

## 2질점 비선형 비틀림진동계의 안정성 해석

하 장 우\* · 김 의 칸\*\*

### Stability Analysis of 2-mass Torsional Vibration System with Nonlinear Stiffness

*Chang Woo Ha · Ue-Kan Kim*

#### Abstract

As a propulsion shafting system with a viscous damper has become complicated, linear analysis methods may not be applied to solve the forced torsional vibration on occasion of the system with nonlinearity.

In this paper, a propulsion shafting system with a viscous damper was modeled into a equivalent two mass system with Duffing's nonlinear stiffness. Harmonic balance method(HBM) and perturbation method(PM) were used to obtain the solutions of this system. Also, in order to analyze the stability, the strained parameter method(SPM) and PM were applied to the vibration system. And it was also examined on the forced torsional amplitude that as parameters increased or decreased, such as damping ratio, nonlinear stiffness and exciting torque, how the nature of the solution and stability change.

#### 1. 서 론

최근 선박용 디젤엔진의 평균유효압력과 최고폭발압력이 증가함에 따라 비틀림진동의

\* 석사과정 기관공학과 주기관 전공

\*\* 기계시스템공학부 부교수

기진력이 되는 토오크변동력이 크게 되었다. 이에 따른 축계의 비틀림진동 제어대책으로 중·소형 고속엔진에서는 점성댐퍼를 채택하는 경우가 많다. 점성댐퍼는 관성링과 케이싱 사이의 틈에 적절한 고점도의 실리콘유가 충전된 구조로 되어 있으며, 운전중에는 실리콘유에 전단 저항력이 발생하여 비틀림 진동진폭을 제어하게 된다.<sup>1)</sup>(Fig.1.1참고)

일반적으로 축계의 비틀림진동을 해석할 때 점성댐퍼는 점성감쇠만을 갖는 것으로 생각하여 선형적으로 모델링하고 있으나, 실제로는 고점도의 점성에 의한 강성도 갖고 있음이 보고되고 있다. 즉 Iwamoto 등은 점성댐퍼 내의 실리콘유는 댐퍼 케이싱과 관성링의 상대속도에 비례한 감쇠력 외에 진동수가 높게 되면 위상지연을 가져와 변위에 비례하는 강성도 존재함을 보고하였다.<sup>2),3)</sup> 이 연구에서 그는 실리콘유의 복소점도를 진동점도계로 측정하여, 감쇠력은 허수부인 탄성효과도 포함된 복소수 형태로 계산하는 것이 바람직하다고 보고하고 있다. 또한 진동수가 높은 고속엔진에서 실리콘유의 동점도가  $30 \times 10^4$  cSt보다 큰 경우에는 복소감쇠의 실수부인 감쇠계수는 작아지고, 허수부인 변위 비례형 강성계수가 오히려 증가하여 탄성스프링에 가까운 특성을 갖는 것을 확인하였다.

Hayama도 점성댐퍼의 유체역학적 특성을 경계층이론으로 해석하여, 감쇠력이 복소감쇠력을 가지며, 이에 따라 강성효과도 존재함을 보고하고 있다.<sup>4)</sup> 그러나 이들의 연구는 점성댐퍼 자체의 특성에 관한 것이며, 점성댐퍼를 갖는 엔진축계의 비틀림진동은 선형으로 해석하였다.

또한, 본 연구에서 점성댐퍼를 갖는 실제 엔진축계의 비틀림진동을 측정하여 분석한 결과, 비선형진동의 일종인 도약현상이 발생하고 있음을 확인하였다. 이는 점성댐퍼가 각 변위에 비례하는 강성계수 외에 각변위의 3승에 비례하는 비선형 강성도 함께 가지고 있어, 이 결과 Duffing진동계의 특성을 보이는 것으로 판단된다. 따라서 축계의 비틀림진동을 해석할 때 점성댐퍼는 감쇠계수와 비선형 강성계수를 갖는 비선형 등가진동계로 모델링하는 것이 바람직하나, 이에 관한 연구는 전무한 실정에 있다. 또한 점성댐퍼를 갖는 엔진축계를 비선형 다자유도 등가진동계로 모델링하여도 이를 해석하기에는 어려움이 많다.

