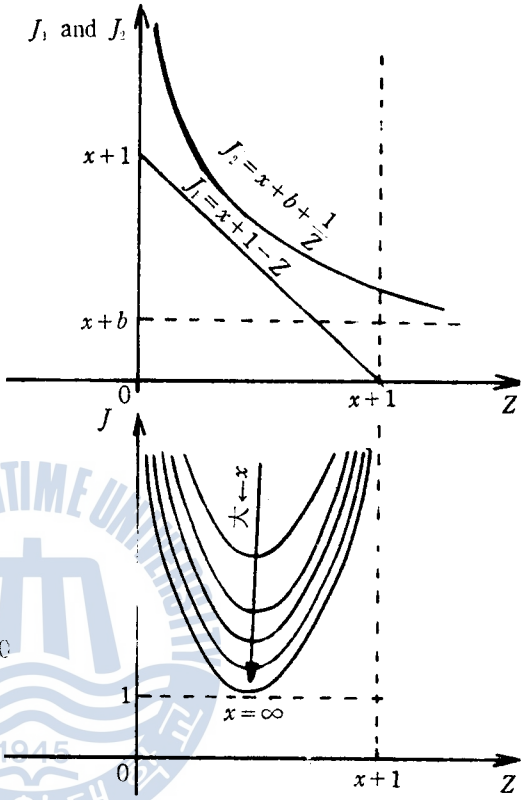


Fig. 14 Corresponding relations of J_1 and J_2 versus z and J versus z for all $z > 0$.



$$= \frac{k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1 + \frac{k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1}{\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1) + 1} - 1}}{4\zeta\omega_n \left(k\hat{k}_p + 1 - \frac{\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1) + 1} - 1}{k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1} \right)} \dots\dots\dots(2.27)$$

2.5 스윙 應答

系의 閉回路傳達函數式(2.4)에서

$$\left. \begin{aligned} 2\zeta\omega_n &= a \\ \omega_n^2(1+k\hat{k}_p) &= b \\ k\hat{k}_p\omega_n^2 &= d \\ k\hat{k}_p\omega_n^2/\tau_i &= g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.28)$$

와 같이 係數置換을 行하면

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{ds + g}{s^2 + as + bs + g}$$

이것은 式(2.29)와 같은 微分方程式 形態⁶⁾로 表示할 수 있다.

$$\ddot{c} + a\dot{c} + b\dot{c} + gc = d\dot{r} + gr \dots\dots\dots(2.29)$$

여기서

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ x_2 &= \dot{c} \\ x_3 &= \ddot{c} + \delta r \end{aligned}$$

단, δ 는 r 項을 除去하기 위한 任意常數
라 두면

$$\dot{x}_1 = \dot{c} = x_2 \dots\dots\dots(2.30)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{c} = x_3 - \delta r \dots\dots\dots(2.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \ddot{c} + \delta \dot{r} = (d\dot{r} + gr - gc - b\dot{c} - a\ddot{c}) + \delta \dot{r} \\ &= (d\dot{r} + gr - gx_1 - bx_2 - ax_3 + a\delta r) + d\dot{r} \\ &= -gx_1 - bx_2 - ax_3 + (g + a\delta)r + (d + \delta)\dot{r} \dots\dots\dots(2.32) \end{aligned}$$

式(2.32)에서 \dot{r} 項이 0이 되려면 $d + \delta = 0$ 즉 $\delta = -d$ 이며 이것을 式(2.31), 式(2.32)에 代入하면

$$\dot{x}_2 = x_3 + dr \dots\dots\dots(2.33)$$

$$\dot{x}_3 = -gx_1 - bx_2 - ax_3 + (g - ad)r \dots\dots\dots(2.34)$$

따라서 式(2.29)의 2階段分方程式은 式(2.30), 式(2.33) 및 式(2.34)로부터 Vector 形態로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot r \dots\dots\dots(2.35)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{x} \dots\dots\dots(2.36)$$

$$\text{단, } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -g & -b & -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ g-ad \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

式(2.35)의 양변을 Laplace 變換하면

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0^+) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}(s)$$

여기서 初期條件

$$\mathbf{x}(0^+) = \begin{pmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \\ x_3(0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이므로 $\mathbf{X}(s)$ 에 對해 풀면

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{D}]^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}(s) \dots\dots\dots (2.37)$$

式(2.37)을 Laplace 逆變換하면

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \phi(t-t') \cdot \mathbf{B} \cdot r(t') dt'$$

$$\text{단, } \phi(t) = L^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{D}]^{-1}\} \dots\dots\dots (2.38)$$

$t-t' = \tau$ 라 놓으면

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \int_0^t \phi(\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot r(t-\tau) (-d\tau) \\ &= \int_0^t \phi(\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot r(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

函數 $r(t-\tau)$ 를 Taylor 級數展開하면

$$r(t-\tau) = r(t) - \tau r'(t) + \frac{\tau^2}{2!} r''(t) - \frac{\tau^3}{3!} r'''(t) + \dots\dots\dots$$

階段狀入力인 경우는 $r'(t) = r''(t) = r'''(t) = \dots\dots\dots 0$ 이므로, $r(t-\tau) = r(t)$ 가 되며 이것을 위 式에 代
入하면

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \phi(\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot r(t) d\tau \dots\dots\dots (2.39)$$

式(2.38)에서 定義한 Matrix $\phi(\tau)$ 를 求해 보면

$$\begin{aligned} [s\mathbf{I} - \mathbf{D}]^{-1} &= \frac{adj[s\mathbf{I} - \mathbf{D}]}{|s\mathbf{I} - \mathbf{D}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} s^2 + as + b & s + a & 1 \\ g & s^2 + as & s \\ -gs & -bs - g & s \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ g & b & s + a \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