비선형을 갖는 진동계의 주기해와 그 해의 안정영역을 구하는 근사해법으로는 등가선형화법(equivalent linearization method), 평균법(averaging method), MSM(multi scale method), 섭동법(perturbation method), 조화균형법(harmonic balance method) 등이 있으며, 최근에는 조화균형법과 섭동법이 많이 적용되고 있다.<sup>5),6),7),8)</sup>

섭동법과 조화균형법의 특성을 비교하여 보면, 섭동법은 비선형성이 약한 진동계에 제한적으로 적용할 수 있지만, 조화균형법은 비선형성이 급격하게 변하지 않는다면 가정한

주기해가 엄밀해에 수렴하게 된다. 또한 주기해로 많은 하모닉스를 사용할수록 엄밀해에 접근하나, 섭동법은 고차방정식을 적용하여도 저차의 해는 정확성이 향상되지 않는다. 그리고 섭동법으로 진동계의 안정성을 해석하는 경우에는, 주기해를 구하는 과정에서 주기해에 약간의 변분을 주어 구할 수 있으나, 조화균형법은 주기해의 안정영역을 구하기 위해서는 다른 방법을 병용하여야 하는 번거로움이 있다.

엔진축계가 비선형성을 가지게 되면 불안정영역이 존재하게 된다. 이를 검토하면 특이 현상의 발생을 예측할 수 있다. Duffing진동계의 경우에는 불안정영역의 시작점에서 선형계에서는 나타나지 않는 도약현상(jumping phenomenon)이 발생한다. 따라서 어떤 조건에서 불안정영역이 나타나는지 예측하기 위해서는 안정성해석이 필요하다. 안정성 해석 방법은 크게 정성적인 방법과 정량적인 방법으로 대별할 수 있으며, 정성적인 방법 중 대표적인 것은 위상평면의 특성을 이용하는 것이며, 정량적인 방법으로는 직접 전개하는 방법, 구속파라미터법, 섭동법 등이 있다.

본 연구에서는 점성댐퍼를 갖는 엔진축계를 2질점계의 비선형 Duffing진동계로 모델링하여 비선형 운동방정식을 유도한다. 이 비선형 운동방정식의 자유진동과 강제진동을 조화균형법과 섭동법으로 해석하고, 진동계의 특성치 즉, 감쇠계수, 비선형강성계수, 기진력이 진동진폭에 미치는 영향을 해석한다. 또한, 진동진폭의 안정성을 섭동법과 구속파라미터법으로 해석하여 각 특성치의 변화에 따른 진동진폭의 특성을 이론적으로 검토하고자 한다.

## 2. 비선형 비틀림 운동방정식의 유도 및 해석

### 2.1 비선형 비틀림 운동방정식 유도

엔진의 비틀림강성은 점성댐퍼의 비틀림강성보다 상당히 크므로 1질 진동에 대해서는 비틀림진동 댐퍼의 관성링과 엔진축계의 총질량으로 구성되는 2질점 비틀림진동계로 모델링하여도 해석 결과에는 크게 차이가 없다. 따라서 점성댐퍼를 부착한 엔진축계를 2질점 Duffing진동계로 모델링하면 Fig.2.1과 같이 된다. 이 그림에서 비선형 복원력함수  $f(\phi)$ 은 식(2.1)과 같이 각변위의 1승에 비례하는 선형 강성계수  $k_d$ 와 각변위의 3승에 비례하는 비선형 강성계수  $\beta$ 의 합으로 된다.

$$f(\phi) = k_d\phi + \beta\phi^3 \quad (2.1)$$

Fig.2.1에 대한 운동방정식은 식(2.2)와 같이 된다.

$$J_e \ddot{\phi}_1 + c \dot{\phi}_1 + k_d \phi_r + \beta \phi_r^3 = T_o e^{j\omega t} \quad (2.2)$$

$$J_d \ddot{\phi}_1 - c \dot{\phi}_1 - k_d \phi_r - \beta \phi_r^3 = 0$$

여기서,  $J_e$ 는 엔진 전체의 관성모멘트,  $J_d$ 는 점성댐퍼 관성링의 관성모멘트,  $c$ 는 감쇠계수,  $k_d$ 는 선형 비틀림강성계수,  $\beta$ 는 비선형 비틀림강성계수,  $\phi_r$ 은 엔진과 점성댐퍼 관성링의 상대각변위,  $T_o e^{j\omega t}$ 는 엔진의 조화기진토크를 의미한다.

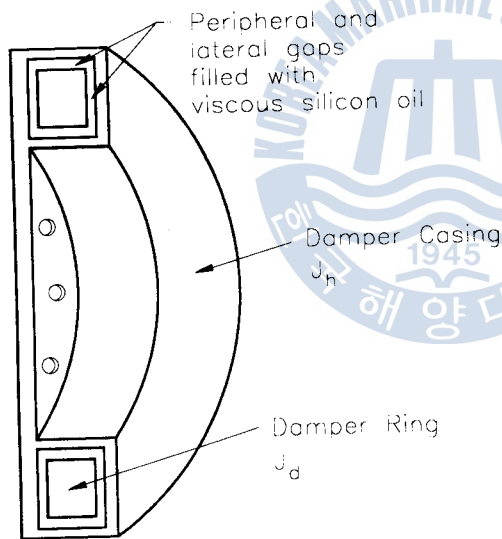


Fig. 1.1 Sectional assembly of viscous damper.

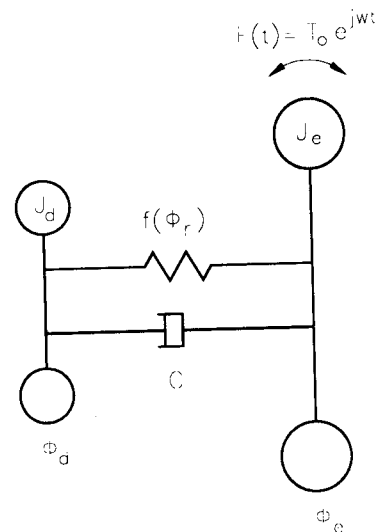


Fig. 2.1 Equivalent two-mass system with nonlinear torsional stiffness.

## 2.2 조화균형법에 의한 비선형 자유진동 해석

식(2.2)에서 감쇠  $c$ 와 기진력  $T_o$ 를 무시하면, 식(2.3)과 식(2.4)와 같은 비선형 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$J_1 \ddot{\phi}_1 + k_d \phi_r + \beta \phi_r^3 = 0 \tag{2.3}$$

$$J_2 \ddot{\phi}_2 - k_d \phi_r - \beta \phi_r^3 = 0 \tag{2.4}$$

식(2.3)과 식(2.4)에서 비틀림 각변위  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  및 상대 각변위  $\phi_r$  이 조화진동한다고 가정한다. 식(2.3)과 식(2.4)의 해는 고조파를 포함하고 있지만 비선형성이 작다고 가정하여 여기서는 1차 조화성분인 주공진(primary resonance)만을 고려한다. 이 식에서  $\beta \phi_r^3$  은 식(2.5)와 같이 된다.

$$\beta \phi_r^3 = \beta \Phi_r^3 \cos^3 \omega t = \beta \Phi_r^3 \left( \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) \tag{2.5}$$

식(2.5)에서 3차항을 무시하면  $\beta \phi_r^3 \approx \frac{3}{4} \beta \Phi_r^3 \cos \omega t$ 로 된다. 이를 이용하여 비선형 고유 각진동수  $\omega_n$ 을 구하면 식(2.6)과 같이 된다.

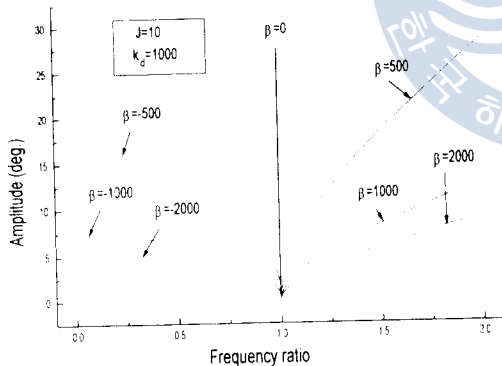


Fig. 2.2 Backbone curve for nonlinear free vibration.

$$\omega_n = \pm \sqrt{\frac{k_d}{J} + \frac{3}{4} \frac{\beta}{J} \Phi_r^2} \tag{2.6}$$

여기서  $J = J_1 J_2 / (J_1 + J_2)$  이다.

비선형 비틀림진동의 고유진동수  $\omega_n$ 은 식(2.6)에서 알 수 있는 바와 같이  $\beta=0$ 인 선형 고유진동수  $\omega_0 = \sqrt{k_d/J}$ 를 중심으로 비틀림 상대각진폭의 크기  $\Phi_r$ , 비선형 비틀림강성계수  $\beta$  및 등가관성모멘트  $J$ 에 따라 변화한다. 그리고 비선형 비틀림강성계수  $\beta$  및 등가관성모멘트  $J$ 가 일정하면, 고유각진동수  $\omega_n$ 은 비틀림 상대각진폭의 크기  $\Phi_r$ 에 따라 변하게 된다.