따라서 Laplace 逆變換하면

$$\phi(\tau) = L^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{D}]^{-1}\} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(\tau) & \phi_{12}(\tau) & \phi_{13}(\tau) \\ \phi_{21}(\tau) & \phi_{22}(\tau) & \phi_{23}(\tau) \\ \phi_{31}(\tau) & \phi_{32}(\tau) & \phi_{33}(\tau) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2.40)$$

$$\text{단, } \phi_{11} = L^{-1}\left\{\frac{s^2 + as + b}{s^3 + as^2 + bs + g}\right\} \quad \phi_{12} = L^{-1}\left\{\frac{s + a}{s^3 + as^2 + bs + g}\right\} \quad \phi_{13} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 + as^2 + bs + g}\right\}$$

$$\begin{aligned} \phi_{21} &= L^{-1} \left\{ \frac{g}{s^3 + as^2 + bs + g} \right\} & \phi_{22} &= L^{-1} \left\{ \frac{s^2 + as}{s^3 + as^2 + bs + g} \right\} & \phi_{23} &= L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^3 + as^2 + bs + g} \right\} \\ \phi_{31} &= L^{-1} \left\{ \frac{-gs}{s^3 + as^2 + bs + g} \right\} & \phi_{32} &= L^{-1} \left\{ \frac{-bs - g}{s^3 + as^2 + bs + g} \right\} & \phi_{33} &= L^{-1} \left\{ \frac{s^2}{s^3 + as^2 + bs + g} \right\} \end{aligned}$$

式(2.39), 式(2.40)을 式(2.36)에 代入해서 最適應答 $\hat{c}(t)$ 를 求하면

$$\begin{aligned} \hat{c}(t) &= \int_0^t [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ g-ad \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot d\tau \\ &= \int_0^t [d\phi_{12} + (g-ad)\phi_{13}] d\tau \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{ds+g}{s^3 + as^2 + bs + g} \right\} d\tau \dots\dots\dots(2.41) \end{aligned}$$

단, $r(t) = u_o(t)$ $a = 2\zeta\omega_n$ $b = \omega_n^2(1+k\hat{k}_p)$ $d = k\hat{k}_p\omega_n^2$ $g = k\hat{k}_p\omega_n^2/\tau_i$

式(2.41)의 積分記號속에 있는 s 에 關한 3次方程式은 根의 公式을 利用하여 解를 얻을 수 있으므로 應答 $\hat{c}(t)$ 도 解析的으로 求할 수 있다.

2.6 共振頂點(M_r 值) 및 共振周波數(ω_r) 結定

制御系를 設計하는데 必要한 定數中의 하나이며 M_r 值가 커지면 過渡應答時 오우버슈트가 커진다. 系の 閉回路傳達函數의 周波數傳達函數는 式(2.4)에서

$$F(j\omega) = \frac{k\hat{k}_p\omega_n^2(j\omega + 1/\tau_i)}{(j\omega)^3 + 2\zeta\omega_n(j\omega)^2 + \omega_n^2(1+k\hat{k}_p)(j\omega) + k\hat{k}_p\omega_n^2/\tau_i}$$

$\omega/\omega_n = u$ 라 두고 $F(j\omega)$ 의 크기를 M 이라 하면

$$M = |F(j\omega)| = k\hat{k}_p \sqrt{\frac{1/\tau_i^2\omega_n^2 + u^2}{(k\hat{k}_p/\tau_i\omega_n - 2\zeta u^2)^2 + [u(1+k\hat{k}_p) - u^3]^2}} \dots\dots\dots(2.42)$$

M 을 u 에 關하여 微分하고 0으로 놓으면 다음과 같은 6次方程式을 얻을 수 있다.

$$2u^5 + (4\zeta^2 - 2 - 2k\hat{k}_p + \frac{3}{\tau_i^2\omega_n^2})u^4 + \frac{2(4\zeta^2 - 2 - 2k\hat{k}_p)}{\tau_i^2\omega_n^2}u^3 + \frac{2k\hat{k}_p + 1 - 4\zeta k\hat{k}_p/\tau_i\omega_n}{\tau_i^2\omega_n^2} = 0 \dots\dots(2.43)$$

Digital computer를 利用하면 近似根을 쉽게 求할 수 있으며 여기서 求한 根中에서 式(2.42)의 M 값을 最大로 하는 것을 u_r 라 두면 M_r 值와 ω_r 는 다음과 같이 얻어진다.

$$M_r = M_{u_r} = k\hat{k}_p \sqrt{\frac{1/\tau_i^2\omega_n^2 + u_r^2}{(k\hat{k}_p/\tau_i\omega_n - 2\zeta u_r^2)^2 + [u_r(1+k\hat{k}_p) - u_r^3]^2}} \dots\dots\dots(2.44)$$

$$\omega_r = \omega_n u_r$$

따라서 最適制御系統의 M_r 值와 ω_r 는 式(2.43), 式(2.44)에 $k_p = \hat{k}_p$ 및 $\tau_i = \hat{\tau}_i$ 를 代入하면 求할 수 있다.

2.7 利得餘裕(GM) 및 位相餘裕(PM) 結定

系の 相對的 安定性을 지시해 주는 것으로서 周波數應答의 Nyquist 線圖가 點(-1, $j0$)에 너무 가



값이 지나면 安定度가 減少되고 너무 멀리 떨어져 지나면 不必要하게 安定度가 增加되어 制御系統의 速應性이 나쁘게 되고 定常偏差가 增大된다. 따라서 適當한 거리를 지나는 것이 바람직하다고 본다.