$\beta$ 에 따른 비선형 비틀림자유진동의 특성을 살펴보기 위해 비선형 고유진동수  $\omega_n$ 에 대한 선형 고유진동수  $\omega_0$ 와의 비에 대한 비틀림 상대각진폭  $\Phi_r$ 의 변화를 Fig.2.2에 보

이다. 여기서 선형 비틀림강성계수  $k_d = 1000$ , 등가관성모멘트  $J = 10$ , 선형고유진동수  $\omega_0 = \sqrt{k_d/J} = 10$ , 비선형 비틀림강성계수  $\beta = -2000, -1000, -500, 0, 500, 1000, 2000$ 을 적용한 결과이다. 이를 살펴보면 비선형 고유진동수  $\omega_n$ 은  $\omega_n/\omega_0 = 1$ 인 지점, 즉 선형 고유진동수  $\omega_0$ 을 기점으로 선형의 경우와 달리 비틀림 상대각진폭  $\phi_r$ 의 크기에 따라 달라짐을 알 수 있다. 또한,  $\beta < 0$ 인 경우에는 좌측으로,  $\beta > 0$ 인 경우에는 우측으로 기울어지며,  $\beta$ 의 절대값이 클수록 기울기가 증가함을 알 수 있다.

### 2.3 조화균형법을 이용한 비선형 강제진동 해석

2질점계의 비선형 강제진동방정식은 식(2.2)와 같으며, 여기서 기진토오크의 항  $T_0 e^{j\omega t}$ 의 실수부만 취하면 식(2.7)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} J_e \ddot{\phi}_1 + c \dot{\phi}_r + k_d \phi_r + \beta \phi_r^3 &= T_0 \cos \omega t \\ J_d \ddot{\phi}_2 - c \dot{\phi}_r - k_d \phi_r - \beta \phi_r^3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

식(2.7)의 해를 구하기 위하여 조화균형법을 적용하면 식(2.8)과 같이 상대각진폭  $\phi_r$ 에 대한 6차 방정식이 유도되며 위상각  $\varphi_r$ 은 식(2.9)와 같이 된다.

$$\frac{9}{16} \beta^2 \phi_r^6 + \frac{3}{2} \beta (k_d - J\omega^2) \phi_r^4 + \{ (k_d - J\omega^2)^2 + c^2 \omega^2 \} \phi_r^2 - T_1^2 = 0 \quad (2.8)$$

$$\varphi_r = \sin^{-1} \left( \frac{c\omega\phi_r}{T_1} \right) \quad (2.9)$$

여기서  $T_1 = T_0 J_d / (J_e + J_d)$ 이다.

식(2.8)에서 상대각진폭  $\phi_r$ 을 구하기 위하여,  $\phi_r$ 에 대한 6차 방정식을  $\phi_r^2$ 에 대한 3차 방정식으로 놓고 해를 구한다. 이 방정식의 해는 식(2.10)의  $D$ 의 부호에 따라 3가지 형태를 갖는다.

$$\begin{aligned} D = \frac{1728}{531441\beta^6} [ &243\beta^2 T_1^4 + 48\beta T_1^2 (k_d - \omega^2 J) \{ (k_d - \omega^2 J)^2 + 9\omega^2 c^2 \} \\ &+ 64\omega^2 c^2 \{ (k_d - \omega^2 J)^2 + \omega^2 c^2 \}^2 ] \end{aligned} \quad (2.10)$$

식(2.8)과 식(2.9)에 의해 구한 상대각진폭  $\phi_r$  및 위상각  $\phi_r$  을 Fig.2.3 및 Fig.2.4에 보인다. 이들 그림에서 등가관성모멘트  $J = 10$ , 선형 비틀림강성계수  $k_d = 1000$ , 선형고유진동수  $\omega_0 = 10$ , 점성감쇠계수  $c = 5$ , 감쇠비  $\zeta = 0.025$ , 기진토포크  $T_1 = 1000/3$ , 비선형 비틀림강성계수  $\beta = 5$ 를 적용하였다. Fig.2.3에서 알 수 있듯이 선형의 경우와 달리 기진진동수  $\omega$ 의 크기에 따라 진동진폭이 2개 혹은 3개가 나타나는 구간이 존재한다.

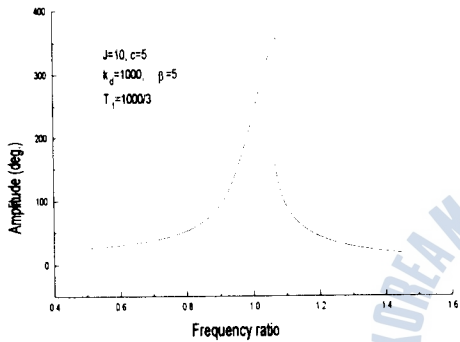


Fig. 2.3 Amplitude of nonlinear torsional system using harmonic balance method.

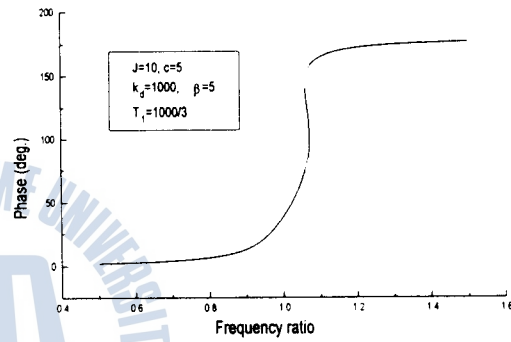


Fig. 2.4 Phase angle of nonlinear torsional system using harmonic balance method.

### 2.4 섭동법을 이용한 비선형 강제진동 해석

섭동법을 섭동파라미터  $\epsilon$ 을 도입하여 비선형 미분방정식을 해석 가능한 여러개의 선형 비제차 미분방정식으로 전개한다. 이 여러개의 선형 미분방정식을 차례대로 해석함으로써 비선형 미분방정식의 근사해를 구할 수 있다. 이 방법을 앞에서 구한 식(2.2)에 적용하면 다음과 같은 6차 방정식과 위상을 구할 수 있다.

$$\frac{9}{16} (\epsilon a)^2 a^6 - \frac{3}{2} (\epsilon \sigma) (\epsilon a) \omega_0 a^4 + 4 \omega_0^2 [(\epsilon \mu)^2 - (\epsilon \sigma)^2] a^2 - (\epsilon f)^2 = 0 \tag{2.11}$$

$$\gamma = \sin^{-1} \left( \frac{2 \omega_0 \mu a}{f} \right) \tag{2.12}$$

식(2.11)의 해를 구하기 위하여 근의 판별식  $D$ 를 구하면 식(2.13)과 같다.

$$D = \frac{64}{531441\alpha^6} [36864\omega_0^6\mu^2(3\sigma^4 + 8\sigma^2\mu^2 + 3\mu^4) - 10368\omega_0^3f^2\alpha\sigma(\sigma^2 + 9\mu^2) + 6561f^4\alpha^2] \quad (2.13)$$

식(2.11)과 식(2.12)를 이용하여 비선형 강제진동진폭과 위상을 구하면 조화균형법으로 구한 것과 일치한다.

### 3. 비선형 강제진동진폭의 안정성

#### 3.1 섭동법을 이용한 안정성 해석

섭동법으로 안정성을 해석할 경우 먼저 앞장에서와 같은 방법으로 변위와 위상을 포함하는 운동방정식을 결정하고, 이 방정식을 자율계로 변환하면 정상해는 특이점과 일치하며 해의 안정성은 특이점의 안정성과 일치한다. 이를 Duffing계에 적용하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega}\right)\left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega}\right) = 0 \quad (3.1)$$

식(3.1)에서  $\mu > 0$ 일 경우 즉, Jordan canonical form에서 trace가 0보다 작을 경우 determinant가 0보다 작으면 불안정하게 된다.<sup>8)</sup> 즉, 다음과 같은 경우에는 정상해가 불안정하게 된다.

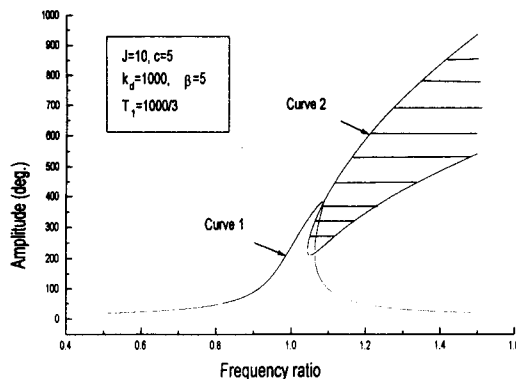


Fig. 3.1 Frequency-response curve and stability curve using PM

$$\Gamma = \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right)\left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right) + \mu^2 < 0 \quad (3.2)$$

식(3.2) 이외의 구간은 안정한 영역이 된다. 식(5.46)에 의한 불안정영역과 안정영역을 Fig.3.1에 보인다. 이 그림에서 curve 1은 2장에서 섭동법으로 구한 진동진폭을 나타내며, curve 2는 식(3.2)로 계산한 불안정영역과 안정영역을 나타내는 곡선이다. 두 곡선이 만나는 점에서 도약현상이 일어난다.