(2·19)에서 Nyquist 線圖가 實軸과 交叉하는 點은 다음과 같이 주어진다.

$$G_c = \frac{kk_p(2\zeta\omega_n\tau_i - 1)}{2\zeta\omega_n\tau_i} \dots\dots\dots(2\cdot45)$$

最適制御系統의 利得餘裕는 G_c 의 分子의 크기에 따라 달라지므로

i) $2\zeta\omega_n\tau_i = k\hat{k}_p/(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)/(\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - 1) \geq 1$ 일 때

式(2·45)는 陽의 實軸點이 되어 $|G_c| = 0$, 따라서

$$GM = 20 \log_{10} \frac{1}{|G_c|} = \infty \text{ [dB]} \dots\dots\dots(2\cdot46)$$

ii) $2\zeta\omega_n\tau_i = k\hat{k}_p/(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)/(\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - 1) < 1$ 일 때

式(2·45)는 負의 實軸點이 되며

$$\begin{aligned} |G_c| &= k\hat{k}_p(1 - 2\zeta\omega_n\tau_i)/2\zeta\omega_n\tau_i \\ &= \frac{\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - k\hat{k}_p(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1) - 1}{k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1} \end{aligned}$$

이므로, 따라서

$$GM = 20 \log_{10} \frac{k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1}{\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - k\hat{k}_p(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1) - 1} \text{ [dB]} \dots\dots\dots(2\cdot47)$$

位相餘裕는 式(2·17)의 크기가 1 일 때 $\text{Arg. } G(j\omega)$ 와 -180° 와의 차의 크기를 말하므로

$$|G(j\omega)| = \frac{kk_p\sqrt{1/\tau_i^2\omega_n^2 + u^2}}{u\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2}} = 1$$

에 $k_p = \hat{k}_p$, $\tau_i\omega_n = \hat{\tau}_i\omega_n = k\hat{k}_p/(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)/2\zeta(\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - 1)$ 을 代入하고 整理해서 간단히 하면 u 에 對한 6次方程式이 求해진다.

$$u^6 + 2(2\zeta^2 - 1)u^4 + (1 - k^2\hat{k}_p^2)u^2 - \frac{4\zeta^2(\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - 1)^2}{(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)^2} = 0$$

여기서 計算된 適當한 값을 u_p 라 하면 最適狀態에서의 PM 은 다음 式으로부터 求할 수 있다.

$$\begin{aligned} PM &= 180^\circ + \text{Arg. } G(j\omega) \\ &= 180^\circ + \tan^{-1}(\hat{\tau}_i\omega_n u_p) - 90^\circ - \tan^{-1}(2\zeta u_p/1 - u_p^3) \\ &= 90^\circ + \tan^{-1}[k\hat{k}_p/(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)u_p/2\zeta(\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - 1)] \\ &\quad - \tan^{-1}(2\zeta u_p/1 - u_p^3) \dots\dots\dots(2\cdot48) \end{aligned}$$

3 數值計算 및 應答實驗

3·1 數值計算

가. 制御器의 最適 퍼매미터 및 2乘制御面積

ζ, ω_n 의 여러 값에 대하여 制御對象의 利得 k 와 制御器의 利得 \hat{k} 의 곱 $k\hat{k}$ 를 變化시킬 때 式 (2.26) 및 式(2.27)를 利用하여 數值計算한 結果가 Table 1 과 같다.

Table 1 Values of the optimal parameters and square error integrals for various systems.

ζ	ω_n $k\hat{k}$	1		5		10	
		$\hat{\tau}_i$	\hat{P}_2	$\hat{\tau}_i$	\hat{P}_2	$\hat{\tau}_i$	\hat{P}_2
0.3	1	1.926	1.113	0.385	0.223	0.193	0.111
	5	8.627	0.893	1.725	0.179	0.863	0.089
	10	16.964	0.863	3.393	0.173	1.696	0.086
	100	166.966	0.836	33.393	0.167	16.697	0.084
	1000	1666.967	0.834	333.393	0.167	166.697	0.083
1.0	1	1.000	1.000	0.200	0.200	0.100	0.100
	5	3.333	0.444	0.667	0.089	0.333	0.044
	10	5.909	0.349	1.182	0.070	0.591	0.035
	100	50.990	0.260	10.198	0.052	5.099	0.026
	1000	500.999	0.251	100.200	0.050	50.100	0.025
1.7	1	0.869	1.285	0.174	0.257	0.087	0.129
	5	2.626	0.469	0.825	0.094	0.263	0.047
	10	4.297	0.314	0.860	0.063	0.430	0.031
	100	31.065	0.164	6.213	0.033	3.107	0.016
	1000	295.813	0.149	59.163	0.030	29.581	0.015

나. 共振頂點 및 共振周波數

最適系統의 特性을 周波數應答으로 檢討해보기 위해 式(2.43)과 式(2.44)에 $k, = \hat{k}, \tau_i = \hat{\tau}_i$ 를 代入 하고 $k\hat{k}$ 값의 變化에 對한 M_p 值 및 ω_p 를 數值計算하면 Table 2와 같다.

Table 2 Values of the optimal M_p and ω_p for various systems.

ζ	ω_n $k\hat{k}$	1		5		10	
		ω_p	M_p	ω_p	M_p	ω_p	M_p
0.3	1	1.361	2.329	6.804	2.329	13.609	2.329
	5	2.413	4.101	12.067	4.101	24.134	4.101
	10	3.289	5.546	16.448	5.546	32.896	5.546
	100	10.041	16.757	50.205	16.757	100.409	16.757
	1000	31.636	52.733	158.179	52.733	316.357	52.733

1.0	1	2.77	1.15	3.935	1.155	7.071	1.155
	5	2.827	1.125	10.937	1.125	20.071	1.125
	10	3.002	1.729	15.010	1.729	30.029	1.729
	100	9.950	5.049	49.749	5.049	99.499	5.049
	1000	31.607	15.827	158.034	15.827	316.069	15.827
1.7	1	0.523	1.359	2.616	1.359	5.232	1.359
	5	0.750	1.031	3.750	1.031	7.499	1.031
	10	2.289	1.131	11.447	1.131	22.894	1.131
	100	9.758	2.998	48.791	2.998	97.581	2.998
	1000	31.547	9.319	157.735	9.319	315.471	9.319

3.2 應答實驗

가. 裝置 및 方法

應答 實驗裝置로는 Hitachi 505E Analog Computer (Hitachi Electronics LTD., Co., Amplifier gain = 10⁵)가 使用되었으며 式(2.4)에서 制御系統의 閉回路傳達函數는 다음과 같이 주어 있으므로.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{ds + g}{s^3 + as^2 + bs + g}$$

$$\text{단, } a = 2\zeta\omega_n \quad b = \omega_n^2(1 + kk_p) \quad d = kk_p\omega_n^2 \quad g = kk_p\omega_n^2/\tau_i$$

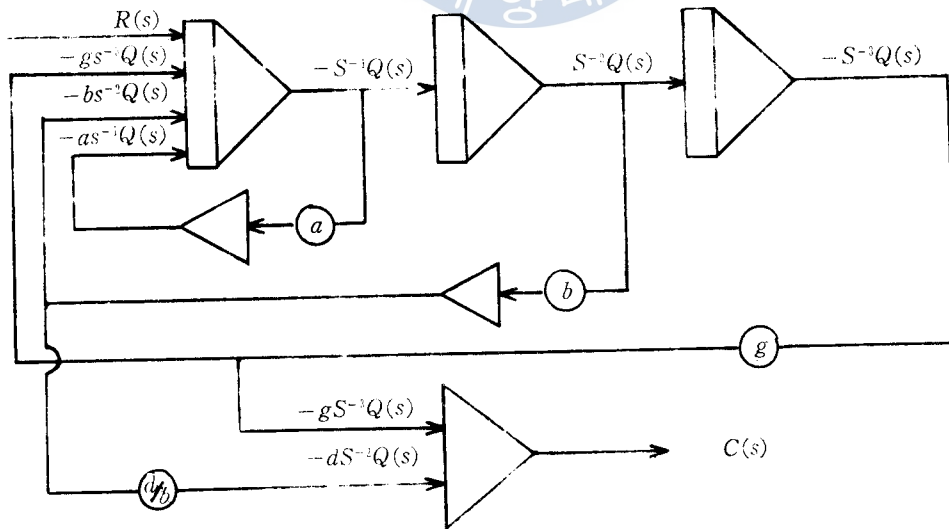


Fig. 15 The connection diagram of the analog simulation system.

分母, 分子를 s^3 로 나누면

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{ds^{-2} + gs^{-1}}{1 + as^{-1} + bs^{-2} + gs^{-3}}$$

여기서 $R(s)/(1 + as^{-1} + bs^{-2} + gs^{-3}) = Q(s)$ 라 놓으면

$$Q(s) = R(s) - as^{-1}Q(s) - bs^{-2}Q(s) - gs^{-3}Q(s)$$

$$C(s) = (ds^{-2} + gs^{-3})Q(s)$$

위 두 式을 利用하여 아날로그 계산기에 의한 應答實驗을 行하기 위한 結線圖¹⁾를 作成하며 Fig. 15 과 같이 表示되며 이 結線圖를 利用하여 스텝應答實驗을 실시했다.

나. 應答實驗 結果

Fig. 16은 實驗플랜트의 根軌跡이 不安定한 領域으로 들어가는 陽의 虛軸部分만 圖示한 것으로서 根軌跡上의 記號 ○은 最適 ζ 값을, 記號△과 □은 各各 安定領域에서 ζ 보다 커거나 작은 값을, 記號 *는 不安定領域에서의 τ_i 값을 表示하며 各 點들에서의 應答實驗結果는 Fig. 17의 (a)~(l)과 같다.

이때 入力電壓을 5V, 出力電壓을 5V/cm 또는 10V/cm, Recorder의 Speed를 100mm/min로 調整했다.

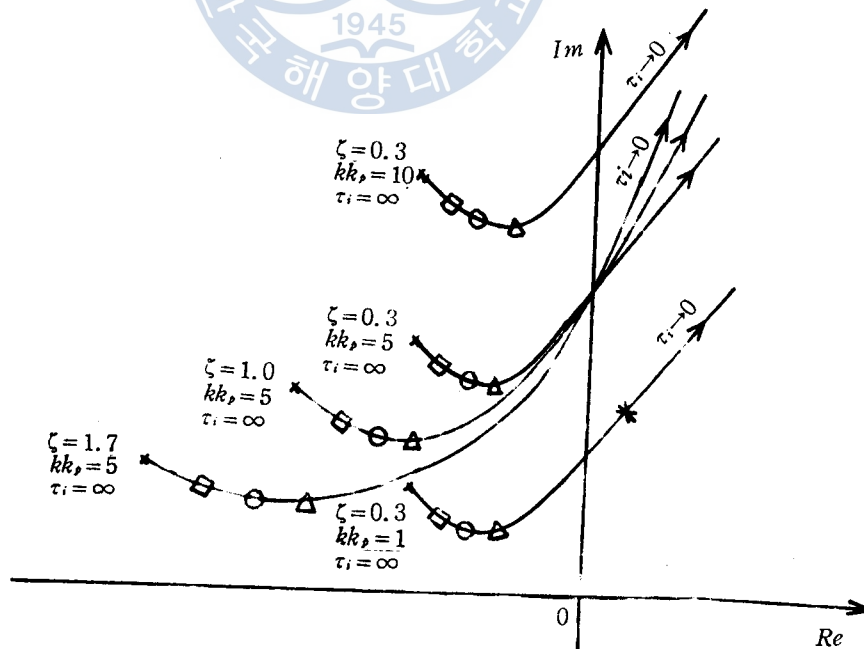
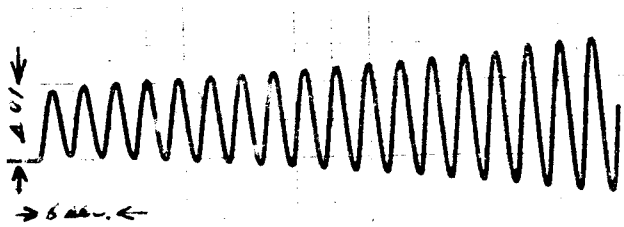
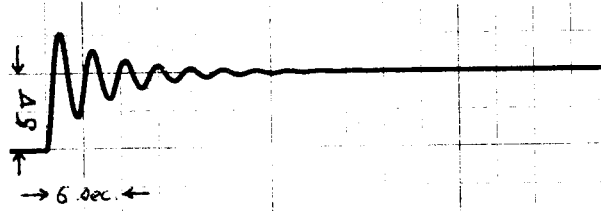