### 3.2 구속파라미터법을 이용한 안정성 해석

본 절에서는 3장의 조화균형법으로 구한 진동진폭에 구속파라미터법을 적용하여 안정성을 해석하였다. 먼저 크기가 작은 값을 갖는 변분  $v(T)$ 를 도입하여 변분방정식을 구하고, 이 변분방정식의 특성을 해석하면 안정영역과 불안정영역을 나누는 천이곡선을 구할 수 있다. 주공진(primary resonance)의 경우 다음과 같은 천이곡선을 구할 수 있다.

$$\delta = 1 \pm (\epsilon^2 - 4\mu^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

예를 들어 식(2.2)에서  $J=10$ ,  $k_d=1000$ ,  $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{J}}=10$ ,  $c=5$ ,  $\beta=5$ ,  $T_1=1000/3$ 일 때 조화균형법으로  $\Phi_r$ 를 구하고, 이를  $\delta$ 와  $\epsilon$ 으로 나타내면 Fig.3.2 curve 1이 된다. 또한 식(3.3)에 의한 천이곡선은 Fig.3.2의 curve 2로 된다. 여기서 불안정영역은 curve 20의 벗어난 부분이다. curve 1과 curve 2가 만나는 A점과 B점이 임계점이 된다. 즉, A점에서 불안정현상이 시작되어 B점까지 계속되며, B점 이후에는 안정상태로 된다.

식(3.3)과 같이 주어지는 천이곡선이  $(\omega, \Phi_r)$ 평면에서는 어떠한 양상을 보이는 알아보기 위해,  $\epsilon$ ,  $\delta$ 에 대응하는  $\omega$ ,  $\Phi_r$ 을 식(3.3)에 대입하여 정리하면 식(3.4)와 같이 된다.

$$27r^2\Phi_r^4 + 48r(k - J\omega^2)\Phi_r^2 + 16(k - J\omega^2)^2 + c^2\omega^2 = 0 \quad (3.4)$$

식(3.4)를 이용하여 Fig.3.2의 곡선을  $(\frac{\omega}{\omega_0}, \Phi_r)$ 평면상에 그리면 Fig.3.3과 같이 된다.

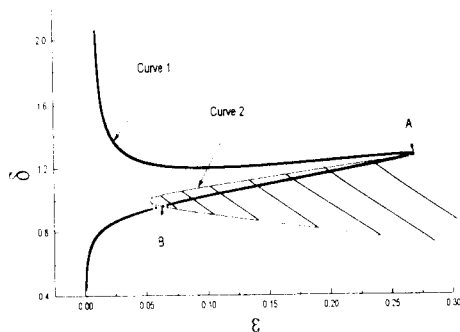


Fig. 3.2 Transition curve with positive nonlinear torsional stiffness.

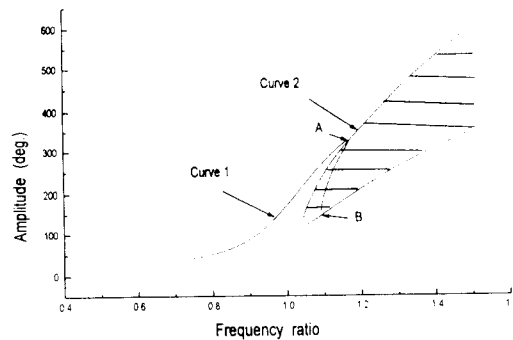


Fig. 3.3 Stability curve with positive nonlinear torsional stiffness.

#### 4. 비선형 운동방정식의 특성

비선형 운동방정식의 각 특성치 즉, 감쇠비, 비선형 비틀림강성계수 및 기진토오크가 비선형 강제진동진폭  $\phi_r$ 에 미치는 영향을 검토하였다.

##### 4.1 감쇠계수가 비선형 강제진동진폭에 미치는 영향

감쇠계수에 따른 비선형 강제진동진폭  $\phi_r$ 의 변화를 계산하였다. 이 결과를 Fig.4.1에 보인다. 이 그림을 기진 진동수와 선형 고유진동수의 비  $\omega/\omega_0$ 에 대한 비선형 강제진동진폭  $\phi_r$ 을 감쇠비  $\zeta$ 의 크기에 따라서 그린 것이다.