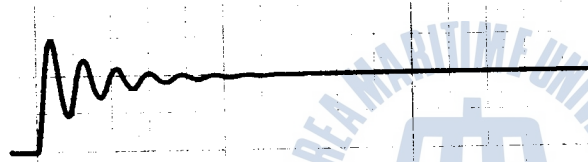
Fig. 16 Positive parts of loci of the systems experimented.



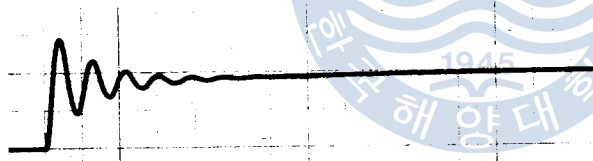
- symbol *
- $\zeta = 0.3$
- (a) $\omega_n = 1$ rad/sec
- $kk_p = 5$
- $\tau_i = 1.3$ sec



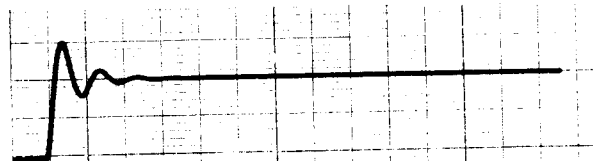
- symbol □
- $\zeta = 0.3$
- (b) $\omega_n = 1$ rad/sec
- $kk_p = 5$
- $\tau_i = 5.0$ sec



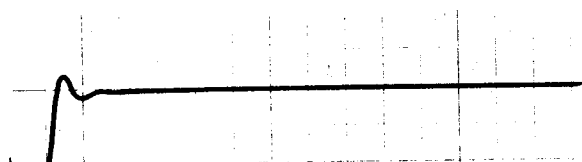
- symbol ○
- $\zeta = 0.3$
- (c) $\omega_n = 1$ rad/sec
- $k\hat{k}_p = 5$
- $\hat{\tau}_i = 8.627$ sec



- symbol △
- $\zeta = 0.3$
- (d) $\omega_n = 1$ rad/sec
- $kk_p = 5$
- $\tau_i = 20.0$ sec



- symbol □
- $\zeta = 1.0$
- (e) $\omega_n = 1$ rad/sec
- $kk_p = 5$
- $\tau_i = 1.0$ sec



- symbol ○
- $\zeta = 1.0$
- (f) $\omega_n = 1$ rad/sec
- $k\hat{k}_p = 5$
- $\hat{\tau}_i = 3.333$ sec

Fig. 17 Indicial responses of the systems experimented (a)~(f).