여기서  $J=10$ ,  $k_a=1000$ ,  $\omega_0=\sqrt{k_d/J}=10$ ,  $\beta=5$ ,  $T_1=1000/3$ 인 경우에 감쇠비  $\zeta=0.05, 0.025, 0.02, 0.015, 0.01$ 을 각각 채택하였다. 이를 살펴보면 감쇠비  $\zeta$ 값이 크게 될 수록 진폭은 작아지고 거의 선형에 가까운 형태를 보이며,  $\zeta$ 값이 작아질수록 비선형성이 크게 나타남을 알 수 있다.

##### 4.2 비선형 비틀림강성계수가 비선형 강제진동진폭에 미치는 영향

비틀림강성계수는 앞에서 설명한 바와 같이 선형 비틀림강성계수  $k_d$ 와 비선형 비틀림강성계수  $\beta$ 로 나누어지며, 선형 비틀림강성계수  $k_d$ 는 선형진동과 같은 현상을 나타내므로 논의로 하고, 비선형 비틀림강성계수  $\beta$ 가 진동진폭  $\phi_r$ 에 미치는 영향을 검토한다. 먼저  $\beta$ 의 부호에 따라  $\phi_r$ 은 Fig.4.2와 같이 된다. 이는 선형 비틀림고유진동수  $\omega_0$ 를 기준선으로  $\beta < 0$ 의 경우에는 좌측으로 구부러지는 현상을,  $\beta > 0$ 의 경우에는 우측으로 구부러지는 현상을 보이고 있다. 또한 Fig.4.3에서 보는 바와 같이  $\beta$ 의 절대값이 증가할수록 기울기가 증가함을 알 수 있다.

##### 4.3 기진토오크가 비선형 강제진동진폭에 미치는 영향

비선형 비틀림강성계수  $\beta$ 가 양(+)인 경우에 기진토오크의 변화에 따른 진동진폭 및 안정 구간의 변화를 Fig.4.4에 보인다. 여기서 알 수 있듯이 기진토오크가 증가할수록 진동진폭은 증가하며, 불안정영역 또한 증가한다.  $T_1$ 의 크기가 작으면 거의 선형방정식에 의한 진동진폭과 유사한 결과를 갖는다.

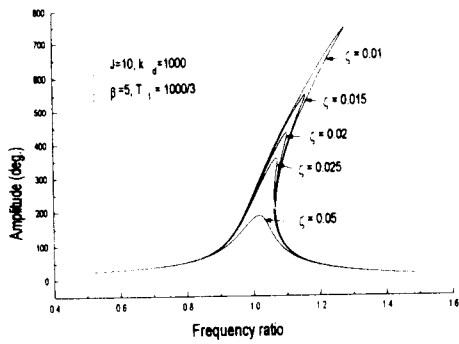


Fig. 4.1 Torsional amplitude by damping ratio.

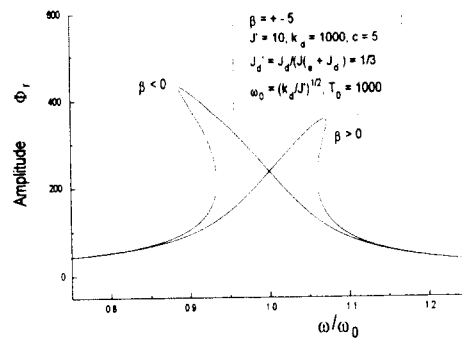


Fig. 4.2 Torsional amplitude by nonlinear stiffness's sign.

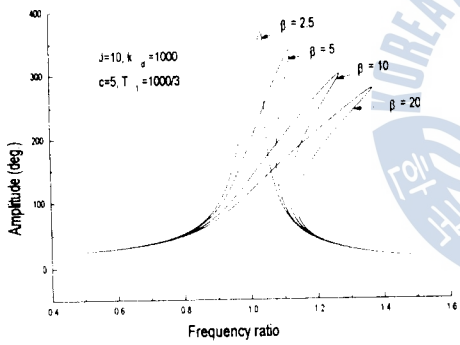


Fig. 4.3 Torsional amplitude by nonlinear stiffness's magnitude.