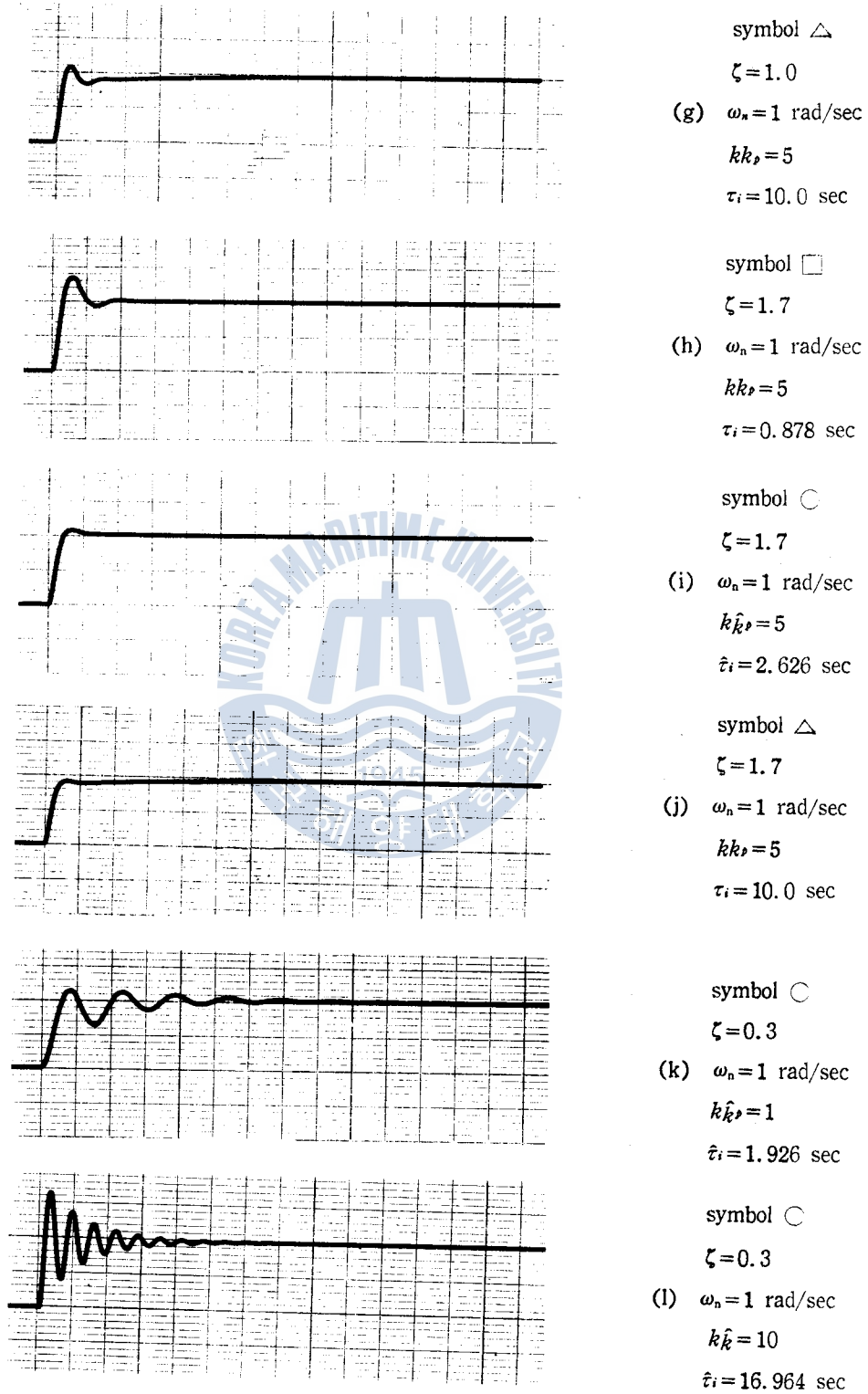


Fig. 17 Indicial responses of the systems experimented [(g)~(l)].

4. 檢討 및 結果考察

4.1 應答實驗에 對한 檢討

實驗된 結果를 살펴보면 不安定系인 그림 (a)는 예상했던 대로 時間과 더불어 振幅이 점점 커져 不安定하게 된다. $\zeta=0.3$ 인 그림 (b), (c), (d)를 보면 最適퍼레이더로 制御되는 (c)가 (b), (d)보다 2乘制御面積이 적은 良好한 波形임을 알 수 있다. 또한 $\zeta=1.0$ 인 그림 (e), (f), (g)와 $\zeta=1.7$ 인 그림 (h), (i), (j)에서도 最適制御되는 (f), (i)가 다른 應答曲線보다는 良好한 結果를 나타내고 있다.

모두 最適値로 調整되는 그림 (k), (c), (l)에서 보면 $k\hat{k}_p$ 값이 작수록 2乘制御面積은 적어지나 대신 最大오우버슈트가 커지며 그림 (c), (l), (i)를 살펴보면 一般的인 系統에서와 같이 ζ 가 적으면 振動性이 增加되어 應答速度가 빨라지며 應答時間이 길어진다.

4.2 最適 2乘制御面積에 對한 檢討

Table 1에서 보면 ζ, ω_n 의 어떠한 값에 對해서도 利得의 幅 $k\hat{k}_p$ 를 增加시키면 2乘制御面積 \hat{F}_2 는 減少함을 알 수 있으나 Fig. 18에서 보면 $k\hat{k}_p$ 가 比較的 적은 값일 때는 $k\hat{k}_p$ 값의 變化에 따라 \hat{F}_2 의 變化는 크나 $k\hat{k}_p$ 의 값이 어느 정도 커지면 \hat{F}_2 의 變化는 거의 없으며 결국 \hat{F}_2 는 $1/4\zeta\omega_n$ 의 값에 收斂하게 된다.

또한 $k\hat{k}_p$ 가 큰 값일 때는 ζ 가 큰 系統일 수록 \hat{F}_2 는 1/4 $\zeta\omega_n$ 의 값에 收斂하는 경향을 나타내며 式(2.27)에서 보면 \hat{F}_2 는 ω_n 에 對해서는 逆比例해서 減少함을 알 수 있다.

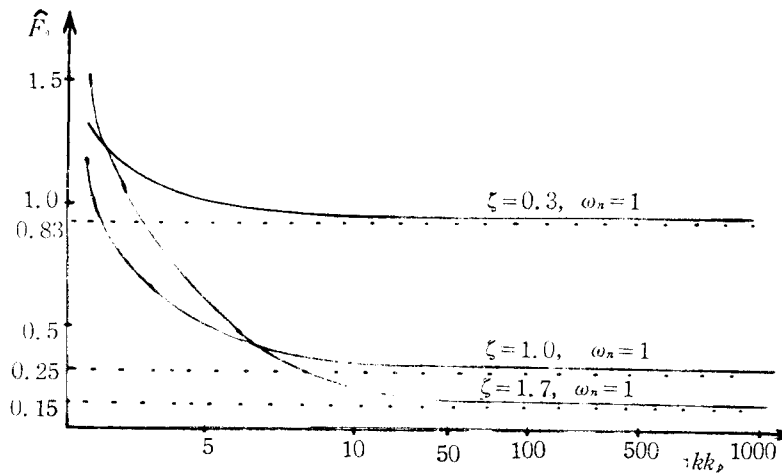


Fig. 18 Values of \hat{F}_2 versus $k\hat{k}_p$.

4.3 共振頂點 및 共振周波數에 對한 檢討

앞서 數值計算에서 求한 最適 퍼래미터에 對한 M_r 值를 利得의 倂 $k\hat{k}_r$ 의 變化에 따라 그래프를 作成해 보면 Fig. 19 와 같다.

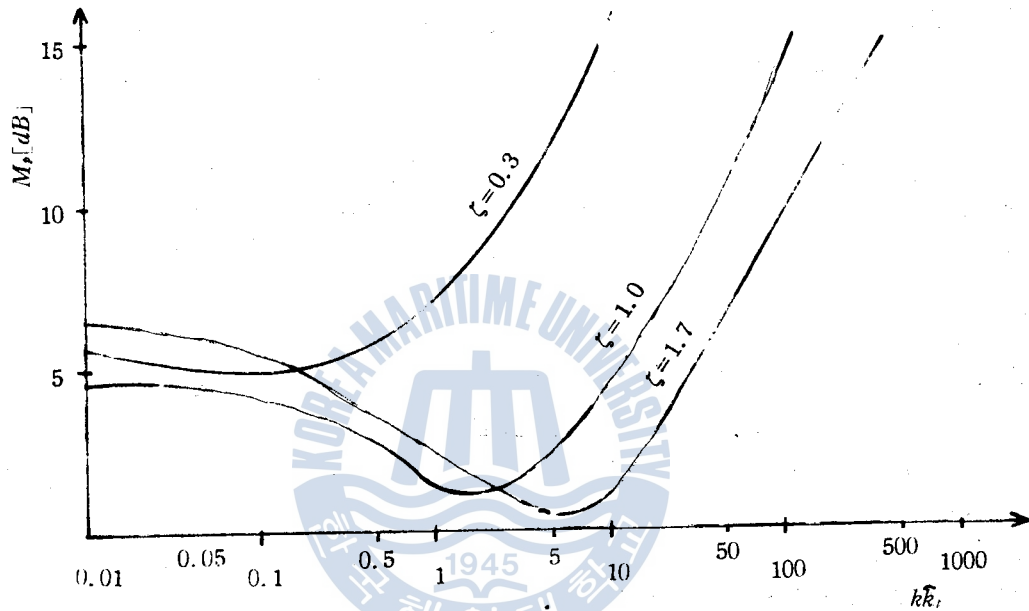


Fig. 19 Values of M_r versus $k\hat{k}_r$.

그림에서 보면 $\zeta=0.3$, $\zeta=1.0$, $\zeta=1.7$ 인 어느 것이나 다 적은 $k\hat{k}_r$ 에서는 M_r 值가 減少했다가 $k\hat{k}_r$ 의 增加와 더불어 커진다. 그리고 一般的인 制御系統에서와 같이 ζ 가 적을수록 振動性이 增加하므로 M_r 值가 크게 나타나며 $\zeta=0.3$ 인 경우는 $k\hat{k}_r$ 의 모든 값에 對해 M_r 值는 1.8(5.1dB)보다 큰 경향을 나타낸다.

또한 Table 2에서 보면 M_r 值는 ζ 와 $k\hat{k}_r$ 에 따라 變할 뿐 $\hat{\tau}$ 와 ω_n 에는 無關함을 알 수 있다. 이것은 式(2.43), 式(2.44)에서 u_r 와 $\hat{\tau}\omega_n$ 은 모두 다 ζ 와 $k\hat{k}_r$ 에 따라 일의적으로 決定되는 ζ 와 $k\hat{k}_r$ 만의 函數로 되어 있기 때문이다.

보통 프로세스 制御系는 M_r 值가 1.80²⁾ 程度가 基準으로 使用되고 있으나 高次系에서는 반드시 그렇치 않은 않다.

實際에 어떤 範圍의 M_r 值를 택했을 때 그 系統이 實用上 滿足할만한 過渡應答特性을 갖게 되면 이 範圍의 M_r 值를 택해 使用해도 充分하다.

그리고 共振周波數 ω_r 는 어떠한 ζ 에 對해서도 $k\hat{k}_r$ 가 增加하면 커지는데 이것은 制御系의 利得이 커지면 應答速度가 빨라짐을 뜻하며 ζ 가 적을수록 그리고 ω_n 이 커질수록 ω_r 는 커진다.

4.4 利得餘裕 및 位相餘裕에 對한 檢討

앞서 利得餘裕 GM 은 ζ 와 $k\hat{k}_p$ 의 크기에 따라서 달라짐을 알았다. 여기서는 ζ 가 1 인 특별한 境遇를 考察하므로써 一般的인 GM 에 對해 檢討해보기로 한다.

$k\hat{k}_p(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1) / (\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1) = 1$ 에 $\zeta = 1$ 를 代入하고 簡便히 하면 $k\hat{k}_p = \sqrt{2} - 1$ 에 ($k\hat{k}_p > 0$) 이 된다.

$k\hat{k}_p \geq \sqrt{2} - 1$ 이면 式(2.46)에서 $GM = \infty [dB]$ 이 되며 이것은 制御系統이 不安定한 상태에 到達 되기까지는 $k\hat{k}_p$ 를 무한대로 增大시킬 수 있음은 뜻한다.

$k\hat{k}_p < \sqrt{2} - 1$ 이면 式(2.47)에서 $GM = 20 \log_{10}(3 + k\hat{k}_p) / (1 - 2k\hat{k}_p - k\hat{k}_p^2)$ [dB] 이며 이 範圍 內에서는 $k\hat{k}_p$ 를 크게 하면 GM 은 增加한다.

以上에서 보던 最適系統에서의 利得餘裕 GM 은 $k\hat{k}_p$ 를 0 에서 增加시키면 같이 커졌다. $k\hat{k}_p$ 를 어느 以上 增加시키면 GM 은 ∞ 의 값을 가진다. 또한 式(2.47)에서 보던 ζ 가 큰 制御對象일수록 GM 이 커짐을 알 수 있다.