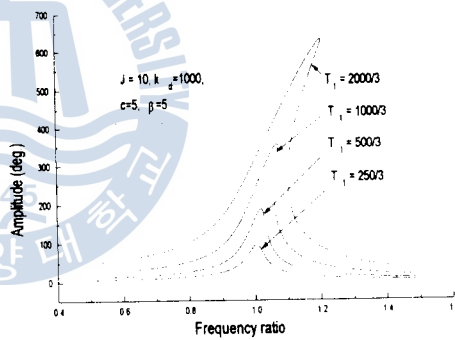
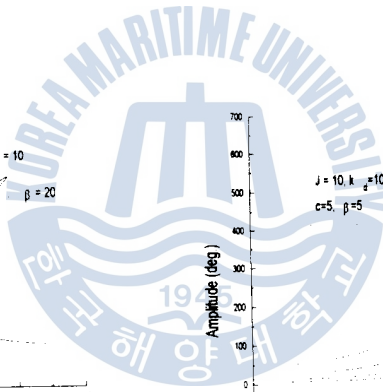


Fig. 4.4 Torsional amplitude by exciting torque.

## 5. 결 론

점성댐퍼를 장착한 엔진축계를 2질점 Duffing진동계로 모델링하고 조화균형법과 섭동법을 적용하여 비선형 비틀림강제진동을 해석하였다. 그리고 특이점의 특성을 이용하여 섭동법으로 구한 해의 안정성을 해석하였으며, 구속파라미터법을 이용하여 조화균형법으로 구한 해의 안정성을 살펴보았다. 이를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 점성감쇠를 갖는 엔진축계를 2질점 Duffing진동계로 모델링하고, 이 계에 조화균형법과 섭동법을 적용하여 비선형 비틀림강제진동을 해석하였다.
- (2) 조화균형법으로 비선형 진동계를 해석할 경우 진동진폭은 구할 수 있으나 안정성 해석을 위해서 다른 방법을 병용해야 한다. 본 논문에서는 구속파라미터법을 적용하여 해석하였다.
- (3) 비선형성이 작은 경우에는 섭동법을 적용하여 비선형 진동계의 진동진폭과 안정성을 동시에 확인하였다.
- (4) 2질점계의 안전성을 해석할 경우 구속파라미터법을 이용할 수 있음을 확인하였다.
- (5) 비선형 자유진동을 해석함으로써 비선형 고유진동수가 선형의 경우와 달리 비틀림 상대 각진폭의 크기, 비선형비틀림 강성계수 및 등가관성모멘트에 따라 변함을 확인하였다.
- (6) 비선형 강제진동을 해석함으로써 진동진폭의 판별식의 크기에 따라 1개, 2개 혹은 3개가 나타나는 구간이 존재함을 확인하였다.
- (7) 감쇠계수가 작을수록 진동진폭의 비선형성이 크게 나타나고 불안정영역도 증가하였다. 감쇠계수가 크면 불안정영역이 거의 나타나지 않음을 확인하였다.
- (8) 비선형 강성계수가 클수록 비선형성이 증가하며, 불안정 영역도 넓어짐을 확인하였다.
- (9) 기진토포크가 증가할수록 진동진폭의 비선형성이 증가하였다.

## 참 고 문 헌

1. 清水春樹, “トーションナルピスカスタンバ”, 内燃機關, 第30卷 第3號, 1991, 3, p.33.
2. 岩本昭一, “ディーゼル機關における粘性ねじり振動ダンパ作動油の實效粘度に關する研究(その2 : 高速機關におけるダンパ作動油の複素粘度)”, 日本船用機關學會誌, 第18券 第10號, 1983, 10 p.25.

3. 岩本昭一外 2人, “往復動内燃機關における粘性ねじり振動ダンパ作動油の設計計算法(續報)-ダンパ作動油粘度の選定法-”, 設計製圖, 第19巻 第112號, 1984, 7, p.33.
4. 葉山眞治, “オイルダンパ内粘性力の振動數存在性について”, 日本船用機關學會誌, 第22巻 第8號, 1987, 8, p.59.
5. M.I. FRISWELL and J.E.T. PENNY, “The accuracy of jump frequencies in series solutions of the response of a Duffing oscillator”, Journal of sound and vibration, 169(2), 1994, p.261.
6. 根本義一, “非線形振動論”, 共立出版(株), 1958
7. M. N. HAMDAN and T. D. BURTON, “ On the steady state response and stability of nonlinear oscillators using Harmonic Balance”, Journal of Sound and Vibration, 1993, vol 166(2)
8. A. H. NAYFEH and D. T. MOOK, Nonlinear oscillations, New York, 1979
9. J. DAVID LOGAN, An Introduction to nonlinear partial differential equations, Wiley Interscience, 1994
10. K. R. ASFAR and K. K. MASOUD, On the Period-Doubling Bifurcations in the Duffing's oscillation with Negative Linear Stiffness, Journal of vibration and acoustics, Oct. 1992, vol 144, p489-494