Fig. 20 은 $k\hat{k}_p$ 의 變化에 對한 位相餘裕 PM 의 값을 圖示한 것으로서 $k\hat{k}_p$ 를 增加시키면 PM 은 같이 增加하나 減少하며, $k\hat{k}_p$ 가 큰 값을 가질 때는 ζ 가 큰 系統일수록 PM 이 크며 $k\hat{k}_p$ 가 ∞ 의 값을 가질 때는 결국 어느 것이나 0 에 收斂하게 된다.

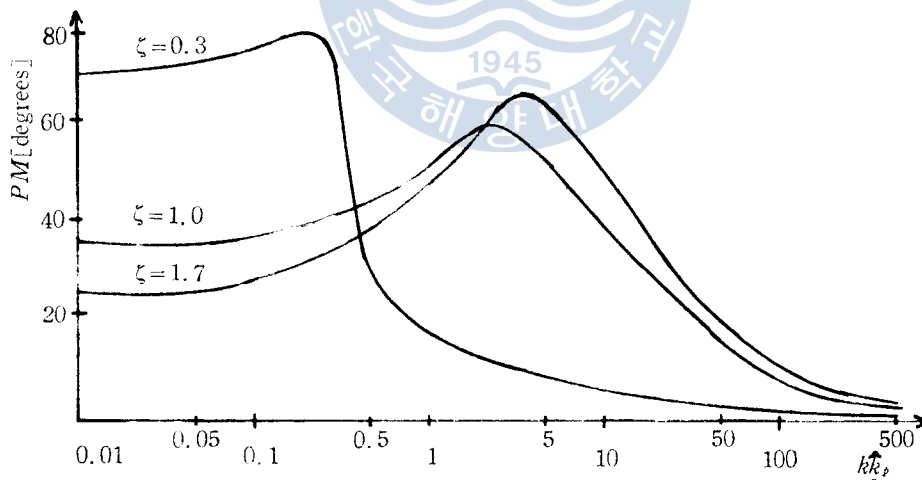


Fig. 20 Values of PM versus $k\hat{k}_p$.

5. 結 論

以上과 같이 2次系統을 制御對象으로 하는 단위 피드백 制御系統에 있어서 PI 制御器를 使用할 때 誤差의 2 乘面積을 評價函數로 定義하고 이 評價函數를 最少로 하는 퍼라미터 즉 k_p 와 τ_i 의 값을

求하는 解析的인 方法에 對해 考察하였다.

本 方法에 依해 求한 퍼래미터가 最適值임은 應答實驗을 통해 확인되었으며 周波數應答에 依한 檢討를 거쳐 다음과 같은 結論을 얻을 수가 있다.

i) 2次系統의 制御對象에 對하여 PI 制御器를 使用할 때 利得 k_p 를 增加시킬수록 2乘制御面積 \hat{F}_2 는 적어진다.

ii) 그때의 最適 $\hat{\tau}_i$ 와 \hat{F}_2 는 다음과 같다.

$$\hat{\tau}_i = \frac{k\hat{k}_p(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)}{2\zeta\omega_n(\sqrt{(k\hat{k}_p + 1)(k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - 1)}$$

$$\hat{F}_2 = \frac{k\hat{k}_p + 4\zeta^2 - 1 + 2\zeta\omega_n\hat{\tau}_i/k\hat{k}_p}{4\zeta\omega_n(k\hat{k}_p + 1 - k\hat{k}_p/2\zeta\omega_n\hat{\tau}_i)}$$

iii) \hat{k}_p 가 적은 값에서는 \hat{k}_p 값의 變化에 對한 \hat{F}_2 의 變化는 크나 \hat{k}_p 값이 커지면 \hat{k}_p 의 變化에 對한 \hat{F}_2 의 變化는 적어지며 \hat{k}_p 가 ∞ 의 값을 가지면 \hat{F}_2 는 $1/4\zeta\omega_n$ 에 收斂하게 된다.

iv) 2乘制御面積 \hat{F}_2 를 改善하기 위해 \hat{k}_p 를 增加시키면 어느 범위 이상에서는 M_p 值도 增加되어 制御系統은 過渡應答時 最大 오우버슈트가 커진다.

v) \hat{k}_p 를 增加시키면 利得餘裕는 增加됐다 0가 되나 반면 位相餘裕는 增加됐다 減少되어 0°에 收斂하게 된다.

여기서 가장 理想的인 最適制御는 $\hat{k}_p \rightarrow \infty$ 일 때이나 이때는 過渡狀態를 좋지 못하게 하므로 實際的인 플랜트 制御에서는 여러 制御定數(最大 오우버슈트, M_p 值, 利得餘裕, 位相餘裕, 速應性등) 들을 考慮해서 \hat{k}_p 값과 그에 對應되는 $\hat{\tau}_i$ 값을 선택하여야 할 것이다.

參 考 文 獻

1. 河注植, 柳吉洙: PID制御器의 最適調整에 關한 研究, 韓國海洋大學 大學院 論文集, Vol. 2, pp.5(1979)
2. 河注植: 自動制御工學, 韓國海洋大學 海事圖書出版部, 釜山, pp.100~113, 267~278 (1974)
3. 南宮 寒, 孫炳鎭: 自動制御, 文運堂, 서울, pp.272~292 (1977)
4. 榎木 義一, 添田 喬, 中溝高好: 統計的 自動制御理論, コロナ社, 東京, pp.124~139, 303~306
5. J. J. D'azzo, C. H. Houpis: Feed Back Control System Analysis and Synthesis, McGraw-Hill Kogakusha, LTD., pp.644~658 (1966)
6. Alle I. Elgerd: Control System Theory, McGraw-Hill, New-York, pp.59~85 (1967)
7. Stanly M. Shinnars: Modern Control System Theory and Application, Addison-Wesley Publishing Co., pp. 63~84, 473~512 (1979)
8. Hitachi Analog Computer Programming, Hitachi Electronics, LTD., pp.70~79